

Zweites Buch.

Erste Abtheilung.

Krumme Linien.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN



Erste Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Construction und Tangirung einiger ebener
Curven.

§ 107.

Ein kreisförmiges Linienelement, das durch eine
nicht dadurch, dass sich die
neue Gerade fortbewegt. In
den Bedingungen, dass die Curve bewegend
tet eine Ebene, und es sich die Curve nicht
ger in diese Ebene, so wird die Curve
Curve genannt.

Zweites Buch.

Erste Abtheilung.

Krumme Linien.

Zweites Buch.

Erste Abtheilung.

Krönung Klügel.



Erste Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Konstruktion und Tangirung einiger ebener Curven.

§. 202.

Eine krumme Linie oder Curve entsteht dadurch, dass sich ein Punkt nach irgend einem Gesetze fortbewegt. Legt man durch irgend drei Stellungen des die Curve erzeugenden Punktes eine Ebene, und es fällt die Curve ganz und gar in diese Ebene, so wird dieselbe eine ebene Curve genannt.

§. 203.

Die einfachste unter den ebenen Curven ist die Kreislinie. Sie entsteht dadurch, dass der sich bewegende und diese Linie erzeugende Punkt während seiner ganzen Bewegung von einem fixen Punkte dieselbe Entfernung beibehält. Man nennt diesen fixen Punkt den Mittelpunkt oder das Centrum der Kreislinie; die Entfernung irgend einer Stellung des erzeugenden Punktes von dem Mittelpunkte der Kreislinie wird Halbmesser oder Radius, ein Theil der Linie selbst Bogen und die Figur, die von der Kreislinie eingeschlossen wird, Kreis genannt. Eine durch das Centrum gehende Gerade, welche zwei Stellungen des erzeugenden Punktes verbindet, wird Durchmesser genannt, und es sind also auch alle Durchmesser unter sich gleich. Jede Gerade, welche irgend zwei Stellungen des erzeugenden Punktes verbindet, wird Sehne des Kreises, ein von einer Sehne und einem Bogen begränkter Theil des Kreises wird Segment oder Abschnitt und ein von zwei Halbmessern und einem Bogen begränkter Theil wird Ausschnitt oder Sektor genannt. —

Anmerk. Ueber die Konstruktion der Kreislinie für den gegebenen Halbmesser bleibt nichts zu erwähnen übrig; allein es wird nicht überflüssig sein zu zeigen, wie man irgend einen Punkt derselben nach angegebenen Bedingungen bestimmen kann. Zieht man nämlich zwei Durchmesser senkrecht auf einander, bezeichnet die Entfernung einer beliebigen Stellung des erzeugenden Punktes vom ersten

Durchmesser mit x , seine Entfernung vom andern Durchmesser mit y , und die Länge des Halbmessers mit r , so ist nach einem Satze der Geometrie:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

und diese Gleichung reicht hin, um für einen gegebenen Halbmesser und aus der Entfernung eines Punktes von einem Durchmesser, seine Entfernung vom andern Durchmesser sowohl, als auch den Punkt selbst angeben zu können; so wie man aus den Entfernungen eines Punktes von jenen beiden Durchmessern — seinen Coordinaten — den Halbmesser der Kreislinie bestimmen kann.

§. 204.

Bevor wir auf einzelne Aufgaben über die Kreislinie übergehen, wollen wir noch einige Erklärungen vorausschicken. Denkt man sich nämlich die einzelnen auf einander folgenden Lagen des erzeugenden Punktes einer Curve auf letzterer angegeben, so nennt man einen Theil der letzteren, welcher zwischen zwei solchen Punkten sich befindet, Element der Curve, die Endpunkte eines solchen Elementes consecutive Punkte. Dass man ein solches Element, ohne einen wirklichen Fehler zu machen, als Gerade betrachten kann, bedarf kaum einer Erwähnung. Die Verlängerung eines solchen Elementes wird Tangente der Curve und einer dieser das Element begränzenden Punkte Berührungspunkt dieser Tangente, ferner wird die vom Berührungspunkte auf die Tangente senkrecht gezogene Gerade Normale und die Länge eines solchen Theiles einer beliebigen Normale, welcher zwischen ihrem Berührungspunkte und ihrem Durchschnittspunkte mit der durch den consecutiven Punkt gezogenen Normale enthalten ist, Krümmungshalbmesser der Curve genannt. Für den Kreis sind alle Krümmungshalbmesser von gleicher Länge, und zwar gleich dem Halbmesser desselben, was bei einer jeden andern Curve nicht der Fall ist. Die Curve, welche der Ort aller Durchschnittspunkte der Krümmungshalbmesser einer gegebenen Curve ist, wird Evolute der gegebenen Curve und letztere die Evolvente jener Curve genannt. —

Anmerk. Für ein gegebenes rechtwinkliges Coordinatensystem sei $z = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Curve, von welcher x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes sind, so ist

1. $y - y_1 = \left[\frac{df(x)}{dx} \right] (x - x_1)$ die Gleichung der Tangente,

2. $y - y_1 = - \left[\frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx} \right)} \right] (x - x_1)$ die Gleichung der Normale,

3. $R = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2}}{\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2} \right)}$ die Länge des Krümmungshalbmessers für einen gegebenen Berührungspunkt, dessen Coordinaten x_1 und y_1 sind.

§. 205.

Aufgabe 1. Es soll für einen auf der Kreislinie gegebenen Berührungspunkt eine Tangente an diese Linie gezogen werden.

Auflösung. (Fig. 137.) Zieht man durch diesen Berührungspunkt, welcher A_1 sein soll, einen Halbmesser CA_1 des gegebenen Kreises, und fällt von A_1 aus auf diesen Halbmesser eine Gerade A_1T_1 senkrecht, so ist letztere die gesuchte Tangente nach dem Lehrsatz der Geometrie: „Jede vom Endpunkte eines Halbmessers einer Kreislinie auf diese senkrecht gezogene Gerade ist eine Tangente dieser Kreislinie“; folglich ist A_1T_1 die durch den gegebenen Berührungspunkt A_1 gehende Tangente der Kreislinie.

§. 206.

Aufgabe 2. Parallel mit einer gegebenen Geraden an die gegebene Kreislinie eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 137.) Zieht man vom Mittelpunkte C des gegebenen Kreises aus auf die gegebene Gerade EF die Gerade CB senkrecht, so trifft diese die Kreislinie im Punkte A_1 , und dieser wird der Berührungspunkt derjenigen Tangente dieser Kreislinie sein, welche parallel ist mit EF . Zieht man daher A_2T_2 senkrecht auf CB , so erhält man nach dem im vorigen §. angeführten Lehrsatz eine Tangente der gegebenen Kreislinie, und da die Gerade EF und A_2T_2 auf einer derselben Geraden CB senkrecht stehen, so ist $A_2T_2 \perp EF$, und mithin A_2T_2 die gesuchte Tangente.

§. 207.

Aufgabe 3. Durch einen ausserhalb der Kreislinie angegebenen Punkt an diese Linie eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 138.) Ist M_1 der ausserhalb der Kreislinie A_1A_2 angegebene Punkt, durch welchen die Tangente an diese Linie gezogen werden soll, so sieht man vor Allem, dass zwei Gerade die Bedingung erfüllen, durch M_1 zu gehen und die Kreislinie zu tangiren. Zieht man nun vom gegebenen Punkte M_1 aus nach dem Mittelpunkte C die Gerade M_1C , und halbt letztere, welches durch den Punkt c geschieht, beschreibt ferner von c aus mit cM_1 oder cC eine Kreislinie, so wird von letzterer die gegebene Kreislinie in zwei Punkten geschnitten, nämlich in A_1 und A_2 , welche die Berührungspunkte der von A_1 aus an die Kreislinie gezogenen Tangenten sind. Zieht man daher die Geraden M_1A_1 und M_1A_2 , so werden diese die gesuchten Tangenten sein.

§. 208.

Bewegt sich ein Punkt nach dem Gesetze, dass die Summe seiner Entfernungen von zwei fixen Punkten unveränderlich und dieselbe bleibt, so entsteht eine krumme Linie, welche Ellipse genannt wird. Diese zwei fixen Punkte werden die Brennpunkte und die Entfernung des erzeugenden Punktes von einem der Brennpunkte Radius Vektor der Ellipse genannt. Zieht man durch diejenigen zwei Lagen des erzeugenden Punktes eine Gerade, welche durch die Brennpunkte geht, so erhält man die grosse Axe der Ellipse, die Verbindungslinie jener zwei Punkte der Ellipse aber, welche auf der grossen Axe senkrecht steht, und letztere halbt, wird kleine Axe der Ellipse, und der Durchschnittspunkt beider Axen der Mittelpunkt dieser Linie genannt. Verbindet man irgend zwei Stellungen des erzeugenden Punktes durch eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, so erhält man einen Durchmesser oder Diameter, zieht man aber durch einen der Brennpunkte eine Gerade auf die grosse Axe senkrecht, welche zwei Stellungen des erzeugenden Punktes verbindet, so erhält man einen Parameter der Ellipse. Derjenige Theil der grossen Axe, welcher zwischen dem Mittelpunkte und einem der Brennpunkte liegt, wird Excentricität genannt. Die Verbindungslinie zweier beliebiger Lagen des erzeugenden Punktes wird Sehne genannt.

§. 209.

Aufgabe 4. Aus der grossen Axe und den Brennpunkten einer Ellipse letztere zu konstruiren.

Auflösung. (Fig. 139.) Es sei F_1 der eine, F_2 der andere Brennpunkt und B_1B_2 die grosse Axe der Ellipse, so weis man, dass die Summe

der Entfernungen jedes Punktes der Ellipse von F_1 und F_2 unveränderlich sein muss; ferner ist $B_1 B_2$ gleich der Summe dieser Entfernungen; nimmt man daher eine beliebige Gerade $B_1 m_1$ an, zieht von F_1 aus mit $B_1 m_1$ einen Kreisbogen, zieht sodann von F_2 aus mit $B_2 m_2$ einen Kreisbogen, so durchschneidet letzterer den ersteren in einem Punkte a'_1 , welcher eine Lage des erzeugenden Punktes ist, denn es ist $a'_1 F_2 + a'_1 F_1 = B_1 B_2$. Wenn man also überhaupt einen beliebigen Theil der Axe $B_1 B_2$ von einem Endpunkte, z. B. von B_1 aus so annimmt, dass der übrige Theil dieser Axe grösser, als $B_2 F_2$ ist, sodann mit dem einen dieser Theile von einem der Brennpunkte F_1 aus einen Kreisbogen beschreibt, und vom andern Brennpunkte F_2 aus mit dem andern jener zwei Theile der grossen Axe einen Kreisbogen beschreibt, so erhält man im Durchschnittspunkte dieser beiden Kreisbögen einen Punkt, welcher eine Lage des erzeugenden Punktes der Ellipse ist. Dieses Verfahren hat man genugsam und zwar so oft zu wiederholen, bis man eine Anzahl von Lagen des erzeugenden Punktes erhält, aus deren stätigen Verbindung die Ellipse bestimmt und gezogen werden kann. — Vermittelst zweier solcher Theile der grossen Axe, z. B. $B_1 m_1$ und $m_1 B_2$ kann man jedesmal vier Lagen des erzeugenden Punktes erhalten; man wird nämlich sogleich die Punkte a_1 und a_2 erhalten, wenn man mit $B_1 m_1$ aus F_2 einen Kreisbogen beschreibt, und diesen durch einen anderen, der von F_1 aus mit $B_2 m_2$ beschrieben ist, durchschneidet. Beschreibt man aus F_1 und F_2 Kreisbögen, deren Halbmesser gleich der halben grossen Axe sind, und durchschneidet dieselben durch zwei aus F_2 und F_1 beschriebene Kreisbögen, deren Halbmesser auch einzeln gleich der halben grossen Axe der Ellipse sind, so erhält man die beiden Punkte A_1 und A_2 , durch welche die kleine Axe der Ellipse gehen muss. Die auf die hier beschriebene Weise konstruirte Ellipse ist $A_1 B_1 A_2 B_2$, in welcher $A_1 A_2$ die kleine Axe, $C F_2$ oder $C F_1$ die Excentricität, $D_1 D_2$ ein Durchmesser, $F_1 a_1$ ein Radius Vektor und $m_1 m_2$ ein Parameter ist. —

Anmerk. 1. Da die Punkte A_1 und A_2 erhalten wurden, indem man aus F_1 und F_2 Kreisbögen mit der Länge der halben grossen Axe beschrieben hat, so wird einer der Brennpunkte F_1 oder F_2 aus den Längen der beiden Axen erhalten, wenn man von dem Mittelpunkte der grossen Axe aus auf diese eine Senkrechte zieht, und auf letztere vom Mittelpunkte aus auf beiden Seiten die halbe kleine Axe trägt, sodann von den Endpunkten der letzteren aus mit einem Halbmesser, welcher gleich der halben grossen Axe ist, einen Kreisbogen beschreibt, so wird vom letzteren die grosse Axe in zwei Punkten getroffen, welche die gesuchten Brennpunkte der Ellipse sind.

Anmerk. 2. In Fig. 149. ist eine zweite Konstruktion einer Ellipse gezeigt. Ist nämlich jede der beiden Axen gegeben, so nehme man $B_1 B_2$ gleich der grossen Axe, halbiere dieselbe, wodurch man den Punkt C erhält, ziehe von C aus auf $B_1 B_2$ die Gerade CA_1 senkrecht, und mache $CA_1 = CA_2$ gleich der halben kleinen Axe. Beschreibt man nun aus C mit CA_1 eine Kreislinie und aus demselben Mittelpunkte — der schon Mittelpunkt der Ellipse ist — mit einem Halbmesser, welcher gleich CB_1 ist eine Kreislinie, theilt sodann die letztere in gleiche Theile, z. B. in 24 gleiche Theile, und zieht vom Mittelpunkte C aus nach den einzelnen Theilungspunkten a, b, c, d etc. etc. Gerade, so werden diese auch die erste Kreislinie in ebenso viele gleiche Theile theilen. Zieht man nun von den einzelnen Theilungspunkten m, n, p etc. etc. der kleineren Kreislinie Parallele zur grossen Axe $B_1 B_2$, sodann von den einzelnen Theilungspunkten a, b, c etc. etc. der grösseren Kreislinie parallele Gerade zur kleinen Axe, so werden diese letzteren von den durch die entsprechenden Theilpunkten gezogenen ersteren Parallelen in Punkten getroffen, welche der Ellipse angehören, von welcher $B_1 B_2$ und $A_1 A_2$ die Axen sind. So wird die durch m mit $B_1 B_2$ gezogenen Parallele ma_1 von der durch a mit $A_1 A_2$ gezogenen Parallelen in a_1 , die Parallele nb_1 von $b b_1$ in b_1 getroffen, und man erhält also die Punkte a_1, b_1 etc. etc., welche der Ellipse angehören.

Anmerk. 3. Bezeichnet a die halbe grosse Axe, b die halbe kleine Axe einer Ellipse, ist ferner x die Abscisse eines beliebigen und y die Ordinate desselben Punktes der Ellipse, so hat man als Gleichung der Ellipse für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das im Mittelpunkte der Ellipse seinen Anfang hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wodurch man für eine beliebige Abscisse die Ordinate des entsprechenden Punktes, und mithin diesen Punkt selbst leicht bestimmen kann.

S. 210.

Aufgabe 5. Es ist ein Punkt auf der Ellipse angegeben; man soll durch diesen an diese Linie eine Tangente ziehen.

Auflösung. (Fig. 140.) Es sei D ein auf der Ellipse angegebener Punkt, durch welchen eine Tangente an die Ellipse gezogen werden soll, so ziehe man von diesem Punkte aus nach den beiden Brennpunkten die Geraden $D F_1$ und $D F_2$, verlängere $D F_2$ nach d , und halbiere den Winkel $d D F_1$, so wird die Halbierungslinie, nämlich DM die für den Punkt D an die Ellipse zu ziehende Tangente sein.

Anmerk. Die im vorhergehenden benützte Konstruktion geht aus dem Satze hervor, dass die für einen beliebigen Punkt der Ellipse gezogene Normale den Winkel beider Radien Vektoren dieses Punktes halbt; zieht man daher $D G$ senkrecht auf

DM, so erhält man die Normale DG, welche den Winkel F_1DF_2 halbiert. Es ist mithin auch $\angle dDM = \angle MDF_1$, d. h. es muss auch die Tangente des Punktes D den $\angle dDF_1$ halbieren. —

§. 211.

Aufgabe 6. Von einem ausserhalb einer Ellipse angegebenen Punkte aus an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 141.) Ist T_2 der ausserhalb der Ellipse $A_1B_1A_2B_2$ angegebene Punkt, durch welchen an die Ellipse eine Tangente gezogen werden soll, so beschreibe man von T_2 aus mit einem Halbmesser, der gleich der Entfernung des Punktes T_2 von F_2 ist, einen Kreisbogen EF_2G , beschreibe sodann aus F_1 mit einem Halbmesser, der gleich der grossen Axe ist, einen Kreisbogen EG , ziehe von den Durchschnittspunkten dieser beiden Kreisbögen aus nach dem Brennpunkte F_1 gerade Linien, so werden die Punkte, in welchen diese Geraden die Ellipse schneiden, nämlich die Punkte D und H die Berührungspunkte der zwei Tangenten sein, die man von T_2 aus an die Ellipse ziehen kann. Zieht man daher die Geraden T_2H und T_2D , so werden diese die gesuchten Tangenten sein. —

§. 212.

Aufgabe 7. Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 142.) Ist AB eine Gerade, mit welcher eine Tangente parallel an die gegebene Ellipse gezogen werden soll, so ziehe man zwei Sehnen der Ellipse, welche parallel zur Geraden AB sind, man ziehe also $C_1D_1 \neq C_2D_2 \neq AB$, halbire dieselben, und verbinde ihre Halbierungspunkte durch die Gerade N_1N_2 , so trifft letztere die Ellipse in zwei Punkten M_1 und M_2 , welche die Berührungspunkte von den zwei Tangenten sind, die parallel zur Geraden AB an die Ellipse gezogen werden können. Zieht man daher $M_1E \neq M_2G \neq AB$, so erhält man die zwei Tangenten der Ellipse, die parallel zu AB sind. —

Anmerk. Halbirt man zwei Sehnen der Ellipse, so muss die Gerade, welche die Halbierungspunkte verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, und da also diese Gerade ein Durchmesser der Ellipse ist, so wird man durch Halbierung derselben den Mittelpunkt der Ellipse erhalten. Zieht man nun vom Mittelpunkte aus mit einem halben Durchmesser einen Kreisbogen, so erhält man im Durchschnitte dieses Kreisbogens mit der Ellipse zwei Punkte, deren Verbindungslinie eine auf der grossen Axe senkrechte Sehne ist, und die von der grossen Axe halbirt wird. Halbirt man daher diese Sehne, und zieht von ihrem Halbierungspunkte nach dem Mittelpunkte der Ellipse eine Gerade, verlängert letz-

tere, bis die Ellipse zweimal getroffen wird, so erhält man die grosse Axe der Ellipse. Durch den Mittelpunkt der letzteren auf die grosse Axe eine Senkrechte gezogen, gibt die kleine Axe, wodurch sodann auch die Brennpunkte der Ellipse bestimmt werden können. Hieraus ersieht man also, wie man in einer Ellipse die Axen und Brennpunkte bestimmen kann, wenn bloss die Curve gegeben ist. —

§. 213.

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene so fort, dass derselbe während seiner ganzen Bewegung von einer gegebenen Geraden und von einem ausserhalb der letzteren gegebenen Punkte gleiche Entfernung behält, so entsteht eine krumme nicht in sich zurückkehrende Linie, welche man Parabel nennt. Die Gerade, von welcher jede Lage des erzeugenden Punktes dieselbe Entfernung hat, als von einem gegebenen fixen Punkte, wird Leitlinie oder Direktrix, dieser Punkt aber der Brennpunkt der Parabel genannt. Zieht man vom Brennpunkte aus auf die Direktrix eine Senkrechte, so erhält man die Axe der Parabel; die Gerade, welche zwei beliebige Lagen des erzeugenden Punktes verbindet, wird Sehne genannt, geht diese Sehne durch den Brennpunkt und steht senkrecht auf der Axe der Parabel, so heisst dieselbe Parameter. Der Punkt, in welchem die Axe die Parabel trifft, wird Scheitel der Parabel genannt. Die Entfernung einer Lage des erzeugenden Punktes vom Brennpunkte wird Radius Vektor genannt.

§. 214.

Aufgabe 8. Es ist eine Gerade als Direktrix und ein Punkt als Brennpunkt einer Parabel gegeben; man soll die Parabel konstruiren.

Auflösung. (Fig. 143.) Nach der Erklärung von Parabel hat man alle Lagen eines Punktes aufzusuchen, die derselbe einnimmt, indem er von einem gegebenen Punkte und einer Geraden gleiche Entfernungen behält. Ist nun F der Brennpunkt und L_1L_2 die Direktrix der Parabel, und man zieht die Axe CFD der Parabel, und halbirt CF, so wird der Halbierungspunkt A_1 , weil derselbe von F und L_1L_2 gleiche Abstände hat, der Parabel angehören, und zwar ist dieser Punkt ihr Scheitel, so dass zwischen A und C kein Punkt derselben sich mehr befinden wird. Um nun eine beliebige Lage des erzeugenden Punktes zu erhalten, ziehe man aus einem ganz beliebigen Punkte der Axe eine Parallele mit L_1L_2 , z. B. a_1a_2 , beschreibe mit ihrer Entfernung von L_1L_2 , nämlich mit aC vom Brennpunkte F aus einen Kreisbogen, von welchem diese Gerade a_1a_2 zweimal geschnitten

wird, so werden diese Durchschnittspunkte zwei Lagen des erzeugenden Punktes sein, weil sie von der Direktrix $L_1 L_2$ ebenso weit entfernt sind, als vom Punkte F. Durch genügsame Wiederholung dieses Verfahrens kann man eine beliebige Anzahl von Lagen des erzeugenden Punktes erhalten, so dass man durch stätige Verbindung dieser auf einander folgenden Lagen die Parabel, so weit man auch will, bestimmen kann. Man wird also die Parallelen $b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2$ etc. etc. mit $L_1 L_2$ ziehen, vom Brennpunkte aus eine jede derselben in zwei Punkten durch einen Kreisbogen abschneiden, dessen Halbmesser gleich der Entfernung dieser Parallelen von der Direktrix ist. Man erhält auf diese Weise die Punkte $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ etc. etc., durch welche die Lage der Parabel völlig bestimmt ist, so dass man von letzterer den Theil $k_1 A k_2$ ziehen kann. —

§. 215.

Aufgabe 9. Es ist ein Parabel gegeben und auf derselben ein beliebiger Punkt; man soll durch letzteren an die Parabel eine Tangente ziehen.

Auflösung. (Fig. 143.) Ist B ein auf der Parabel gegebener Punkt, durch welchen eine Tangente derselben gezogen werden soll, so ziehe man vom Punkte B aus nach dem Brennpunkte F die Gerade BF, und von B aus auf die Direktrix $L_1 L_2$ die Senkrechte Bf, halbire den Winkel FBf, so wird die Halbirungslinie TB die gesuchte Tangente sein, welche mit der Parabel den Punkt B gemeinschaftlich hat.

§. 216.

Aufgabe 10. Von einem ausserhalb einer Parabel gegebenen Punkte aus an jene eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 144.) Hier hat man nur den Berührungspunkt der durch den Punkt M gehenden Tangente der Parabel anzugeben, welches dadurch geschieht, dass man von M aus als Mittelpunkt mit dem Halbmesser MF einen Kreisbogen zieht, und den Punkt f bezeichnet, wo letzterer die Direktrix trifft, so wird dieser der Endpunkt der vom gesuchten Berührungspunkte auf $L_1 L_2$ gezogenen Senkrechten sein. Zieht man daher fB senkrecht auf $L_1 L_2$, so wird die Parabel von fB im Punkte B getroffen, welcher der gesuchte Berührungspunkt von der aus M an die Parabel $k_1 A k_2$ zu ziehenden Tangente ist. Zieht man nun von B aus nach M die Gerade BM, so wird diese die gesuchte Tangente sein.

§. 217.

Aufgabe 11. Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 145.) Es sei $L_1 L_2$ die Direktrix, F der Brennpunkt der Parabel und $k_1 A k_2$ diese selbst, so ziehe man in der Parabel zwei Sehnen de und ab, die parallel mit der gegebenen Geraden CG sind, halbire jede derselben, was durch die Punkte n und c geschieht, und ziehe nun die Halbirungslinie cn, so wird diese die Parabel in einem Punkte Q treffen, welcher der Berührungspunkt der mit CG parallelen Tangente ist. Zieht man daher von Q aus eine Gerade QT, parallel CG, so wird diese Gerade die gesuchte Tangente sein. — Zieht man eine Sehne und halbirt dieselbe, zieht sodann durch den Halbirungspunkt eine Parallele mit BD, so trifft diese Parallele die Parabel im Punkte Q, welcher derselbe Brührungspunkt ist, und wodurch also wieder die Tangente wie vorhin bestimmt werden kann. —

Anmerk. 1. Ist p der Parameter einer Parabel, und man legt durch ihren Scheitel ein rechtwinkliges Coordinatensystem, für welches x die Abscisse eines beliebigen und y die Ordinate desselben Punktes bezeichnet, so ist

$$y^2 = px$$

die Gleichung der Parabel, aus welcher man für die gegebene Länge des Parameters und eine beliebige Abscisse die zugehörige Ordinate sowohl, als den Punkt selbst bestimmen kann.

Anmerk. 2. Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, dass wenn man die Tangente eines beliebigen Punktes der Parabel bis zur Axe verlängert, der erhaltene Durchschnittspunkt vom Scheitel der Parabel ebenso weit entfernt ist, als letztere von der Senkrechten, die man vom Berührungspunkte auf die Axe der Parabel zieht. Ist daher auf der Axe der Parabel ein Punkt angegeben, durch welchen an die Parabel eine Tangente gezogen werden soll, so trage man die Entfernung dieses Punktes vom Scheitel der Parabel auf die Axe derselben ziehe von dem hierdurch erhaltenen Endpunkte aus eine Senkrechte auf die Axe, so schneidet diese letztere die Parabel in zwei Punkten, welche die Berührungspunkte der Tangenten sind, die man von dem in der Axe angegebenen Punkte aus an die Parabel ziehen kann; jeden dieser Punkte wird man daher mit jenem gegebenen Punkte durch eine Gerade verbinden, so erhält man die zwei gesuchten Tangenten. In Fig. 144. sei m der gegebene Punkt, so mache man $nA = Am$, ziehe nB senkrecht auf CD, verbinde B mit m durch eine Gerade, so erhält man die Tangente der Parabel, welche durch m geht. —

Anmerk. 2. (Fig. 145.) Es ist wieder aus der analytischen Geometrie bekannt, dass wenn man durch den Berührungspunkt der Tangente einer Parabel einen Radius Vektor zieht, dieser gegen die Axe BD unter einem Winkel geneigt ist, welcher das doppelte desjenigen ist,

unter welchem die Tangente gegen diese Axe geneigt ist. Ist daher die Gerade CG gegeben, mit welcher eine Tangente der Parabel parallel gezogen werden soll, so ziehe man QF so, dass $\angle QFB$ das doppelte desjenigen ist, welchen CG mit der verlängerten DB macht, so wird man den Punkt Q erhalten, welcher der Berührungspunkt der mit CG parallel gezogenen Tangente der Parabel ist. Zieht man $QT_2 \neq CG$, so erhält man die gesuchte Tangente.

§. 218.

Bewegt sich ein Punkt so, dass der Unterschied seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten gleich einer bestimmten Geraden ist, so entsteht eine Curve, welche zwei ganz von einer getrennte Theile oder Aeste hat, und die man Hyperbel nennt. Die beiden gegebenen fixen Punkte, von welchen der Unterschied der Entfernungen von irgend einer Lage des erzeugenden Punktes unveränderlich ist, werden die Brennpunkte der Hyperbel genannt, dieser unveränderliche Unterschied der Entfernungen eines Punktes der Hyperbel von den Brennpunkten ist die reelle Axe jener Curve; jede Gerade, welche einen Punkt der Hyperbel mit einem ihrer Punkte verbindet, wird Radius Vektor genannt. Die Punkte, welche die Hyperbel mit der geraden Verbindungslinie ihrer beiden Brennpunkte gemein hat, werden die Scheitel derselben genannt. Jede Gerade, welche zwei beliebige Lagen des erzeugenden Punktes verbindet, nennt man Sehne der Hyperbel. —

§. 219.

Aufgabe 12. Es ist die reelle Axe einer Hyperbel gegeben, und ferner sind ihre Brennpunkte bekannt; man soll die Hyperbel konstruiren.

Auflösung. (Fig. 146.) Es sei $B_1 B_2$ die Axe, F_1 der eine, F_2 der andere Brennpunkt der Hyperbel, so verfähre man bei der Konstruktion derselben analog, wie bei der Zeichnung der im vorigen angegebenen Curven; indem man nämlich eine solche Anzahl von Lagen des erzeugenden Punktes angibt, dass man im Stande ist, durch stätige Verbindung derselben die Curve angeben zu können. Man verfährt nämlich auf folgende Weise: Aus F_1 beschreibt man mit einem Halbmesser, der gleich $B_1 m_1$ ist, einen Kreisbogen, und durchschneidet diesen mit einem aus F_2 beschriebenen, dessen Halbmesser $B_2 m_1$ ist, so erhält man die Punkte a_1 und a'_1 , für welche die Bedingung statt findet, dass

$$F_1 a_2 - F_2 a'_2 = F_1 a'_1 - F_2 a_1 = B_1 B_2 \text{ ist.}$$

Vermittelt derselben Graden $B_1 m_1$ und $B_2 m_1$ kann

man auch die Punkte a_1 und a'_1 bestimmen, wenn man vermittelt der ersteren aus F_2 und mit einem Halbmesser, der gleich der letzteren ist, aus F_1 einen Kreisbogen beschreibt, so werden die Durchschnittspunkte dieser beiden Kreisbögen jene zwei Punkte sein. Nun kann man auf dieselbe Weise das Verfahren fortsetzen, bis man eine gehörige Anzahl von Punkten erhält, durch welche man die Curve selbst ziehen kann. Man erhält hierdurch eine Curve, die aus zwei ganz von einander getrennten Theilen oder Aesten besteht, von welchen jeder symetrisch zur reellen Axe ist, d. h. die letztere theilt jeden Ast in zwei solche Theile, von welchem ein Punkt des ersten dieselbe Entfernung von dieser Axe hat, als ein Punkt des zweiten Theiles. Der Mittelpunkt der reellen Axe heisst Mittelpunkt der Hyperbel, und zieht man durch diesen eine Gerade senkrecht auf die reelle Axe, ferner parallel mit dieser mehrere Gerade, so schneidet jede dieser Parallelen die Hyperbel in zwei Punkte, die gleiche Entfernungen von der durch den Mittelpunkt auf die reelle Axe gezogenen Senkrechten haben. Hieraus ersieht man also, dass die Hyperbel zu ihrer reellen Axe sowohl, als auch zu der durch den Mittelpunkt auf diese Axe gezogenen Senkrechten symetrisch ist.

Anmerk. 1. Die Hyperbel hat in ihren Eigenschaften sehr Vieles mit der Ellipse gemein, und man kann letztere als eine in sich zurückkehrende Hyperbel erklären. Man spricht daher auch bei der Hyperbel von einer kleinen oder zweiten Axe, und da diese keine Punkte der Hyperbel mehr enthält, so nennt man dieselbe imaginäre oder eingebildete Axe. (Fig. 146.) Soll man die imaginäre Axe konstruiren, so ziehe man aus dem Mittelpunkte C der Hyperbel eine Gerade senkrecht auf die reelle Axe, und durchschneide diese mit einem Kreisbogen, den man aus B_2 oder B_1 mit einem Halbmesser beschreibt, welcher gleich $F_1 C$ oder $F_2 C$ ist; man erhält auf diese Weise die Punkte A_1 und A_2 auf dieser Senkrechten, und es ist $A_1 A_2$ die imaginäre Axe. — Zwei Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen, in dieser gleiche Winkel gegen die reelle oder gegen die imaginäre Axe machen, und den Zweigen der Hyperbel immer näher zu kommen suchen, ohne sie zu treffen, werden die Asymptoten der Hyperbel genannt. Man definiert dieselben auch als zwei Tangenten, die durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen, und ihre Berührungspunkte in unendlicher Entfernung haben. Die Asymptoten werden erhalten, indem man aus den Scheiteln zwei Gerade senkrecht auf die reelle Axe errichtet, diese von einer durch einen Endpunkt der imaginären Axe mit der reellen Axe gezogenen Parallelen durchschneidet, und die erhaltenen Durchschnittspunkte mit dem Mittelpunkte durch Gerade verbindet. —

Anmerk. 2. Bezeichnet a die halbe reelle und b die halbe imaginäre Axe, nimmt man ferner die erstere als Abscissenaxe und die letztere als Ordinatenaxe an, und bezeich-

net den Abstand einer beliebigen Lage des erzeugenden Punktes der Hyperbel von der Abscissenaxe durch x und von der Ordinatenaxe durch y so ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Hyperbel, aus welcher man vermittelt der Abscisse eines beliebigen Punktes seine Ordinate und den Punkt selbst bestimmen kann.

§. 220.

Aufgabe 12. Durch einen auf der Hyperbel angegebenen Punkt eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 146.) Soll durch den Punkt B an die Hyperbel eine Tangente gezogen werden, so ziehe man die Radien Vektoren dieses Punktes, nämlich BF_1 und BF_2 , halbire den Winkel F_1BF_2 der Radien Vektoren dieses Punktes, so wird die Halbierungslinie die gesuchte Tangente sein; es ist also BG die für den Punkt B gesuchte Tangente der Hyperbel.

§. 221.

Aufgabe 13. Durch einen ausserhalb der Hyperbel angegebenen Punkt an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 147.) Ist M ein ausserhalb der Hyperbel angegebener Punkt, so kann man durch denselben zwei Tangenten an diese Curve ziehen. Um nun eine derselben zu erhalten, beschreibe man von M aus mit einem Halbmesser, der gleich der Entfernung des Punktes M vom einen Brennpunkte F_1 ist, einen Kreisbogen, so wird dieser den ersteren schneiden. Zieht man von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte nach dem zweiten Brennpunkte die Gerade DF_2 , so schneidet diese die Hyperbel in einem Punkte B_1 , welcher der Berührungspunkt der von M an die Hyperbel zu legenden Tangente ist, so dass also durch die Gerade MB_1 die letztere bestimmt ist. —

§. 222.

Aufgabe 14. Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Hyperbel Tangenten zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 148.) Es sei FS_1G der eine, DB_2E der andere Zweig der Hyperbel, ferner sei L_1L_2 eine Gerade, mit welcher an die Hyperbel Tangenten gezogen werden sollen. Es sind deren zwei möglich, und um dieselben zu erhalten, ziehe man zwei unter sich parallele Sehnen DE und FG, halbire jede derselben, so wird der Mittelpunkt der ersteren in H, der der letz-

teren in K sein. Zieht man nun die Gerade HK, so wird diese die Hyperbel in den zwei Punkten B_2 und B_1 treffen, welche die Berührungspunkte der gesuchten zwei Tangenten sind, und legt man daher $B_1T_1 \neq B_2T_2 \neq L_1L_2$, so werden die Geraden B_1T_1 und B_2T_2 die gesuchten Tangenten sein.

Anmerk. In ihren Constructionen sowohl, als auch in den übrigen für diese drei Curven abgehandelten Aufgaben haben dieselben manche gemeinschaftliche Eigenschaften, und man kann dieselben auch durch eine einzige Gleichung analytisch ausdrücken. Ist nämlich ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben, in dessen Abscissenaxe ein Punkt liegt, von welchem die Abscisse x_1 gegeben ist, und es soll sich ein Punkt so bewegen, dass der Quotient seiner Entfernungen vom gegebenen Punkte und von der Abscissenaxe unveränderlich und gleich der gegebenen Grösse $\frac{m}{n}$ ist, so wird für diesen Punkt, wenn seine Coordinaten mit x und y bezeichnet werden, folgende Gleichung statt finden:

$$(n^2 - m^2)x^2 - 2n^2x_1x + n^2y^2 + n^2x_1^2 = 0$$

wodurch man eine beliebige Lage des erzeugenden Punktes, als auch die Curve, die er bei seiner Bewegung beschreibt, finden kann. Wird nun $n = m$, so erhalten wir die Parabel, wird $n > m$, so erhalten wir die Hyperbel, und bei $n < m$ erhalten wir die Ellipse. Man nennt diese drei Curven die Kegelschnittlinien, weil man die erstere erhält, wenn man einen senkrechten Kreiskegel durch eine Ebene schneidet, die parallel zur Seite des Kegels ist, die zweite, wenn man jenen Kegel durch eine Ebene schneidet, die mit der Basis des Kegels einen grössern Winkel bildet, als der ist, welchen seine Seite mit der Basis macht, und endlich die dritte, wenn man einen senkrechten Kreiskegel durch eine Ebene schneidet, welche mit der Basis des Kegels einen kleineren Winkel bildet, als der ist, den die Seite desselben mit seiner Basis macht. Jede dieser Curven werden wir später nochmals erwähnen. —

Zweites Kapitel.

Ueber Curven überhaupt.

§. 223.

Bewegt sich ein Punkt so, dass nicht alle Lagen desselben in einerlei Ebene liegen, so erhält man eine mehrfach gekrümmte Curve.

Ist nun eine solche Curve im Raume angegeben, und man nimmt auf derselben viele Lagen des erzeugenden Punktes neben einander an, so

wird hierdurch die Curve in sehr viele Theile oder Elemente getheilt, von welchen jedes solche Element als geradlinig betrachtet werden kann. Die Verlängerung eines solchen Elementes wird Tangente der Curve genannt. Da zwei auf einander folgende Elemente sich treffen, so wird diess auch mit zwei unmittelbar auf einander folgenden (konsekutiven) Tangenten der Fall sein, mithin liegen zwei konsekutive Tangenten in einer Ebene. Man nennt die Ebene zweier konsekutiven Tangenten Krümmungsebene (Oskulationsebene), und den Kreis, der in dieser Ebene sich befindet und durch die drei Endpunkte derjenigen zwei konsekutiven Elementen gelegt werden kann, deren Verlängerungen jene Tangenten sind, nennt man den Krümmungskreis der Curve für diese Elemente. Der Halbmesser dieses Kreises wird Krümmungshalbmesser der Curve genannt. — Der Winkel, welchen zwei konsekutive Tangenten bilden, wird Gontingenzwinkel der Curve für den Punkt genannt, welcher der Scheitel jenes Winkels ist, und dieser Winkel dient dazu, um die Krümmung einer Curve in einem beliebigen Punkte zu messen. Eine nicht in einer Ebene liegende Curve hat ausser den Krümmungen noch eine Windung, und diese wird gemessen durch den Winkel zweier auf einander folgenden Krümmungsebenen. Eine solche mehrfach gekrümmte Curve kann man ganz und gar in eine einzige Ebene legen, indem man nach und nach alle konsekutiven Krümmungsebenen derselben in eine einzige Ebene bringt. Auf die umgekehrte Weise kann man eine ebene Curve in eine mehrfach gekrümmte verwandeln. Legt man durch einen beliebigen Punkt einer Curve eine Tangente, so wird diese auch die einzige sein, welche man durch diesen Punkt für die Curve ziehen kann, und durch diesen Punkt auf jene Tangente eine senkrechte Ebene gelegt, so wird diese (§. 22.) der Ort aller Senkrechten sein, welche man auf die Tangente von jenem Punkte aus ziehen kann. Diese Ebene wird Normalebene der Curve genannt. —

§. 224.

Ist nun im Raume eine Curve gegeben, und man soll dieselbe projiciren, so theile man diese in gleiche oder ungleiche Elemente, projicire jedes dieser Elemente (nach §. 71.), so werden die Projektionen der einzelnen Lagen des erzeugenden Punktes auf den entsprechenden Projektionen der Elemente der Curve (§. 72.), folglich auch auf den entsprechenden Projektionen der Curve sich befinden. Soll z. B. die Curve horizontal projicirt

werden, so kann man sich den Umfang des Polygons, welches aus den Elementen der Curve gebildet wird, als Direktrix eines Prisma annehmen, dessen Erzeugende senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so wird die horizontale Spur dieses Prisma (§. 72.) die Projektionen aller auf seiner Oberfläche sich befindenden Punkte enthalten, folglich auch die horizontale Projektion der einzelnen Lagen des erzeugenden Punktes der Curve, und es ist mithin diese horizontale Spur auch nahezu gleich der horizontalen Projektion der Curve im Raume. Ebenso kann man sich den aus den Elementen der Curve gebildeten Polygonumfang als Direktrix eines zweiten Prisma denken, dessen Erzeugende senkrecht auf der vertikalen Tafel steht. Construiert man nun dieses Prisma, so wird seine vertikale Spur auch der Ort der vertikalen Projektion aller Elemente der Curve, und mithin auch der Ort der vertikalen Projektionen aller einzelnen Lagen des erzeugenden Punktes sein; daher ist also die vertikale Projektion der Curve auch in der vertikalen Projektion der Spur jenes Prisma. Hieraus folgt nun zunächst:

1. Ist ein Punkt auf einer Curve, also auf einer beliebigen Linie im Raume angegeben, so müssen seine Projektionen auch auf den entsprechenden Projektionen der Curve enthalten sein.
2. Die Projektionen einer Curve werden erhalten, wenn man dieselbe in ihre Elemente theilt, und das durch diese Elemente gebildete Polygon als Direktrix zweier Prismen betrachtet, von welchen die Generatrix des einen senkrecht auf der horizontalen, die des andern senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, von diesen beiden Prismen ihre Spuren sucht, so werden diese die Projektionen der im Raume gegebenen Curve sein.
3. Ist die horizontale Projektion sowohl, als auch die vertikale Projektion einer Curve angegeben, so kann man man sich die Curve im Raume vorstellen, indem man die horizontale Projektion der Curve als Direktrix eines Prisma annimmt, dessen Generatrix senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, sodann die gegebene vertikale Projektion der Curve als Direktrix eines zweiten Prisma an-

nimmt, dessen Generatrix senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, die Durchschnittscurve dieser beiden Prismen aufsucht, so wird diese Durchschnittslinie die Curve im Raume sein, deren Projektionen gegeben und die Direktrizen beider Prismen sind.

4. Ist eine, z. B. die horizontale Projektion eines auf der Curve sich befindenden Punktes gegeben, so erhält man seine vertikale Projektion, wenn man von der gegebenen horizontalen Projektion aus auf die Axe X eine Senkrechte zieht, und diese verlängert, bis die vertikale Projektion der Curve von ihr getroffen wird. Dieser Durchschnittspunkt wird die vertikale Projektion jenes Punktes sein, dessen horizontale Projektion gegeben ist, und der sich auf der gegebenen Curve befindet.

Anmerk. Soll man aus den Projektionen einer Curve ihre Spuren bestimmen, so muss, damit man diese Aufgabe lösen kann, jede der Projektionen bis zu ihren Durchschnitten mit der Axe X gegeben sein, ferner muss die vom Durchschnitte der vertikalen Projektion der Curve mit der Axe auf letztere in der horizontalen Tafel gezogene Senkrechte die horizontale Projektion der Curve und die vom Durchschnittspunkte dieser Projektion mit der Axe auf letztere in der vertikalen Tafel gezogene Senkrechte die vertikale Projektion der Curve noch treffen. Ist diess der Fall, so erhält man zugleich in den Durchschnitten dieser Senkrechten mit der entsprechenden Projektion der Curve die Spuren der letzteren. —

§. 225.

Aufgabe 15. Es sei die vertikale und die horizontale Projektion einer Curve gegeben; man soll ihre zweit-vertikale Projektion angeben.

Auflösung. Man nehme auf der einen, z. B. auf der horizontalen Projektion der Curve viele nahe an einander liegende Punkte an, so dass man jeden zwischen zweien dieser Punkte enthaltenen Theil der horizontalen Projektion der Curve als ein Element der letzteren betrachten kann, und bestimme (nach §. 224., 4.) die vertikalen Projektionen dieser einzelnen Punkte, indem man von ihren horizontalen Projektionen aus Senkrechte auf die Axe X zieht, und diese Senkrechten bis zu ihren Durchschnitten mit der vertikalen Projektion

der Curve verlängert, in welchen die vertikalen Projektionen jener Punkte sein werden. Von jedem dieser Punkte bestimme man die zweit-vertikale Projektion (nach §. 67.), verbinde diese einzelnen zweit-vertikalen Projektionen durch Gerade in gehöriger Ordnung, so erhält man eine Linie, die der zweit-vertikalen Projektion der Curve sehr nahe kömmt, und daher als die letztere betrachtet werden kann. —

Beispiel. (Fig. 150.) Es sei $abcd$ die horizontale und $a'b'c'd'$ die vertikale Projektion einer Curve, von welcher die zweit-vertikale Projektion bestimmt werden soll, so nehme man die Punkte (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') an, so werden diese (nach §. 224., 1.) die Projektionen von Punkten sein, die sich auf der Curve selbst befinden. Zieht man nun die Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$ senkrecht auf Z, sodann die Geraden am , bn , cp , dq senkrecht auf Y, beschreibt aus O mit den Halbmessern Om , On , Op und Oq Kreisbögen, so werden die Durchschnittspunkte der letzteren mit der in der vertikalen Tafel liegenden Axe Y, die Punkte m_1 , n_1 , p_1 und q_1 geben, von welchen man auf die Axe Y die Senkrechten m_1a'' , n_1b'' , p_1c'' und q_1d'' errichten muss, um die zweit-vertikalen Projektionen der angegebenen Punkte (a'', a'') , (b'', b'') etc. etc. zu erhalten, und es werden sodann die Durchschnittspunkte jener Senkrechten mit den auf Z senkrecht gezogenen Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$ die Punkte a'' , b'' , c'' und d'' geben, welche (§. 67.) die zweit-vertikalen Projektionen jener Punkte sein werden, deren horizontale und vertikale Projektion die angegebenen sind. Zieht man nun die Geraden $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, so erhält man die Linie $a''b''c''d''$, welche der zweit-vertikalen Projektion der durch ihre vertikale und horizontale Projektion angegebenen Curve sehr nahe kömmt, und daher auch als solche betrachtet werden kann. —

§. 226.

Aufgabe 16. Die eine Projektion einer ebenen Curve ist gegeben und die Ebene dieser Curve, man soll die andern Projektionen dieser Curve bestimmen.

Auflösung. Ist z. B. die horizontale Projektion der Curve gegeben, so theile man dieselbe in Elemente, bestimme die vertikalen und zweit-vertikalen Projektionen derjenigen Geraden, deren horizontale Projektion diese Elemente sind (nach §. 107. und §. 108.) so werden die Linien, die aus den vertikalen und zweit-vertikalen Projektionen

dieser Geraden zusammengesetzt sind, sich von der vertikalen und zweit-vertikalen Projektion der gesuchten Curve um sehr wenig unterscheiden, und es können mithin die gesuchten Projektionen, die aus sehr kleinen Geraden zusammengesetzt sind, als die Projektionen der Curve betrachtet werden. —

Beispiel. (Fig. 151.) Es sei ESE' eine Ebene, in welcher sich eine Curve befindet, deren horizontale Projektion die Linie $abcde$ ist, man soll die vertikale Projektion dieser Curve angeben. Zieht man die Geraden aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 etc. etc. parallel mit X , von den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit E , nämlich von den Punkten a_1, b_1, c_1 etc. etc. aus ziehe man auf X die Geraden $a_1a'_1, b_1b'_1, c_1c'_1$ etc. etc. senkrecht, sodann durch die Punkte a'_1, b'_1, c'_1 etc. etc. mit E' ziehe man die Parallelen a'_1a', b'_1b', c'_1c' etc. etc., so werden diese einzeln von den durch a, b, c etc. etc. auf X gezogenen Senkrechten in den Punkten a', b', c' etc. etc. durchschnitten, welche (§. 107.) die vertikalen Projektionen jener Punkte sind, deren horizontale Projektionen a, b, c, d etc. etc. angegeben waren. Verbindet man nun die Punkte a', b', c' etc. etc. in gehöriger Ordnung, so erhält man die gesuchte vertikale Projektion $a'b'c'$ etc. etc. der Curve. —

§. 227.

Aufgabe 17. Es ist eine ebene Curve durch ihre Projektionen angegeben und eine Ebene durch ihre Spuren; man soll untersuchen, ob diese Ebene von jener Linie getroffen wird, und diese Durchschnittspunkte angeben.

Auflösung. Da die gegebene Curve eine ebene sein soll, und durch drei Punkte (§. 9.) die Lage einer Ebene völlig bestimmt ist, so wird eine Ebene, die man durch drei beliebig auf der gegebenen Curve angenommene Punkte legen kann, die Ebene dieser Linie sein. Bestimmt man nun den Durchschnitt der letzteren mit der gegebenen Ebene, so werden in diesem Durchschnitt auch die Punkte enthalten sein müssen, welche die gegebene Curve mit der angegebenen Ebene gemeinschaftlich hat. Schneidet daher der Durchschnitt der Hülfebene und der gegebenen Ebene die angegebene Curve, so trifft auch letztere die gegebene Ebene, und jene Punkte, nach welchen die Curve von jenem Durchschnitte getroffen werden, sind auch die Durchschnittspunkte der Curve mit der angegebenen Ebene; wird aber die Curve von dem Durchschnitte der gegebenen und der Hülfebene nicht mehr getroffen, so schneidet auch

die Curve die gegebene Ebene nicht. Um daher für den Fall, in welchem die gegebene Ebene von der Curve getroffen wird, jenen Durchschnitt zu finden, wird man auf folgende Weise verfahren:

1. Nehme man (§. 225., 4.) die Projektionen dreier Punkte auf der Curve an.
2. Lege man durch diese drei Punkte (§. 105.) eine Ebene, und suche die Spuren derselben.
3. Gebe man den Durchschnitt dieser Ebene und der gegebenen (nach §. 110.) an, so werden die Projektionen dieser Communsektion die entsprechenden Projektionen der Curve schneiden, und hierdurch erhält man die Projektionen derjenigen Punkte, welche die gesuchten Durchschnitte der Curve und der gegebenen Ebene sind.

Anmerk. 1. Hat man die Projektionen einer Curve, deren Konstruktion bekannt ist, z. B. die Projektionen eines Kreises, so lege man die Hülfebene um eine ihrer Spuren in die entsprechende Tafel, und konstruiere in dieser (§. 130.) den Kreis sowohl, als auch den Durchschnitt beider Ebenen, so erhält man sogleich die gesuchten Punkte, nach welchen die Curve die gegebene Ebene trifft. Von diesen Punkten wird man sodann (§. 132.) die Projektionen bestimmen.

Anmerk. 2. Ist eine Curve durch ihre Projektionen gegeben, und man soll vorher untersuchen, ob dieselbe eben oder mehrfach gekrümmt ist; so nehme man auf derselben (nach §. 224., 4.) drei beliebige Punkte durch ihre Projektionen an, lege durch diese drei Punkte (nach §. 105.) eine Ebene: fällt nun die Curve ihrer ganzen Ausdehnung nach in diese Ebene, so ist sie auch eben, ist diess aber nicht der Fall, so ist dieselbe mehrfach gekrümmt. —

§. 228.

Beispiel. (Fig. 152.) Es sei $a'b'c'd'e'$ die vertikale und $abcde$ die horizontale Projektion einer Kreislinie, (m, m') seien die Projektionen ihres Mittelpunktes; man soll die Durchschnittspunkte dieser Kreislinie durch die Ebene ESE' angeben. Es wurde hier die Ebene HNV zuerst angenommen, diese um ihre horizontale Spur H gedreht, und in die horizontale Tafel gelegt, und in dieser umgelegten Ebene der Kreis $ABCDEFG$ konstruiert, sodann die Ebene HNV wieder um H gedreht, und in ihre erste Lage gebracht und jede der Projektionen des Kreises bestimmt. Um nun den Durchschnitt des letzteren mit der Ebene ESE' anzugeben, bestimme man den Durchschnitt der Ebene HNV mit der Ebene ESE' , indem man s'_2s_2 und $s_1s'_1$ senkrecht auf X , die Geraden s_1s_2 und

$s'_1 s'_2$ zieht, so wird erstere die horizontale und letztere die vertikale Projektion der gesuchten Communsektion sein. Zieht man nun $s_2 p$ senkrecht auf H , konstruiert das rechtwinklige Dreieck $s_2 p q$, und macht $p s_3 = p q$, so wird s_3 der Ort des Punktes (s_2, s'_2) in der umgelegten Ebene HNV sein. Zieht man nun $s_1 s_3$, so ist diese (§. 130. und §. 131.) die Gerade, deren Projektionen $s'_1, s'_2, s_1 s_2$ sind, und die sich auf der Ebene HNV befindet. Diese Gerade schneidet aber die Kreislinie $ABCDE$ in den Punkten x_1 und y_1 ; bestimmt man daher die Projektionen derselben (nach §. 132.), so wer-

den die Punkte (x, x') und (y, y') die gesuchten sein, und die Gerade ($xy, x'y'$) wird den Durchschnitt der Ebene $ES'E$ mit dem Kreise ($abcdefg, a'b'c'd'e'f'g'$) angeben. —

Anmerk. Da man die Eigenschaften und Konstruktionen doppelt gekrümmter Curven leichter durch die Eigenschaften jener Flächen, auf welchen sie sich befinden oder deren Durchschnitte sie sind, angeben kann, als wenn man jene Flächen unberücksichtigt lässt, so soll die Konstruktion einiger doppelt gekrümmter und einiger ebener Curven noch später folgen.

Da die Fixirung eines Punktes in einer Fläche nach einer Linie sein kann, so wird man nach der Beschaffenheit der Fixirung die Fläche zugleich einteilen können. Alle Flächen, deren Fixirung durch eine Gerade wird, werden geradlinig erzeugt, alle Flächen hingegen, die von krummen Linien erzeugt werden, werden krummlinig erzeugt.

Flächen, die von zwei auf einander folgenden Linien der Fixirung liegen, sind ein Theil der Fläche, den man Element der Fläche oder Flächenelement nennt. Auf dem Flächenelemente einer Fläche kann man einen solchen kleinen Theil annehmen, der eben ist, und die Veranänderung eines solchen ebenen Theiles eine Flächenelemente wird Tangentialebene der Fläche genannt. Einen beliebigen auf dem ebenen Theile eines Flächenelementes angenommenen Punkt nennt man den Berührungspunkt der Tangentialebene. Wir werden später Flächen tangentiallebenen, bei welchen jedes Flächenelement eben ist oder in einer Ebene liegt. — Liegt man nun durch den Berührungspunkt eine beliebige Ebene, so schneidet diese die Tangentialebene nach einer Geraden, welche als Tangente einer durch denselben Punkt gehenden, und auf der Fläche liegenden Curve, die der Durchschnitt einer beliebigen Ebene und der Fläche ist, betrachtet werden kann. Eben so wird auch der Durchschnitt einer Ebene durch den Berührungspunkt gelegten Ebene als Tangente einer Curve betrachtet werden können, die sich auf der Ebene und Fläche zugleich befindet; es enthält also die Tangentialebene einer solchen alle Tangenten der durch

Bewegt sich irgend eine Linie nach einem bestimmten Gesetze, und beobachtet man während ihrer Bewegung noch ein anderes angegebener Gesetz, so entsteht ein Raum, den man im Allgemeinen mit dem Namen Fläche bezeichnet. Die Linie, welche die Fläche erzeugt, wird ihre Erzeugende oder Generatrix genannt, und es ist mithin eine Fläche der geometrische Ort aller Lagen ihrer Generatrix. Zur Erzeugung einer Fläche ist man, wie schon erwähnt, die Angabe eines Gesetzes notwendig, welches die Bewegung der Generatrix leitet, und außerdem ist noch ein zweites Gesetz anzugeben notwendig, welches angibt, ob und wie die Generatrix bei ihrer Bewegung ihre Lagen zu ändern hat. Das erste Gesetz ist immer durch eine oder mehrere Relationen oder durch eine oder mehrere Flächen gegeben, an welchen sich die Generatrix fortzubewegen hat, oder welche die letzteren stets in allen ihren Lagen trifft, und das letztere ist auch entweder durch eine geometrische Größe oder durch eine sonstige Bedingung bestimmt. Man nennt das Gesetz, das die Linie (Fläche), welche die Bewegung der Generatrix bei der Erzeugung der Fläche leitet, die Directorix (Richtungsline oder Richtungslinie) der Fläche, und bezeichnet die Lagen, die die Generatrix annimmt, als Lagen der Fläche. Aus den im vorigen Paragraphen gegebenen Erklärungen geht sogleich hervor, wie man eine Fläche darstellen kann. Es ist nämlich zur Bestimmung einer Fläche ihre Generatrix sowohl, als auch ihre Directorix notwendig; wenn wir daher die Projectionen der letzteren sowohl, als auch eine beliebige Anzahl von Lagen der er-

§. 230.

Zweite Abtheilung.

Erzeugung der entwickelbaren Flächen. Tangirung und Durchschnitte derselben durch Ebenen und Entwicklung derselben.

Drittes Kapitel.

Von der Erzeugung der entwickelbaren Flächen.

§. 229.

Bewegt sich irgend eine Linie nach einem bestimmten Gesetze, und beobachtet während ihrer Bewegung noch ein anderes angegebenes Gesetz, so entsteht ein Raum, den man im Allgemeinen mit dem Namen Fläche bezeichnet. Die Linie, welche die Fläche erzeugt, wird ihre Erzeugende oder Generatrix genannt, und es ist mithin eine Fläche der geometrische Ort aller Lagen ihrer Generatrix. Zur Erzeugung einer Fläche ist nun, wie schon erwähnt, die Angabe eines Gesetzes nothwendig, welches die Bewegung der Generatrix leitet, und ausserdem ist noch ein zweites Gesetz anzugeben nothwendig, welches angibt, ob und wie die Generatrix bei ihrer Bewegung ihre Lagen zu ändern hat. Das erste Gesetz ist immer durch eine oder mehrere Linien oder durch eine oder mehrere Flächen gegeben, an welcher sich die Generatrix fortzubewegen hat, oder welche die letzteren stets in allen ihren Lagen trifft, und das letztere ist auch entweder durch eine geometrische Grösse oder durch eine sonstige Bedingung bestimmt. Man nennt das Gesetz, also die Linie (Fläche), welche die Bewegung der Generatrix bei der Erzeugung der Fläche leitet, die Direktrix (Richtungslinie oder Richtungsfläche) der Fläche.

§. 230.

Aus den im vorigen Paragraphen gegebenen Erklärungen geht sogleich hervor, wie man eine Fläche darstellen kann. Es ist nämlich zur Bestimmung einer Fläche ihre Generatrix sowohl, als auch ihre Direktrix nothwendig; wenn wir daher die Projektionen der letzteren sowohl, als auch eine beliebige Anzahl von Lagen der er-

sternen durch ihre Projektionen angeben, so wird die Fläche selbst leicht vorzustellen sein. Um daher eine Fläche darzustellen, geben wir eine solche Anzahl von Lagen ihrer Generatrix an, als wir zur Grösse der Ausdehnung der Fläche nothwendig haben, und bestimmen zugleich die Direktrix und diejenigen einzelnen Punkte derselben, in welchen sie von der Generatrix getroffen wird.

§. 231.

Da die Erzeugende irgend einer Fläche noch eine jede Linie sein kann, so wird man nach der Beschaffenheit der Erzeugenden die Flächen sogleich eintheilen können. Alle Flächen, deren Erzeugende Gerade sind, werden geradlinig erzeugte, alle Fläche hingegen, die von krummen Linien erzeugt werden, werden krummlinig erzeugte Flächen genannt. Zwischen je zwei auf einander folgenden Lagen der Erzeugenden liegt ein Theil der Fläche, den man Element der Fläche oder Flächenelement nennt. Auf dem Flächenelemente einer jeden Fläche kann man einen solchen kleinen Theil annehmen, der eben ist, und die Verlängerung eines solchen ebenen Theiles eines Flächenelementes wird Tangentialebene der Fläche genannt. Einen beliebigen auf dem ebenen Theile eines Flächenelementes angenommenen Punkt nennt man den Berührungspunkt der Tangentialebene. Wir werden später Flächen kennen lernen, bei welchen jedes Flächenelement eben ist oder in einer Ebene liegt. — Legt man nun durch den Berührungspunkt eine beliebige Ebene, so schneidet diese die Tangentialebene nach einer Geraden, welche als Tangente einer durch denselben Punkt gehenden, und auf der Fläche liegenden Curve, die der Durchschnitt einer beliebigen Ebene und der Fläche ist, betrachtet werden kann. Eben so wird aber auch der Durchschnitt einer jeden durch den Berührungspunkt gelegten Ebene als Tangente einer Curve betrachtet werden können, die sich auf der Ebene und Fläche zugleich befindet; es enthält also die Tangentialebene einer solchen alle Tangenten der durch

den Berührungspunkt gehenden Curven, die sich auf der Fläche befinden.

§. 232.

Nehmen wir eine ganz beliebige Curve, die doppelt gekrümmt sein soll, an, theilen diese in Elemente, und verlängern jedes Element derselben, so erhalten wir ebenso viele Tangenten, als wir Elemente haben, und von welchen je zwei auf einander folgende in einer Ebene liegen, weil sie sich schneiden. Legen wir nun durch je zwei auf einander folgende Tangenten eine Ebene, so können wir den geometrischen Ort aller dieser Tangenten als eine Fläche betrachten, von welchen jene einzelne Ebenen die Flächenelemente sind. Diese Fläche können wir daher auch dadurch erzeugt denken, dass sich an jener doppelt gekrümmten Linie eine Gerade stets tangierend fortbewegt, und es ist mithin die hier erzeugte Fläche eine geradlinig erzeugte. Dieselbe hat aber auch noch besondere Eigenschaften, die nur einer bestimmten Gruppe der geradlinig erzeugten Flächen zukommen, und diese Eigenschaften zu erörtern sei unsere weitere Aufgabe. Jedes Flächenelement ist vor Allem eben, und da auch jedes von zwei auf einander folgenden Tangenten gebildet wird, so werden zwei auf einander folgende Flächenelemente eine solche Tangente gemeinschaftlich haben. Dreht man nun das erste Flächenelement um seine Communsektion mit dem nächstfolgenden, bis es in die Ebene des letzteren fällt, so ist dadurch an dem ersten Flächenelemente nichts geändert worden, als seine Lage und eben dasselbe ist mit dem ersten Elemente der Direktrix geschehen. Ebenso kann man die Ebene, in welcher die ersten zwei auf einander folgenden Elemente liegen um die Communsektion des zweiten und dritten Elementes drehen, bis die drei ersten unmittelbar auf einander folgenden Flächenelemente in die Ebene des dritten zu liegen kommen, und es wird hierdurch von jedem dieser beiden ersten Elemente bloss die Lage verändert. Setzt man dieses Verfahren auf die hier angezeigte Weise fort, indem man die ersten drei konsekutiven Elemente in die Ebene des vierten, sodann die ersten vier in die Ebene des fünften bringt, eic. etc., so kann man sich die ganze Fläche in einer Ebene ausbreiten, ohne dass sich ein Element derselben ändert. Diese Fläche wird der hier entwickelten Eigenschaft halber, vermittelst welcher sie sich auf einer Ebene ausbreiten lässt, ohne dass sich weder die Ausdehnungen ihrer einzelnen Elemente ändern, noch die Elemente ir-

gend einer auf derselben befindlichen Linie sich ändern, oder ohne dass sich die Fläche faltet, entwickelbare Fläche genannt.

§. 233.

Man ersieht aus dem, was im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, dass die Fläche, welche dort erklärt wurde die besondere Eigenschaft hat, dass je zwei konsekutive Lagen ihrer Generatrix in einer und derselben Ebene liegen, und deshalb war es auch möglich, dieselbe auf einer Ebene auszubreiten, ohne dass ein Element derselben oder ein Element einer auf ihr sich befindenden Linie eine andere Ausdehnung erhielt; ferner ist ersichtlich, dass jedes Flächenelement dieser Fläche eben ist. Nehmen wir nun diese Eigenschaften zusammen, so können wir folgende Sätze ableiten:

1. Soll eine Fläche entwickelbar sein, so müssen je zwei auf einander folgende Lagen derselben in einer Ebene liegen, oder dieselbe muss lauter ebene Flächenelemente haben. Wenn also eine Fläche zu den entwickelbaren gehören soll, so muss von derselben nachgewiesen werden können, dass sie die hier ausgesprochene Bedingung erfüllt.
2. Jede Tangentialebene einer entwickelbaren Fläche hat mit letzterer nicht bloss einen Berührungspunkt, sondern ein ganzes Flächenelement gemein. Da aber ein Flächenelement mit einer seiner Generatricen, zwischen welchen es liegt, vertauscht werden kann, so kann man auch sagen: eine Tangentialebene einer entwickelbaren Fläche hat mit letzterer die durch den Berührungspunkt gehende Generatrix gemeinschaftlich.

Anmerk. Wir werden später zeigen, dass manche entwickelbare Flächen es gibt, deren Generatrix man zur Direktrix und deren Direktrix man zur Generatrix machen und dadurch dieselbe Fläche erzeugen, oder dass man Generatricen mit Direktricen vertauschen kann. Hierdurch wird sodann auch gezeigt sein, dass es krummlinig erzeugte Flächen gibt, die abwickelbar sind.

§. 234.

Nimmt man eine beliebige Curve als Direktrix an, und lässt eine Gerade als Generatrix stätig und zwar so fortbewegen, dass dieselbe in allen ihren Lagen parallel zu ihrer ersten Lage bleibt, so wird der geometrische Ort, welchen die

Generatrix nach diesen Gesetzen erzeugt, eine entwickelbare Fläche sein, weil (nach 1. des vor. §.) zur Entwickelbarkeit einer Fläche bloss nothwendig ist, dass je zwei konsekutive Lagen ihrer Erzeugenden in einer Ebene liegen. Die hier erzeugte Fläche ist der Cylinder. Begrenzt man einen Cylinder durch zwei parallele Ebenen, und betrachtet bloss diesen begrenzten Theil desselben, so werden die Durchschnitte der zwei parallelen Ebenen mit dem Cylinder seine Grundflächen und die einzelnen Lagen seiner Erzeugenden die Seiten desselben genannt. Stehen die einzelnen Seiten eines Cylinders senkrecht auf den Ebenen seiner Grundfläche, so wird derselbe ein senkrechter, machen seine einzelnen Seiten spitze oder stumpfe Winkel mit den Ebenen der Grundflächen, so wird der Cylinder ein schiefer genannt. Diejenige Gerade, welche senkrecht auf den Ebenen beider Grundflächen steht, wird Höhe des Cylinders genannt. Bei einem senkrechten Cylinder ist daher jede Seite gleich der Höhe. — Der zwischen beiden Grundflächen enthaltene Theil der Fläche wird Mantel oder Aussenfläche des Cylinders genannt.

§. 235.

Aus dem vorigen §. ersehen wir, dass eine cylindrische Fläche schon dargestellt werden kann, wenn nur die Projektionen ihrer Direktrix und die von der Richtung der Generatrix bekannt sind. Legt man nun parallel zur Generatrix (nach §. 51.) eine Ebene, so wird von dieser die Cylinderfläche nach einer Linie geschnitten, die zu den ebenen Curven gehört. Diese Ebene wird aber erhalten, wenn man durch einen beliebigen Punkt eine Gerade parallel zur Richtung der Generatrix legt, und durch diese sodann die Ebene zieht; folglich enthält diese Ebene auch parallele Gerade zur Generatrix, und wenn man mithin durch einen beliebigen Punkt der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Cylinderfläche eine Parallele zur Generatrix zieht, so muss diese ganz und gar in die Tangentialebene fallen. Es ist also der Durchschnitt einer Cylinderfläche mit einer Ebene, die parallel ist zur Richtung der Generatrix, eine Lage oder zwei Lagen der geradlinigen Erzeugenden.

§. 236.

Legt man eine Ebene parallel zur Direktrix und ist diese eine in sich zurückkehrende Curve, und beschreibt man in dem erhaltenen Durchschnitte sowohl, als auch in der Direktrix ein Polygon ein, so

dass diese beiden Polygone gleich viele Seiten haben, so wird (§. 162.) das in der Direktrix eingeschriebene Polygon als Direktrix eines Prisma betrachtet werden können, dessen Generatrix mit der des Cylinders gleiche Richtung hat, und mithin ist das zweite Polygon, als Durchschnitt eines Prisma mit einer zu seiner Direktrix parallelen Ebene (nach §. 163.) kongruent dem ersten. Da man aber durch fortgesetzte Theilung jener beiden Linien endlich auf solche Polygone kommen kann, dass ihre Seiten mit den Elementen jener beiden Linien einerlei sind, und auch noch in diesem Falle beide Polygone kongruent sein müssen; so wird der Durchschnitt einer Cylinderfläche durch eine Ebene, welche parallel zur Direktrix ist, mit letzterer kongruent sein, und es sind also auch allgemein: die Durchschnitte einer Cylinderfläche durch parallele Ebenen unter sich kongruent.

§. 237.

Es sei wieder eine Curve als Direktrix, und ausserdem noch ein Punkt gegeben; an jener Direktrix bewegt sich nun eine unbegrenzte Gerade, und trifft bei ihrer Bewegung stets dieselbe, geht aber zugleich immer durch den angegebenen Punkt, so entsteht hierdurch eine Fläche, welche alle Lagen dieser geradlinigen Generatrix enthält. Auf dieser Fläche liegen aber wieder, wie bei der vorigen je zwei Lagen der Generatrix in einer Ebene, weil alle Generatricen durch einen und denselben Punkt gehen, und daher sind auch zwei konsekutive Lagen derselben in einer Ebene. Die hierdurch erzeugte Fläche ist also eine entwickelbare, und zwar eine konische Fläche oder die Oberfläche eines Kegels. Der angegebene Punkt, welchen alle Lagen der Erzeugenden enthalten müssen, wird das Centrum des Conus, und die auf beiden Seiten dieses Punktes liegenden Theile des Conus, seine Fächer genannt.

Ist der Conus durch eine Ebene begrenzt, und man betrachtet bloss den zwischen dieser Ebene und dem Centrum enthaltenen Theil derselben, so wird sein Durchschnitt mit jener Ebene seine Grundfläche, ferner werden die zwischen dem Scheitel und dieser Grundfläche liegenden Theile der einzelnen Lagen der Erzeugenden seine Seiten genannt. Liegt die Ebene der Grundfläche so, dass alle Seiten des Kegels gleich lang sind, so wird der Kegel ein gleichseitiger genannt, und seine Grundfläche ist mithin in diesem Falle ein

Kreis. Die vom Centrum eines Kegels auf die Ebene seiner Grundfläche gezogene Senkrechte wird Höhe desselben genannt. Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt, und ist der Fuss der Senkrechten dieser letztere, so wird der Kegel ein senkrechter genannt. — Die Fläche, welche den körperlichen Raum des Conus einhüllt, wird der Mantel oder die Aussenfläche desselben genannt.

§. 238.

Es ist aus dem vor. §. leicht zu ersehen, dass zur Darstellung einer konischen Fläche bloss die Projektionen der Direktrix und des Centrums notwendig sind. Nimmt man sodann (nach §. 224.) eine beliebige Anzahl von Punkten an, und zieht durch jeden der letzteren (nach §. 72.) Gerade, die auch das Centrum enthalten, so erhält man ebenso viele Lagen der Erzeugenden der Fläche, als in wie viele Theile die Direktrix getheilt wurde, wodurch also (§. 230.) die konische Fläche dargestellt ist. Ist übrigens das Centrum durch seine Projektionen und ausserdem noch eine beliebige Curve gegeben, die sich auf der konischen Fläche befindet, durch ihre Projektionen gegeben, so kann man diese als Direktrix des Conus betrachten, und auf dieselbe Weise die konische Fläche projiciren, wie diess oben angegeben wurde.

Anmerk. Dasselbe gilt auch vom Cylinder, man kann nämlich jede auf seiner Fläche liegende Curve als Direktrix desselben betrachten.

§. 239.

Legt man durch das Centrum des Conus eine beliebige Ebene, welche die Direktrix oder auch nur irgend eine andere auf der Fläche liegende Curve trifft, und man zieht von einem der Punkte aus, in welchem letztere getroffen wird, eine Gerade durch den Scheitel des Kegels, so wird dieselbe eine Lage seiner Erzeugenden sein. Diese Gerade muss aber (nach §. 4.) ganz und gar in der Durchschnittsebene liegen, und mithin hat die letztere mit der konischen Fläche eine Lage der Erzeugenden gemein. Diese Ebene schneidet aber die Direktrix in zwei Punkten, wenn letztere eine ebene Curve ist, und in mehr als zwei Punkten, wenn dieselbe eine doppelt gekrümmte Curve ist; folglich erhält man den Satz:

Eine konische Fläche wird von einer Ebene, die durch das Centrum des Conus geht, nach einzelnen Lagen seiner Erzeugenden geschnitten.

Anmerk. Um bei einer konischen Fläche die Durchschnittserzeugenden einer durch ihren Scheitel gehenden Ebene und der Fläche angeben zu können, bestimme man

(nach §. 227.) die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit einer auf der konischen Fläche liegenden ebenen Curve, ziehe durch diese Durchschnittspunkte und durch das Centrum Gerade, so werden diese die gesuchten Durchschnitte sein. Ein analoges Verfahren wird man befolgen, um den Durchschnitt einer Cylinderfläche mit einer Ebene zu bestimmen, die parallel zu einer ihrer Erzeugenden ist, und auf gleiche Weise wird man für eine jede von diesen Flächen die Erzeugende finden, nach welcher dieselbe von einer angegebenen Tangentialebene berührt wird.

§. 240.

Ist die Direktrix eines Conus eine geschlossene (in sich zurückkehrende) Curve, so wird die konische Fläche ebenfalls eine geschlossene, in sich zurückkehrende sein. Legt man nun parallel zur Direktrix eines Conus eine Ebene, theilt die erhaltene Durchschnittscurve in eine solche Anzahl von Theilen, dass jeder Theil einer Geraden sehr nahe kommt, so erhält man ein Polygon von ebenso vielen Seiten, als in wie viele Theile jene Durchschnittscurve getheilt wurde. Zieht man nun durch jeden der Theilungspunkte eine Erzeugende des Conus, so wird hierdurch die Direktrix in ebenso viele Theile getheilt, und man erhält mithin auch auf dieser — wenn man jeden dieser Theile als Element der Curve betrachtet — ein Polygon von ebenso vielen Seiten. Dieses Polygon kann aber (§. 176.) als Direktrix einer Pyramide betrachtet werden, deren Centrum mit dem der konischen Fläche zusammenfällt, und es ist mithin das erste Polygon (nach §. 178.) dem letzteren ähnlich. Setzt man nun statt dieses letzteren Polygons wieder die Direktrix und statt des ersteren die Durchschnittslinie der konischen Fläche mit der zur Direktrix parallel gelegten Ebene, so findet man, dass diese beide Curven ähnlich sind. Da aber dasselbe von den Durchschnitten beliebig vieler unter sich paralleler Ebenen gezeigt werden kann, so erhält man den Satz:

Schneidet man eine konische in sich zurückkehrende Fläche durch Ebenen, welche unter sich parallel sind, so müssen auch die erhaltenen Durchschnitte unter sich ähnliche Curven sein.

Anmerk. 1. Derselbe Satz gilt übrigens auch für eine nicht in sich zurückkehrende konische Fläche, indem auch zwei nicht in sich zurückkehrende Curven ähnlich sein können. —

Anmerk. 2. Denkt man sich das Centrum des Conus in unendlicher Entfernung von seiner Direktrix, so werden seine einzelnen Erzeugenden unter sich parallel werden, und daher die konische Fläche in eine cylinderische übergehen. Es werden daher auch, weil die Cylinderfläche als

spezieller Fall der konischen angenommen werden kann. für erstere alle jene Sätze gelten, welche für letztere gezeigt wurden.

§. 241.

Aufgabe 19. Es sei die Direktrix eines Cylinders sowohl, als auch die Richtung seiner Generatrix gegeben; man soll die horizontale Spur dieses Cylinders angeben.

Auflösung. Nimmt man (§. 224.) auf der Direktrix eine genügende Anzahl von Punkten an durch ihre Projektionen, zieht sodann durch jeden dieser Punkte Parallele zur Generatrix (§. 76.), so erhält man auch so viele Lagen der Erzeugenden des Cylinders, als wie viele Punkte auf der Direktrix angenommen wurden, und hierdurch wird man sich also die Cylinderfläche vorstellen können. Bestimmt man nun von jeder dieser Erzeugenden ihre horizontale Spur, zieht durch diese einzelnen horizontalen Spuren eine stätige Curve, so wird diese die gesuchte horizontale Spur des Cylinders sein. Auf gleiche Weise kann man verfahren, wenn man die vertikale Spur desselben angeben will. —

Anmerk. Ist die horizontale Projektion eines auf der Cylinderfläche befindlichen Punktes bekannt, und man soll seine vertikale Projektion bestimmen, so ziehe man durch diese horizontale Projektion eine Gerade parallel zur horizontalen Projektion der Richtung der Generatrix, so wird man die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix erhalten, die den gegebenen Punkt enthält. Verlängert man nun dieselbe bis zu ihrem Durchschnitte mit der horizontalen Projektion der Direktrix des Cylinders, und sucht von diesem Durchschnittspunkte die zugehörige vertikale Projektion (nach §. 224.), zieht durch letzteren eine Gerade parallel zur vertikalen Projektion der Richtung der Generatrix, so wird diese Parallele die vertikale Projektion der durch den aufzusuchenden Punkt gehenden Lage der Generatrix des Cylinders sein. Bestimmt man auf dieser vertikalen Projektion (nach §. 72.) die vertikale Projektion des Punktes, dessen horizontale angegeben ist, so erhält man die gesuchte.

§. 242.

Beispiel zur vor. Aufgabe. (Fig. 153.) Es sei $abcde$ die horizontale, $a'c'$ die vertikale Projektion eines Kreises, der als Direktrix eines Cylinders dienen soll, G sei die horizontale und G' die vertikale Projektion der Generatrix des letzteren, man soll die Spuren dieses Cylinders bestimmen. Man ziehe durch die Punkte a, b, c, d, e Parallele zur horizontalen Projektion G der Generatrix, so erhält man die horizontale Projektion $abedMN$ des Cylinders, sodann ziehe man durch a', b', c' etc.

etc. Parallele zur vertikalen Projektion G' der Generatrix, und es wird sodann die vertikale Projektion $a'b'M_1P_1$ des Cylinders erhalten. Bestimmt man nun die horizontalen Spuren der durch die Punkte $(a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d')$ etc. etc. gezogenen Lagen der Generatrix, so werden dieselben durch die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 etc. etc. erhalten, und diese letzteren durch eine stätige Curve verbunden, so wird die horizontale Spur $A_1B_1C_1D_1E_1$ des Cylinders erhalten. Auf gleiche Weise erhält man die vertikale Spur $A_2B_2C_2D_2E_2$ desselben, wenn man die vertikalen Spuren einzelner Lagen seiner Generatrix bestimmt.

§. 243.

Aufgabe 20. Es ist die Direktrix eines Kegels gegeben und sein Centrum, beide durch ihre Projektionen, man soll den Kegel projiciren und seine Spuren bestimmen.

Auflösung. Nimmt man eine solche Anzahl von Punkten auf der Direktrix des Kegels durch ihre Projektionen an (nach §. 224.), dass durch dieselben die Direktrix in Elemente getheilt wird, und zieht durch diese einzelnen Punkte (§. 72.) Gerade, die durch das Centrum des Kegels gehen, so erhält man die Projektionen des Kegels. Um nun seine horizontale Spur anzugeben, bestimme man von jeder Lage der gezogenen Erzeugenden desselben seine horizontale Spur, verbinde die horizontalen Spuren der einzelnen Lagen der Generatrix durch eine stätige Curve, so erhält man die horizontale Spur des Conus. Ebenso kann man die vertikale Spur desselben bestimmen, wenn man von allen jenen einzelnen Lagen der Generatrix ihre vertikalen Spuren angibt, diese durch eine stätige Curve in gehöriger Ordnung verbindet, so wird diese Curve die vertikale Spur des Kegels sein. —

Sollte noch ein Punkt auf der Kegelfläche angegeben werden, dessen horizontale Projektion angegeben ist, so weis man, dass die Erzeugende des Kegels nach und nach durch alle Punkte seiner Oberfläche gehen wird, daher wird auch der aufzusuchende Punkt auf einer Lage der Erzeugenden enthalten sein, oder es muss die Erzeugende auch einmal durch den anzugebenden Punkt gehen. Zieht man also durch die horizontale Projektion des Punktes, der angegeben werden soll, eine Gerade durch die horizontale Projektion des Centrums, so wird diese die horizontale Projektion jener Lage der Generatrix des Kegels sein, die den zu bestimmenden Punkt enthält, und der Punkt, in welchem diese horizontale Projektion der durch den anzugebenden Punkt gehenden Lage der Generatrix die horizontale

Projektion der Direktrix trifft, gibt die horizontale Projektion des Punktes, in welchem die Direktrix von der erwähnten Lage der Generatrix getroffen wird. Bestimmt nun auch die vertikale Projektion dieses letzteren Durchschnittspunktes (nach §. 224.), und zieht durch diese eine Gerade nach der vertikalen Projektion des Centrums des Kegels, so erhält man die vertikale Projektion der vorhin erwähnten Lage der Generatrix, und auf dieser (nach §. 73.) die vertikale Projektion des Punktes bestimmt, dessen horizontale Projektion angegeben war, so wird mithin derselbe bestimmt sein. —

Anmerk. In Fig. 154. ist $abcde$ die horizontale Projektion und $a'c'$ die vertikale Projektion der Direktrix eines Conus, S, S' sind die Projektionen seines Scheitels, ferner ist $abcdeMN$ die horizontale und $a'b'c'd'e'M_1N_1$ die vertikale Projektion desselben und endlich $A_1B_1C_1D_1E_1$ seine horizontale und $A_2B_2G_2D_2E_2$ seine vertikale Spur. In m ist die horizontale Projektion eines auf dieser Kegel- fläche liegenden Punktes, mn ist die horizontale und mit- $lin\ Sn'$ die vertikale Projektion derjenigen Lage der Ge- neratrix, welche diesen Punkt enthält. —

§. 244.

Um nun noch eine weitere entwickelbare Fläche angeben zu können, nämlich die entwickelbare Schraubenfläche, ist es vor Allem nothwendig, einige Sätze über die Entwicklung des Cylinders anzugeben. Es sei ein Cylinder gegeben, und dieser habe eine ebene Curve als Direktrix, deren Ebene senkrecht auf der Richtung der Generatrix des Cylinders ist. Theilt man nun die Direktrix in eine solche Anzahl von Theilen, dass diese einzelnen als ihre Elemente betrachtet werden können und denkt sich nun durch alle einzelnen Theilungspunkte der Direktrix Parallele zur Generatrix gezogen, so wird jeder zwischen zwei Lagen der Erzeugenden liegender Theil der Cylinderfläche als ebenes Element betrachtet werden können. Legt man nun das erste Flächenelement in die verlängerte Ebene des zweiten, indem man seine Ebene um die Communsektion derselben mit der des con- sekutiven Elementes dreht, so wird das erste Ele- ment der Direktrix auch in die Verlängerung ihres zweiten Elementes zu liegen kommen, und daher senkrecht auf der Richtung der Generatrix bleiben. Dreht man nun die Ebene des ersten und zweiten Flächenelementes um die dritte Lage der Genera- trix, bis dieselbe in die verlängerte Ebene des dritten Flächenelementes zu liegen kommt, so wird auch die Gerade, welche das erste und zweite Ele- ment der Direktrix enthält, in die Verlängerung des dritten Elementes der Direktrix zu liegen kom- men, so dass also nunmehr die drei ersten Ele- mente in einer Geraden liegen, die senkrecht

auf der Richtung der Generatrix des Cylinders steht. Dreht man nun auch die Ebene der drei er- sten Elemente, bis dieselbe in die Verlängerung der Ebene des vierten Flächenelementes zu liegen kömmt, so wissen wir (aus §. 25.), dass die drei ersten Elemente der Direktrix in eine Gerade zu liegen kommen, welche die Verlängerung des vier- ten Elementes derselben ist. Da man nun auf diese Weise die ganze Fläche in einer Ebene aus- breiten kann, und dabei aber die Direktrix in eine Gerade sich verwandelt, die senkrecht auf der Richtung der Generatrix ist und ihre vorige Länge beibehält, so kann man die Sätze aussprechen:

1. Entwickelt man einen Cylinder, so wird jeder auf seiner Generatrix senkrecht stehende Schnitt sich in eine Gerade verwandeln, die gleich dem Umfange jenes Schnittes ist, und auf der Richtung der Generatrix senk- recht steht.
2. Die Theile der einzelnen Lagen der Erzeugenden, welche zwischen dem senkrechten Schnitte und einer belie- big gegen die Richtung der Genera- trix geneigten Ebene liegen, ändern ihre Längen nicht, wenn der Cylinder entwickelt wird, sondern sind nach der Entwicklung ebensolang, als die- selben vor der Entwicklung waren.

§. 245.

Nimmt man irgend einen Punkt auf einem Cylin- der von beliebiger Direktrix an, und denkt sich durch diesen eine Tangentialebene an den Cylinder gelegt, so wird jene mit letzterem (nach §. 233.) die durch den Punkt gehende Lage der Erzeugenden des Cylinders gemeinschaftlich haben. Denkt man sich nun durch den angenommenen Be- rührungspunkt eine Gerade gezogen, welche in der Tangentialebene liegt, und mit der Berührungserzeugenden einen angegebenen bestimmten Winkel bildet, lässt sodann die Tangentialebene stets den Cylinder tangirend fortbewegen, ohne dass die in der Tangentialebene angenommene Gerade aber ihre Lage ändert, so dass diese Gerade in allen einzelnen Lagen der Erzeugenden des Cylinders gleiche Winkel bildet, so be- schreibt der veränderliche Berührungs- punkt jener Tangentialebene auf der cy- lindrischen Fläche eine Curve, welche doppelt gekrümmt ist, und Schrauben- linie genannt wird. Die in der beweglichen

Tangentialebene durch den Berührungspunkt gezogene Gerade, welche in allen Lagen der beweglichen Tangentialebene mit der Erzeugenden des Cylinders gleichen Winkel bildet, ist aber (§. 231.) Tangente der Schraubenlinie, und man ersieht also hieraus, dass alle Tangenten der Schraubenlinie mit der Erzeugenden des Cylinders unter sich gleichen Winkel bilden. Nun ist aber (§. 204.) die Tangente einer Curve für einen beliebigen Punkt derselben die Verlängerung des durch diesen Punkt gezogenen Elementes der Curve, folglich bilden alle Elemente der Schraubenlinie mit der Erzeugenden des Cylinders gleichen Winkel. Denkt man sich nun den Cylinder durch eine auf seiner Erzeugenden senkrecht stehende Ebene abgeschnitten, und den zwischen dieser Ebene und der Schraubenlinie enthaltenen Theil desselben entwickelt, so werden auch nach der Entwicklung die einzelnen Elemente der Schraubenlinie mit den durch ihre Endpunkte gehenden Lagen der Erzeugenden des Cylinders dieselben Winkel bilden, welche sie vorher mit denselben machten. Nach der Entwicklung verwandelt sich aber die Schraubenlinie jedenfalls in eine ebene Curve, und da von letzterer die Elemente mit einer und denselben Geraden gleichen Winkel bilden müssen, so muss sich die Schraubenlinie bei der Entwicklung des Cylinders auf welchem sie sich befindet, in eine Gerade verwandeln, welche mit der Erzeugenden des Cylinders einen bestimmten Winkel bildet. Nun wurde aber ferner von keinem Elemente dieser Schraubenlinie bei der Entwicklung derselben seine Länge geändert, folglich wird die mit dem Cylinder entwickelte Schraubenlinie dieselbe Länge haben, welche sie als doppelt gekrümmte Curve hat.

Denken wir uns nun auf demselben Cylinder eine andere Curve gezogen, die mit der Schraubenlinie zwei Punkte gemeinschaftlich haben soll, so wird bei der Entwicklung des Cylinders auch diese Linie entwickelt, und nach der Entwicklung der zwischen den beiden angenommenen Punkten enthaltene Theil derselben von der ursprünglichen Länge sein. Da aber von dieser Curve nicht angenommen ist, dass ihre einzelnen Elemente mit der Erzeugenden des Cylinders gleichen Winkel bilden, so wird sie sich auch nach der Entwicklung in keine Gerade verwandeln, und daher ist der entwickelte Theil derselben, welcher zwischen den zwei Punkten enthalten ist, die sie mit der Schraubenlinie gemeinschaftlich hat grösser, als der zwischen

denselben zwei Punkten liegende Theil der Schraubenlinie.

§. 246.

Betrachten wir nun nochmals die Schraubenlinie auf dem Cylinder, so wissen wir, dass sie durch den Berührungspunkt einer an dem Cylinder tangierend sich fortbewegenden Ebene erzeugt wird. Da nun jene Tangentialebene öfters in ihre erste Lage wieder kommen kann, wenn der Cylinder geschlossen ist, oder eine in sich zurückkehrende Curve als Directrix hat, also auch mehrmal dieselbe Berührungserzeugende haben kann, so wird der Berührungspunkt auch bei seiner Bewegung öfters auf dieselbe Erzeugende des Cylinders kommen können, und daher kann die Schraubenlinie eine und dieselbe Erzeugende mehrmals schneiden. Man nennt den Theil der Schraubenlinie, welcher zwischen einem solchen Durchschnittspunkte derselben mit der ersten Erzeugenden und ihrem nächstfolgenden liegt, einen Schraubengang, und den Theil dieser Erzeugenden (auf welcher der Anfangspunkt der Schraubenlinie liegt), welcher zwischen zwei auf einander folgenden Durchschnittspunkten derselben mit der Schraubenlinie enthalten ist, die Höhe eines Schraubenganges.

§. 247.

Endlich wollen wir noch eine Eigenschaft der Schraubenlinie ableiten, welche für ihre Construction nothwendig sein wird. Wir wissen nämlich, dass die Schraubenlinie im entwickelten Zustande dieselben Eigenschaften hat, die eine Gerade besitzt. Denken wir uns daher von ihrem Anfangspunkte aus auf die Erzeugende ihres Cylinders eine senkrechte Ebene gelegt, diesen Durchschnitt sodann in eine beliebige Anzahl von gleichen Theilen getheilt, und durch die einzelnen Theilungspunkte einzelne Lagen der Erzeugenden gezogen, so wird durch diese letzteren auch die Schraubenlinie in ebenso viele gleiche Theile getheilt worden sein, als wie viele Theilpunkte der senkrechte Schnitt hat. Entwickeln wir nun den Cylinder, so wird der senkrechte Schnitt (§. 244.) in eine Gerade sich verwandeln, die auf der Erzeugenden des Cylinders senkrecht steht, die Schraubenlinie aber (§. 241.) in eine Gerade übergehen, welche mit diesem entwickelten Schnitt den Complementswinkel desjenigen Winkels bildet, welchen ihre Tangente mit der Erzeugenden macht, und jeder Theil der einzelnen Lagen der Erzeugenden, welcher im

senkrechten Schnitte des Cylinders anfängt, und in der Schraubenlinie endigt, ist Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypothense derjenige Theil der entwickelbaren Schraubenlinie ist, welcher zwischen ihrem Anfangspunkte und dem Endpunkte dieser Kathete liegt; dessen andere Kathete aber derjenige Theil des entwickelten senkrechten Schnittes ist, welcher zwischen dem Anfangspunkte der Schraubenlinie und dieser Kathete enthalten ist. Man ersieht also hieraus, dass für ein gegebenes Element des senkrechten Schnittes und dem Winkel, den die Tangente der Schraubenlinie mit der Erzeugenden des Cylinders macht, der entsprechende Punkt der Schraubenlinie bestimmt werden kann.

Ist also der senkrechte Schnitt in eine beliebige Anzahl von gleichen Theilen getheilt, so wird hierdurch der Schraubengang in ebenso viele gleiche Theile getheilt, wenn man sich durch die einzelnen Theilpunkte des senkrechten Schnittes Erzeugende des Cylinders gezogen denkt. (Fig. 155.)

Es sei nun $abcd$ die horizontale Spur eines auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Cylinders, MN sei die Höhe des Schraubenganges und AC sei gleich der Länge der Kreislinie $abcd$. Macht man $\angle BCA = 90^\circ$, und $BC = MN$, so wird AB die Länge eines Schraubenganges sein. Hat man nun die Linie $AC = abcd$ dadurch erhalten, dass man $abcd$ in 24 gleiche Theile theilte, und $Aa_1 = a_1$, $Aa_2 = a_2$ etc. etc. machte, so werden die auf AC senkrecht gezogenen Geraden a_1m_1 , a_2m_2 , a_3m_3 etc. etc., auch AB in ebenso viele gleiche Theile getheilt. Da aber $m_1a_1 : a_1A = m_2a_2 : a_2A = \text{etc. etc.} = BC : AC$ ist,

$$\text{so ist } m_1a_1 = \frac{1}{24} BC, m_2a_2 = \frac{2}{24} BC, m_3a_3$$

$$= \frac{3}{24} BC \text{ etc. etc.}, \text{ und es folgt also hieraus, dass}$$

die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. auch erhalten werden können, indem man BC in ebenso viele gleiche Theile theilt, als in wie viele AC getheilt wurde, und durch die Theilpunkte b_1, b_2 , etc. etc. die Geraden b_1m_1 , b_2m_2 etc. etc. parallel zu AC zieht, so werden die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc., in welchen die von a_1, a_2, a_3 etc. etc. aus AC senkrecht gezogenen Geraden a_1m_1 , a_2m_2 , a_3m_3 etc. etc. jene Parallelen treffen, die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. der Schraubenlinie geben.

§. 248.

Aus den im vorigen §. entwickelten Sätzen folgt die Konstruktion eines beliebigen Theiles der

Schraubenlinie. Nachdem man nämlich die horizontale Tafel in die Ebene des senkrechten Schnittes gelegt, und die einzelnen Lagen der Generatrix mithin senkrecht auf dieser Tafel stehen, verfähre man auf folgende Weise:

1. Theile man den Umfang des senkrechten Schnittes in eine solche Anzahl von gleichen Theilen, dass jeder Theil nahezu als eine Gerade betrachtet werden kann.

2. Lege man, wenn jener senkrechte Schnitt eine geschlossene Curve, also die Höhe des Schraubenganges bekannt ist, diese Theile derselben senkrecht auf X , und theile die Höhe des Schraubenganges in ebenso viele gleiche Theile, als in wie viele man vorher den senkrechten Schnitt getheilt hat.

3. Nun ziehe man durch die einzelnen Theilpunkte des senkrechten Schnittes Parallele zur Erzeugenden, und durch die einzelnen Theilpunkte der Höhe des Schraubenganges Parallele zur Axe X , so werden die vertikalen Projektionen jener Lagen der Erzeugenden von den durch die entsprechenden Theilungspunkte der Höhe gehenden Parallelen in Punkten getroffen, welche der vertikalen Projektion der Schraubenlinie angehören, und wodurch letztere bestimmt werden kann.

4. Die horizontale Projektion der Schraubenlinie fällt mit dem senkrechten Schnitte selbst zusammen, weil die Erzeugende, auf deren einzelnen Lagen die Punkte der Schraubenlinie sich befinden senkrecht auf dieser Tafel stehen, und mithin ist die Schraubenlinie ganz und gar bestimmt, (Fig. 155.)

Ist also der senkrechte Schnitt eine Kreislinie $abcd$, die in der horizontalen Tafel liegt, und in 24 gleiche Theile getheilt ist, ist ferner MN die Höhe des Schraubenganges und a der Anfangspunkt der Schraubenlinie, so theile man auch MN in ebenso viele gleiche Theile, ziehe durch den ersten Theilungspunkt von $abcd$, nämlich von I aus die Gerade Il' senkrecht auf X , und durchschneide diese von der durch den ersten Theilungspunkt der Geraden MN mit X gezogenen Parallelen $11'$, so wird $1'$ ein Punkt der vertikalen Projektion der Schraubenlinie sein. Auf dieselbe Weise erhält man die Punkte $2', 3', 4'$ etc. etc., durch deren stätige Verbindung die vertikale Projektion $a'1'2'P'N'$ des ersten Ganges der

der Schraubenlinie erhalten werden kann. Durch Fortsetzung und Wiederholung dieses Verfahrens kann man auch noch mehr Schraubengänge $N'_1 P'_2 N'_1$ etc. etc. erhalten.

Zur Entwicklung der Schraubenlinie, z. B. eines Ganges derselben wird es hinreichen, dass wir $Aa_1 = a_1a_2 = a_2a_3$ etc. etc. $= aI$ machen, so dass AC gleich der Länge von Abcd wird; so dann $BC = MN$ machen und $Cb_1 = b_1b_2 = b_2b_3 = M1 = 12$ etc. etc. gleich $\frac{1}{24} MN$ auftragen.

Wenn wir nun $b_2m_2 \neq b_1m_1 \neq b_3m_3$ etc. etc. $\neq AC$ und $a_1m_1 \neq a_2m_2 \neq a_3m_3$ etc. etc. $\neq BC$ ziehen, so erhalten wir die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc., die der Schraubenlinie angehören. Zieht man also AB, so müssen sich auf dieser jene Punkte (§. 245.) befinden werden, Am_1, m_1m_2, m_2m_3 etc. etc. ihre einzelnen Elemente sein, und $\angle ABC = \angle Am_1a_1$ ist der Winkel, welchen eine Tangente für einen beliebigen der Punkte m_1, m_2 etc. etc. mit der Richtung der Erzeugenden macht. —

Anmerk. 1. Im entwickelten Zustande der Schraubenlinie hat dieselbe mit einer Geraden alle Eigenschaften gemein, und sie ist daher auch auf dem Cylinder das, was die Gerade in der Ebene ist — für alle diese Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. hat man

$$\frac{Aa_1}{m_1a_1} = \frac{Aa_2}{m_2a_2} = \frac{Aa_3}{m_3a_3} = \text{etc. etc.} = \frac{AC}{BC} = \tan \angle \alpha = k$$

Zieht man daher AZ senkrecht auf AV, und bezeichnet die Entfernung eines beliebigen der Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. von AZ durch v, die Entfernung desselben Punktes von AV durch z, so findet für einen beliebigen Punkt der Schraubenlinie die Bedingung statt:

$$z = kv$$

worin k eine unveränderliche, konstante Grösse ist, und durch $\angle \alpha$ bestimmt werden kann, v aber eine krummlinige Abscisse ist, die, wenn die einzelnen Elemente des senkrechten Schnittes durch m bezeichnet werden, nach und nach die Werthe m, 2m, 3m etc. etc. annehmen muss, damit man einen zugehörigen Werth für Z, also auch einen beliebigen Punkt der Schraubenlinie angeben kann.

Anmerk. 2. Wäre der senkrechte Schnitt des Cylinders keine geschlossene Curve, so kann auch im Allgemeinen die Höhe des Schraubenganges nicht angegeben sein. Um nun in diesem Falle die vertikale Projektion der Schraubenlinie zu erhalten, lege man an einem beliebigen Punkte A der Axe X den Complementwinkel des $\angle \alpha$, mache $An_1 = n_1n_2 = \text{etc. etc.} = aI$, ziehe $n_1p_1 \neq n_2p_2$ etc. etc. $\neq a'e'$, so erhält man im Durchschnitte der mit X durch p_1, p_2 etc. etc. gezogenen Parallele p_11', p_22' etc. etc. die Punkte 1', 2' etc. etc. welche der vertikalen Projektion der Schraubenlinie angehören.

§. 249.

Nun wollen wir zur besseren Uebersicht die in den letzten Paragraphen entwickelten Eigenschaften zusammenfassen. Diese werden folgende sein:

1. Die durch beliebige Punkte der Schraubenlinie an diese gezogenen Tangenten bilden mit der Erzeugenden des Cylinders gleiche Winkel.
2. Bei der Entwicklung des Cylinders, auf dessen Oberfläche sich die Schraubenlinie befindet, verwandelt sich diese in eine Gerade.
3. Unter allen zwischen irgend zwei Punkten der Cylinderfläche sich befindlichen Theile von Curven ist derjenige Theil der kürzeste, welcher der Schraubenlinie angehört; folglich ist die von einem Punkte einer Cylinderfläche zu einem andern gezogene Schraubenlinie die kürzeste Entfernung dieser beiden Punkte auf der Fläche.
4. Für irgend einen Punkt der Schraubenlinie findet für den Theil der Erzeugenden, welcher zwischen diesem Punkte und der senkrechten Schnittebene liegt, und dem entsprechenden Theile dieses Schnittes, welcher zwischen dem Anfangspunkte der Schraubenlinie und dem Endpunkte jener Erzeugenden sich befindet ein konstantes Verhältniss statt, welches durch den Contingenzwinkel der Schraubenlinie bestimmt ist. —

§. 250.

Soll nun für einen beliebigen Punkt der Schraubenlinie an diese eine Tangente gezogen werden, so denke man sich durch diesen Punkt an die Cylinderfläche eine Tangentialebene gezogen, in dieser durch den Berührungspunkt eine Lage der Erzeugenden des Cylinders gelegt, und an letztere durch den Berührungspunkt eine Gerade unter dem gegebenen Contingenzwinkel angelegt, so wird letztere die gesuchte Tangente sein. Um aber die Projektion der letzteren zu bestimmen, lege man vor Allem die horizontale Tafel wieder durch die Ebene des Schnittes, so wird jede Tangentialebene dieses Cylinders, weil sie (§. 255.) mit letzterem eine Lage der Erzeugenden gemeinschaftlich hat, und diese senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, (nach §. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel sein,

und daher ihre horizontale Spur die horizontale Projektion der Tangente der Schraubenlinie sein. Legen wir daher durch die horizontale Projektion des gegebenen Berührungspunktes eine Tangente an den senkrechten Schnitt, so wird diese die horizontale Projektion der gesuchten Tangente sein. Denken wir uns den Cylinder entwickelt, so wird sich auf die horizontale Projektion irgend einer solchen Tangente der senkrechte Schnitt abwickeln und die horizontale Spur einer solchen Tangente wird mithin der Anfangspunkt der Schraubenlinie; der zwischen dem Berührungspunkte und der horizontalen Spur liegende Theil der Tangente wird die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes sein, dessen eine Kathete mit der horizontalen Projektion der Tangente zusammenfällt, und gleich sein wird dem Theile des senkrechten Schnittes, welcher zwischen dem Anfangspunkte der Schraubenlinie und dem gegebenen Berührungspunkte liegt. Tragen wir daher von der horizontalen Projektion des gegebenen Berührungspunktes auf die horizontale Projektion der gesuchten Tangente denjenigen Theil des senkrechten Schnittes, welcher zwischen dem Berührungspunkte der letzteren und dem Anfangspunkte der Schraubenlinie liegt, so erhält man die horizontale Spur der gesuchten Tangente. Bestimmt man von dieser die vertikale Projektion, und zieht durch letztere Gerade nach der vertikalen Projektion des angegebenen Berührungspunktes, so erhält man die vertikale Projektion der Tangente.

Beispiel. (Fig. 155.) Ist p die horizontale und p' die vertikale Projektion eines Punktes der Schraubenlinie, durch welchen an diese eine Tangente gezogen werden soll, so muss, wie schon vorhin erwähnt wurde, die horizontale Projektion derselben, welche ohnediess (§. 72.) durch p gehen muss, Tangente der Kreislinie für p sein. Zieht man daher von p aus (nach §. 205.) an diese Kreislinie die Tangente pc_2 , so wird letztere die horizontale Projektion der gesuchten Tangente der Schraubenlinie sein. Die vertikale Projektion der letzteren muss aber durch p' gehen; bestimmt man daher noch einen Punkt derselben, so wird man diese vertikale Projektion leicht bestimmen können.

Nun wurde erwähnt, dass der Theil der horizontalen Projektion der Tangente, welcher zwischen der horizontalen Projektion des Berührungspunktes und der horizontalen Spur der Tangente liegt, Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist, von welchem die vertikale Ordinate des Berührungspunktes die andere Kathete und die Länge des zwi-

schen diesem Punkte und der horizontalen Spur liegenden Theiles der Tangente Hypothenuse ist. Die auf der horizontalen Projektion der Tangente liegende Kathete aber ist so lang, als der zwischen der horizontalen Projektion des Berührungspunktes und dem Anfange der Schraubenlinie liegende Theil des senkrechten Schnittes. Trägt man daher die Länge pa von p aus auf pc_2 , so wird c_2 die horizontale Spur der gesuchten Tangente sein. Zieht man nun $c_2c'_2$ senkrecht auf X , so erhält man in c'_2 die vertikale Projektion von c_2 , und die Gerade $p'c'_2$ gezogen, gibt die vertikale Projektion der gesuchten Tangente, deren Berührungspunkt (p, p') ist. —

Anmerk. Zieht man durch alle einzelnen Theilpunkte der Kreislinie, die Tangenten der letzteren, und macht $IIc_3 = IIIa$, $IVc_4 = IVa$ etc. etc., so werden die Punkte c_3, c_4, c_5 etc. etc. die horizontalen Spuren aller einzelnen durch die Punkte $(III, 3'), (IV, 4')$ etc. etc. gezogenen Tangenten der Schraubenlinie sein, und die Linie $a c_1 c_2 \dots C$, welche diese horizontalen Spuren verbindet, ist die Kreisevolvente. Die Konstruktion der letzteren ist also hieraus leicht abzunehmen.

§. 251.

Zieht man eine Tangente jener Schraubenlinie, und lässt dieselbe stets die letztere tangirend sich fortbewegen, so entsteht (§. 232.) eine entwickelbare Fläche, und zwar die entwickelbare Schraubenfläche.

Letztere ist also der geometrische Ort aller Tangenten der Schraubenlinie, und könnte mithin durch die einzelnen Lagen dieser Erzeugenden leicht bestimmt werden. Man müsste nämlich (nach §. 249.) für viele nahe an einander liegende Punkte der Schraubenlinie die Tangenten der letzteren ziehen, so werden je zwei consecutive Lagen dieser Tangenten ein Element der Schraubenfläche bilden. Da aber dieses Verfahren zu unbequem ist, so wollen wir ein anderes benützen, das uns auf die Konstruktion der Schraubenfläche führt. Theilen wir nämlich den senkrechten Schnitt des Cylinders, auf welcher letzterem sich die Direktrix unserer Fläche, nämlich die Schraubenlinie befindet, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und ziehen durch die einzelnen Theilpunkte Tangenten an diesen senkrechten Schnitt, der hier eine Kreislinie sein soll, tragen auf jede dieser Tangenten den Theil des senkrechten Schnittes auf, welcher zwischen dem Berührungspunkte der Tangente und dem ersten Theilungspunkte liegt, so erhalten wir die horizontalen Spuren von ebenso vielen Tangenten der Schraubenlinie, als wie viele Tangen-

ten an den senkrechten Schnitt gezogen wurden. Wenn wir daher diese horizontalen Spuren vertikal projeciren (nach §. 70.), so haben wir die Projektionen von Punkten, von welchen jeder einer Lage der Generatrix unserer Schraubenfläche angehört. Um nun noch einen zweiten Punkt von jeder dieser Lagen der Erzeugenden zu erhalten, nehmen wir in einer Entfernung (h), welche gleich der Höhe eines Schraubenganges ist, eine Ebene parallel zur horizontalen Tafel an, und suchen wieder die Durchgangspunkte der vorhin erwähnten Lagen der Erzeugenden mit dieser Ebene. Eine jede solche Lage der Erzeugenden nun bildet mit der Erzeugenden des Cylinders einen bekannten Winkel, und für welchen, wenn er mit α bezeichnet wird:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 R \pi}{h}$$

ist, worin R der Halbmesser des Kreises ist, dessen Ebene senkrecht auf dem Cylinder steht, und in dessen Umfang der Anfangspunkt der Schraubenlinie liegt.

Es ist mithin (nach dem Begriffe von trigonometrischer Tangente eines Winkels) derjenige Theil einer jeden Lage der Erzeugenden, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der um h von letzterer entfernten Ebene liegt, die Hypothense eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete gleich h , und dessen andere Kathete die Länge des auf dem Cylinder senkrecht stehenden Schnittes, also $2 R \pi$ ist. Letztere aber muss (nach §. 249.) Tangente dieser Kreislinie sein, und ihr Endpunkt wird sodann der Durchschnittspunkt mit der in der Entfernung h von der horizontalen Tafel gelegten Horizontalebene sein. Verlängert man daher die an den senkrechten Schnitt des Cylinders gezogenen Tangenten so weit, dass jede derselben gleich dem Umfange dieses Schnittes (oder gleich $2 R \pi$) wird, so werden die hierdurch erhaltenen Endpunkte die horizontalen Projektionen der einzelnen Durchschnittspunkte von den Lagen der Erzeugenden der Schraubenfläche mit der horizontalen Hülfebene sein. Zu diesen Projektionen die vertikalen gesucht, welche in der vertikalen Spur (einer zur Axe X parallelen und um h von ihr entfernten Geraden) der horizontalen Hülfebene liegen müssen, sodann die einzelnen horizontalen Spuren der Lagen der genannten Erzeugenden mit ihren Durchgangspunkten in die horizontale Hülfebene durch Gerade verbunden, so erhält man die einzelnen Lagen der Erzeugenden der Schraubenfläche, deren Durchschnittspunkte der Direktrix der letzteren angehören werden. —

Anmerk. 1. Es wurde vorhin der Begriff von trigonometrischer Tangente eines Winkels benützt, weshalb dieser Begriff hier noch erwähnt werden soll. Zieht man nämlich von einem beliebigen Punkte des Scheitels eines Winkels auf seinen andern Schenkel eine Senkrechte, bezeichnet letztere mit h , den zwischen h und dem Scheitel des Winkels liegenden Theil des zweiten Schenkels mit b , und den zwischen h und dem Scheitel des Winkels liegenden Theil des ersten Schenkels mit H , so bilden, b , h und H ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem das Verhältniss irgend zweier seiner Seiten konstant bleibt, so lange der angegebene Winkel (welcher mit α bezeichnet werden soll) sich nicht ändert, und es ist

$$\frac{h}{H} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{H} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{h} = \tan \alpha, \quad \frac{H}{h} = \operatorname{Coatg} \alpha, \\ \frac{H}{b} = \operatorname{sekante} \alpha, \quad \frac{H}{h} = \operatorname{cosecante} \alpha.$$

Anmerk. 2. In Fig. 156. ist $Abcd$ der senkrechte Schnitt eines auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Cylinders, MN die Höhe eines Schraubenganges und hierdurch die Schraubenfläche konstruirt. Die nähere Beschreibung dieser Figur wird unten, wo von der Tangirung und den Durchschnitten der Schraubenfläche gesprochen wird, folgen.

Anmerk. 3. Es wurde oben von der Aehnlichkeit zweier Curven gesprochen. Damit zwei Curven ähnlich sein können, müssen dieselben einerlei Ordnung angehören, und in einer oder in parallelen Ebenen liegen. Ist nun diess der Fall, so nennt man dieselben ähnlich liegend, wenn die von einem beliebigen in der einen liegenden Punkte nach ihrem Umfange gezogenen Geraden in demselben Verhältnisse stehen, als die in der andern von einem entsprechenden und zu bestimmenden Punkte parallel zu jenen gezogenen Geraden.

Anmerk. 4. Ehe wir die Erzeugung der entwickelbaren Flächen schliessen, wollen wir noch erwähnen, dass diejenige Linie, welche der geometrische Ort aller Durchschnittspunkte der einzelnen Lagen der Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche ist, Wendecurve der Fläche genannt wird. Von dieser sind die einzelnen Lagen der Erzeugenden Tangenten.

Viertes Kapitel.

Tangirung der entwickelbaren Flächen durch Ebenen.

§. 252.

Es wurde schon (§. 253.) erwähnt, dass eine entwickelbare Fläche von einer Tangentialebene

derselben nach einem Flächenelemente berührt wird. Ein solches Flächenelement ist nun der zwischen zwei konsekutiven Lagen der Erzeugenden enthaltene Theil der Fläche, und da zwei solche konsekutive Lagen der Erzeugenden so nahe nebeneinander liegen, dass sie als in einander fallend angenommen werden können, so wird man auch sagen können: eine entwickelbare Fläche wird von einer ihrer Tangentialebenen nach einer Erzeugenden berührt.

§. 253.

Hat man nun für einen beliebigen Punkt einer entwickelbaren Fläche an diese eine Tangentialebene zu legen, so weis man (aus §. 252.), dass dieselbe eine Lage der Erzeugenden mit der Fläche gemeinschaftlich hat. Ferner ist (aus §. 251.) bekannt, dass die Tangentialebene für einen Punkt einer Fläche der geometrische Ort aller Tangenten der Curven ist, die durch jenen Punkt gehen und der Fläche angehören. Wenn wir daher nur eine solche Curve wissen, die durch den Berührungspunkt einer Tangentialebene geht, und der Fläche angehört, sodann von dem Berührungspunkte aus an diese Curve eine Tangente ziehen, so gehört diese der Tangentialebene an. Da aber auch ausserdem der letzteren noch die Berührungserzeugende angehört, so wird jene bestimmt werden können durch die genannte Tangente und diese Erzeugende, weil beide sich schneiden. Um daher für einen beliebigen Punkt einer entwickelbaren Fläche an diese eine Tangentialebene zu legen, ziehen wir zuerst durch den gegebenen Berührungspunkt eine Erzeugende der Fläche, sodann legen wir durch denselben Punkt eine Ebene, welche die gegebene Fläche nach einer bekannten Curve schneidet, legen an diese durch den gegebenen Berührungspunkt eine Tangente, und suchen nun die Ebene auf, welche diese Tangente und die Berührungserzeugende enthält, so wird dieselbe die gesuchte Tangentialebene sein.

§. 254.

Ist eine der Spuren der entwickelbaren Fläche gegeben, so kann man bei der Aufsuchung einer Tangentialebene dieser Fläche sogleich diese Curve benutzen. Ist nämlich die horizontale Spur der Fläche gegeben, so wird die horizontale Spur der Berührungserzeugenden als Berührungspunkt angenommen werden können, und legt man sodann an die horizontale Spur der Fläche eine Tangente, so wird

diese der Tangentialebene angehören. Diese Tangente liegt aber in der horizontalen Tafel, weil die Tangente einer Curve — als Verlängerung eines ihrer Elemente — in der Ebene derselben liegen muss; folglich ist diese Tangente die horizontale Spur der Tangentialebene für die angegebene Berührungserzeugende. Da sich nun ebenso zeigen lässt, dass die vertikale Spur der Fläche von der vertikalen Spur der Tangentialebene berührt wird, so folgt hieraus der Satz:

Die horizontale Spur einer Tangentialebene für eine entwickelbare Fläche ist Tangente der horizontalen Spur und die vertikale Spur jener Ebene Tangente der vertikalen Spur der Fläche.

Anmerk. Da die horizontale Spur der Tangentialebene Tangente der horizontalen Spur der Fläche, und der Berührungspunkt dieser Tangente die horizontale Spur der Berührungserzeugenden ist, so wird man letztere bestimmen können, wenn man durch jenen Berührungspunkt eine Erzeugende der Fläche legt.

§. 255.

Hat man nun zwei Tangentialebenen für einen Cylinder, so können diese entweder parallel sein oder sich schneiden. Im letzteren Falle haben dieselben (§. 15.) eine Gerade gemeinschaftlich, deren Richtung wir nun bestimmen wollen. Man kann nämlich die Berührungserzeugende der einen Tangentialebene als Erzeugende der letzteren betrachten. Lässt man nun eine dieser Tangentialebenen durch ihre Berührungserzeugende erzeugen, so wird diese letztere während ihrer Bewegung an einer gegebenen Direktrix auch einmal durch einen Punkt der Communsektion beider Ebenen gehen, und in dieser Lage auch ganz und gar in die andere Ebene fallen müssen, weil eine Gerade, die man durch einen Punkt dieser zweiten Ebene parallel zur Erzeugenden des Cylinders zieht, ganz und gar in diese Ebene fallen muss. Es folgt also hieraus, dass zwei Tangentialebenen eines Cylinders sich nach einer Geraden schneiden, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist.

§. 256.

Legt man die Direktrix eines Cylinders in die horizontale Tafel, und ist diese Direktrix senkrecht auf der Erzeugenden des Cylinders, so steht auch letzterer senkrecht auf der horizontalen Tafel. Wenn man nun an den Cylinder eine Tangentialebene legt, so wird diese (§. 252.) eine Lage der Erzeugenden des Cylinders enthalten, nämlich die,

welche durch den Berührungspunkt geht, und mithin wird diese Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen. Nun muss aber (§. 254.) die horizontale Spur dieser Tangentialebene Tangente an der angenommenen Direktrix sein, und ist ausserdem auch die horizontale Projektion einer jeden in der Tangentialebene enthaltenen Linie, weil diese letztere projicirende Ebene dieser Linie ist, folglich ist die horizontale Spur der Tangentialebene auch die horizontale Projektion einer jeden Tangente einer Curve, die sich auf dem gegebenen Cylinder befindet. Projicirt man aber irgend eine im Raume enthaltene Curve horizontal, so werden alle ihre projicirenden Linien als einzelne Lagen der Erzeugenden eines Cylinders betrachtet werden können, dessen Direktrix die gegebene Curve und dessen horizontale Spur die horizontale Projektion dieser Curve ist; daher wird die horizontale Projektion der Tangente einer Curve als Tangente an der horizontalen Projektion der Curve erscheinen. Da aber dasselbe auch in Bezug auf die vertikale Projektion der Tangente einer Curve bewiesen werden kann, so können wir den Satz aussprechen: die Projektionen einer Tangente für eine Curve im Raume sind Tangenten für die Projektionen dieser Curve, und gehen durch die Projektionen des Berührungspunktes.

Anmerk. Ist also die eine Projektion einer Curve eine Gerade, so wird die entsprechende Projektion einer Tangente der Curve mit jener Geraden zusammenfallen müssen.

§. 257.

Hat man für einen Conus zwei Tangentialebenen, so werden sich dieselben jedenfalls schneiden, weil jede derselben eine Lage der Erzeugenden mit dem Conus gemeinschaftlich haben muss (§. 252.). Jede Lage der Erzeugenden des Conus geht aber durch sein Centrum, und mithin wird dieses auch in jeder der Tangentialebenen enthalten sein müssen, folglich schneiden sich zwei Tangentialebenen eines Conus nach einer durch das Centrum des letzteren gehenden Geraden.

§. 258.

Aufgabe 21. Es ist ein Cylinder durch seine horizontale Spur und die Richtung seiner Generatrix gegeben; ferner ist die eine Projektion eines auf dem Cylinder enthaltenen Punktes bekannt; man soll

1. die andere Projektion dieses Punktes angeben.

2. an diesen Cylinder für den gegebenen Punkt eine Tangentialebene legen.

Auflösung. Ist die horizontale Projektion des Berührungspunktes gegeben, und man legt durch dieselbe eine Gerade parallel mit der horizontalen Projektion der Erzeugenden des Cylinders, so wird diese Parallele die horizontale Projektion der durch den Berührungspunkt gehenden Lage der Erzeugenden und ihr Durchschnittspunkt mit der horizontalen Spur des Cylinders die horizontale Spur dieser Lage der Erzeugenden sein. Bestimmt man nun zu dieser horizontalen Spur die vertikale Projektion, zieht sodann durch letztere eine Parallele mit der vertikalen Projektion der Erzeugenden, so erhält man auch die vertikale Projektion jener Lage der Erzeugenden, welche den Berührungspunkt enthält, wodurch also auch leicht die vertikale Projektion dieses Punktes bestimmt werden kann, und hierdurch ist also der erste Theil unserer Aufgabe gelöst. Um den zweiten Theil derselben zu lösen, so weis man (aus §. 254.), dass die horizontale Spur der Tangentialebene einer entwickelbaren Fläche, eine an die horizontale Spur dieser Fläche gezogene Tangente ist, die durch die horizontale Spur der Berührungserzeugenden geht; legt man daher durch die horizontale Spur der Berührungserzeugenden eine Tangente an die horizontale Spur des angegebenen Cylinders, so wird diese Tangente die horizontale Spur unserer Tangentialebene sein müssen. Bestimmt man nun von dieser Berührungserzeugenden die vertikale Spur, so erhält man einen Punkt der vertikalen Spur unserer Tangentialebene, und nimmt man auf der Berührungserzeugenden einen Punkt an, legt durch denselben eine Gerade parallel zur horizontalen Spur der Tangentialebene und sucht von dieser Parallelen die vertikale Spur, so wird letztere ebenfalls in der vertikalen Spur der Tangentialebene enthalten sein müssen. Durch dieselbe und den schon vorhin angegebenen Punkt kann nun die vertikale Spur der Tangentialebene gezogen werden, und es ist mithin die Tangentialebene für den gegebenen Berührungspunkt hierdurch bestimmt.

Auf gleiche Weise würde man verfahren, wenn die vertikale Spur des Cylinders bekannt wäre und an diesen eine Tangentialebene gelegt werden sollte.

§. 259.

Beispiel. (Fig. 157.) Ist ABCDEF die horizontale Spur eines Cylinders, und zwar ein Kreis, (CF', AF₁) die Richtung der Generatrix und m die horizontale Projektion des Berührungspunktes, und man soll für diesen Punkt an diesen Cylind-

der (ABCDEFG, 'AD' G, F₁) eine Tangentialebene legen, so ziehe man mB parallel zu CF, ferner BB' senkrecht auf X, und B'm' ≠ 'AF₁, so wird Bm die horizontale und 'AF₁ die vertikale Projektion derjenigen Lage der Generatrix sein, welche durch den gegebenen Berührungspunkt geht, und B wird die horizontale Spur dieser Berührungserzeugenden sein. Zieht man (§. 205.) durch B die Tangente BS an den gegebenen Kreis, so wird diese die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene sein, welche mit der Axe X den Punkt S gemeinschaftlich hat. Nimmt man nun (§. 73.) die Projektionen n und n' eines auf der Geraden (Bm, B'm') enthaltenen Punktes an, zieht na ≠ BS und vom Durchschnittspunkte dieser Parallelen na mit X, nämlich von a aus eine Senkrechte aa' auf X, zieht ferner n'a' ≠ X, so wird (na, n'a') (§. 72.) eine durch (n, n') gehende und mit E parallel gehende Gerade sein, die also (§. 120., Anmerk. 2.) auch in der gesuchten Tangentialebene liegen muss. Von dieser Geraden (na, n'a') ist aber (§. 93.) in a' die vertikale Spur, zieht man daher a'S, so erhält man hierdurch die vertikale Spur der Tangentialebene, und letztere ist also durch ihre Spuren E und E' völlig bestimmt.

§. 260.

Aus dem Vorhergehenden ist leicht ersichtlich, dass es für einen auf einem Cylinder angegebenen Punkt nur eine einzige Tangentialebene gibt; wir wollen nun die Bedingungen aufsuchen, welche die Lage der Tangentialebene eines Cylinders völlig bestimmen, wenn der Berührungspunkt nicht gegeben ist. Da die Tangentialebene eines Cylinders mit demselben eine Lage der Erzeugenden gemeinschaftlich hat, so wird dieselbe nur noch durch einen ausserhalb des Cylinders angegebenen Punkt gehen oder durch eine Gerade gehen können, welche die Berührungserzeugende schneidet oder parallel mit ihr ist, und endlich mit einer Ebene parallel sein können, die parallel zur Generatrix des Cylinders ist. Es folgt hieraus, welche Bedingungen der Tangentialebene eines Cylinders zu erfüllen auferlegt werden dürfen, wenn ihr Berührungspunkt nicht gegeben, und diese sind folgende:

1. Kann ein Punkt gegeben sein, durch welchen die Tangentialebene gelegt werden soll.
2. Eine Gerade, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, und durch welche die Tangentialebene gehen muss.

3. Eine beliebige Gerade, mit welcher die Tangentialebene parallel gezogen werden soll. Denn im letzteren Falle wird man die Ebene finden können, die mit der Generatrix parallel ist und noch eine Bedingung ausserdem erfüllt. —

§. 261.

Aufgabe 22. Es ist ein Cylinder durch seine horizontale Spur und die Richtung seiner Generatrix gegeben, man soll durch einen ausserhalb desselben angegebenen Punkt an denselben eine Tangentialebene legen.

Auflösung. Man sieht vor Allem leicht ein, dass durch den gegebenen Punkt zwei Ebenen gelegt werden können, welche den Cylinder tangieren, wenn die Direktrix des Cylinders eine geschlossene Curve ist, und man hat daher diese beiden Ebenen anzugeben. Aus §. 255. ist aber bekannt, dass die Communsektion zweier Tangentialebenen eines Cylinders eine zur Generatrix des letzteren parallele Gerade ist, und da beide Tangentialebenen durch den gegebenen Punkt gehen müssen, so wird die Gerade, welche durch den gegebenen Punkt parallel zur Erzeugenden des Cylinders gezogen werden kann, die Communsektion beider Tangentialebenen sein. Die horizontalen Spuren der letzteren müssen aber durch die horizontale Spur ihrer Communsektion gehen und (§. 254.) Tangenten der horizontalen Spur des Cylinders sein; ziehen wir daher von der horizontalen Spur jener Communsektion aus an die horizontale Spur des Cylinders Tangenten, so werden diese die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen sein. Es folgt also hieraus die Regel:

Um durch einen gegebenen Punkt an eine Cylinderfläche die Tangentialebenen zu legen, ziehe man durch diesen Punkt eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders, suche von dieser Parallelen die horizontale Spur, und lege durch letztere an die horizontale Spur des Cylinders Tangenten, so werden diese die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen sein, von welchen nun die vertikalen Spuren bestimmt werden können, wenn man (§. 254.) die Berührungserzeugenden aufsucht, und die in §. 258. erwähnten Regeln benützt.

§. 262.

Beispiel. (Fig. 158.) Es sei ABCDE eine in der horizontalen Tafel liegende Ellipse und ho-

horizontale Spur eines Cylinders, von welchem die Richtung der Erzeugenden durch die Gerade (Cc , $C'c'$) gegeben ist, man soll durch den Punkt (a , a') an den Cylinder zwei Tangentialebenen legen. Zieht man $ad \neq Cc$ und $a'd' \neq C'c'$, so wird (ad , $a'd'$) die Communsektion der beiden gesuchten Tangentialebenen sein. Nun ziehe man vom Durchschnittspunkte d' der Geraden $a'd'$ mit X auf letztere eine Senkrechte, und durchschneide letztere von ad , so wird in d ein Punkt sein, der den horizontalen Spuren beider Tangentialebenen zugleich angehört, und legt man nun von d aus (nach §. 210.) an die Ellipse $ABCDE$ die Tangenten dC und dD , so werden die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen, und die Punkte C und D werden die Berührungspunkte jener Tangenten sein, folglich sind die Geraden (Cc , $C'c'$) und (Dd , $D'd'$) die Berührungserzeugenden beider Tangentialebenen. Nimmt man auf (ad , $a'd'$) den Punkt (b , b') an, legt $bm \neq E_1$ und $b'm' \neq X$, so wird diese Gerade parallel zur horizontalen Spur der ersten Tangentialebene und mithin in dieser letzteren (§. 120. Anmerk. 2.) enthalten sein, folglich ist die vertikale Spur dieser Geraden, nämlich m' ein Punkt der vertikalen Spur der ersten Tangentialebene, und diese Spur kann daher jetzt bestimmt werden, und ist E_1 . Ebenso werden die Punkte c' und p' , die der vertikalen Spur E_2 der zweiten Tangentialebene angehören, bestimmt. Es ist also E_1 , E_2 die eine und E_2 , E_1 die andere Tangentialebene des gegebenen Cylinders, welche durch den Punkt (a , a') geht.

§. 263.

Aufgabe 23. Parallel zu einer gegebenen Geraden an einen Cylinder, dessen horizontale Spur und Generatrix gegeben ist, eine Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Vor Allem sieht man wieder, dass an den gegebenen Cylinder zwei Tangentialebenen gelegt werden können, welche die in diesem §. angegebenen Bedingungen erfüllen, wenn der Cylinder eine in sich zurückkehrende Curve als horizontale Spur hat. Jede dieser Ebenen muss aber eine zur gegebenen Geraden parallele Gerade enthalten (§. 29.), wenn sie mit jener parallel sein soll, und (§. 252.) muss eine Lage der Erzeugenden ganz und gar in jeder der Tangentialebenen liegen. Zieht man daher von einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders, und legt durch diese Parallele und die gegebene Gerade eine Ebene (§. 101.), so wird letztere parallel zu jeder der gesuchten Tangentialebenen sein, und folglich wer-

den auch beide unter sich parallel sein müssen. Man ziehe daher parallel zur horizontalen Spur der Hülfssebene Tangenten an die horizontale Spur des Cylinders, so erhält man die horizontalen Spuren der beiden Tangentialebenen, deren vertikale Spuren nach §. 258. bestimmt werden können —

§. 264.

Beispiel. (Fig. 159.) Es sei L die horizontale und L' die vertikale Projektion der gegebenen Geraden, $ABCDE$ die horizontale Spur eines Cylinders, dessen Generatrix durch die Richtung (AM_1 , BM) bestimmt ist; man soll parallel zur Geraden (L , L') eine Tangentialebene an diesen Cylinder ziehen. Man nehme (§. 73.) auf (L , L') den Punkt (m , m') an, ziehe $ms_2 \neq BM$ und $m's'_2 \neq AM_1$, so wird die Gerade (ms_2 , $m's'_2$) (§. 76) parallel zur Erzeugenden des gegebenen Cylinders sein. Nun lege man durch beide Gerade (L , L') und (ms_2 , $m's'_2$) nach §. 101. eine Ebene, indem man die horizontalen Spuren s_1 und s_3 und die vertikalen Spuren s'_2 und s'_4 dieser Geraden sucht, die ersten dieser zwei Punkte unter sich und dann die letzten durch Gerade verbindet, so erhält man die Spuren s_3s_1 und $s'_4s'_2$ der Hülfssebene. Zieht man (§. 207.) parallel zur Geraden s_3s_1 Tangenten an die horizontale Spur $ABCDE$ des Cylinders, nämlich E_1 und E_2 , so wird E_1 die horizontale Spur der ersten und E_2 die der zweiten gesuchten Tangentialebene sein. Durch die Durchschnittspunkte S_1 und S_2 dieser Spuren mit der Axe X parallele Gerade mit $s_1s'_2$ gezogen, so erhält man auch die vertikalen Spuren E'_1 und E'_2 der gesuchten Ebene, und es ist mithin $E_1S_1E'_1$ die eine und $E_2S_2E'_2$ die andere Ebene, welche den gegebenen Cylinder ($ABCDMN$, $AC'N_1M_1$) tangirt und mit der gegebenen Geraden (L , L') parallel ist.

§. 265.

Sollte man durch eine Gerade, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, an diesen eine Tangentialebene legen, so bestimme man die Spuren dieser Geraden, lege durch die horizontale Spur derselben Tangenten an die horizontale Spur des gegebenen Cylinders, so wird man hierdurch die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen erhalten. Bestimmt man nun die Berührungserzeugenden, und gibt (§. 258.) noch Punkte an, welche den vertikalen Spuren der Tangentialebenen angehören, legt durch dieselben und die vertikale Spur der angegebenen Geraden gerade Linien, so werden diese die gesuchten vertikalen Spuren der Ebenen sein, welche den Cy-

linder tangiren und parallel zur gegebenen Geraden sind. —

Anmerk. Ist eine Gerade angegeben, durch welche eine Tangentialebene an den Cylinder gelegt werden soll, so ist die Aufgabe im Allgemeinen unmöglich. Nur dann würde die Lösung möglich sein, wenn die Berührungserzeugende der zu suchenden Tangentialebene mit jener Geraden in einer Ebene liegt.

§. 266.

Aufgabe 24. Es ist ein Conus durch seine horizontale Spur und die Projektionen seines Centrums angegeben; man soll für einen auf dem Conus liegenden und angegebenen Punkt an denselben eine Tangentialebene legen.

Auflösung. In §. 252. wurde gezeigt, dass eine jede abwickelbare Fläche von einer Ebene nach einer Lage der Erzeugenden tangirt wird, auf welcher sich der Berührungspunkt befindet, folglich hat auch der Conus mit der gesuchten Tangentialebene eine Lage der Erzeugenden gemeinschaftlich. Hat man daher aus der einen Projektion des Berührungspunktes, die angegeben ist, nach §. 243. seine andere Projektion bestimmt, und man legt durch diesen Punkt (§. 72.) eine Gerade, die durch das Centrum des Conus geht, so wird diese die Berührungserzeugende desselben mit der gesuchten Tangentialebene sein. Nun weis man ferner, dass

1. jeder Punkt dieser Berührungserzeugenden als Berührungspunkt angenommen werden kann, und
2. die horizontale Spur des gegebenen Kegels (§. 254.) von der horizontalen Spur der Tangentialebene tangirt wird,

Bestimmt man daher die horizontale Spur der Berührungserzeugenden, (was leicht geschehen kann, weil dieselbe der Durchschnitt der horizontalen Spur des Conus mit der horizontalen Projektion der Berührungserzeugenden ist), zieht durch dieselbe eine Tangente an die horizontale Spur des Conus, so erhält man die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene. Um nun die vertikale Spur dieser Ebene zu bestimmen, kann man wieder zwei Mittel benützen, durch welche man zwei Punkte jener Spur bestimmen kann.

1. Bestimme man die vertikale Spur der Berührungserzeugenden (§. 93.), so wird dieselbe durch die vertikale Spur der Tangentialebene gehen müssen.
2. Nehme man (§. 73.) auf der Berührungserzeugenden einen beliebigen

Punkt an, lege durch denselben eine Gerade, die parallel zur horizontalen Spur der Tangentialebene ist, so wird diese (§. 120., Anmerk. 2.) in der Tangentialebene liegen müssen. Sucht man daher von dieser Parallelen die vertikale Spur, und legt durch letztere und die vertikale Spur der Berührungserzeugenden eine Gerade, so wird diese letztere die vertikale Spur der gesuchten Tangentialebene sein müssen.

Anmerk. Jedenfalls muss dieser letzte Punkt so gewählt werden, dass die durch denselben mit der horizontalen Spur der Tangentialebene gezogene Parallele noch die vertikale Tafel trifft. Sollte ferner die vertikale Spur der Berührungserzeugenden nicht angegeben werden können, so hat man das in (2) angegebene Verfahren zu wiederholen, und man wird hierdurch noch einen zweiten Punkt der vertikalen Spur der Tangentialebene erhalten, so dass letztere wieder leicht bestimmt werden kann.

§. 267.

Beispiel. (Fig. 160.) Ist $ABCDE$ ein in der horizontalen Tafel liegender Kreis, der die horizontale Spur eines Conus ist, S die horizontale und S' die vertikale Projektion des Centrums, so kann man (§. 243.) die Projektionen des Conus angeben, und es ist $SABCDE$ seine horizontale und $S'A'E'$ seine vertikale Projektion. Nun sei m' die horizontale Projektion des Berührungspunktes, dessen vertikale Projektion angegeben werden muss, so ziehe man $S m$, verlängere diese bis zu ihrem Durchschnittspunkte D mit der horizontalen Spur des Conus, so ist D die horizontale Spur der Berührungserzeugenden. Zieht man nun DD' senkrecht auf X , und sodann die Gerade $D'S'$, so ist letztere die vertikale und DS die horizontale Projektion der Berührungserzeugenden. Von m aus auf X die Gerade mm' senkrecht gezogen, so wird (§. 73.) im Durchschnittspunkte m' dieser Senkrechten mit $S D'$ die vertikale Projektion des Berührungspunktes erhalten. Nun kann man aber, weil die gesuchte Ebene die konische Fläche nach der ganzen Geraden ($S D$, $S D'$) berührt, jeden Punkt der letzteren als Berührungspunkt betrachten, folglich auch den Punkt D , welcher die horizontale Spur der Berührungserzeugenden ist. Zieht man daher DS , tangirend an die Kreislinie $ABCDE$ (nach §. 205.), so wird diese Gerade S, DE , die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene (§. 254.) sein. Verlängert man nun SD bis zum Durchschnittspunkte s_1 mit X , zieht sodann $s_1 s'_1$ senkrecht auf X , und verlängert $m' D'$ bis zu ihrem Durch-

schnitte mit $s_1 s'_1$, so ist s'_1 (§. 93.) die vertikale Spur der Berührungserzeugenden. Zieht man daher die Gerade $S_1 s'_1$, so wird hierdurch die vertikale Spur der gesuchten Tangentialebene erhalten werden, und mithin ist $E_1 S_1 E_1$ die Ebene, welche den Conus (SABCD, 'S'AE') tangirt, und deren Berührungspunkt (m, m') ist.

§. 268.

Auch hier wollen wir wieder untersuchen, welche Bedingung gegeben sein darf, damit die Tangentialebene eines Conus völlig bestimmt ist und ihr Berührungspunkt angegeben werden kann. Eine jede Ebene ist nämlich der Lage nach durch einen Punkt und eine Gerade völlig bestimmt; ebenso durch zwei sich schneidende und durch zwei parallele Gerade. Da nun die Tangentialebene eines Conus mit letzterem eine Lage seiner Erzeugenden gemeinschaftlich hat, so kann die Tangentialebene nur noch durch einen bestimmten Punkt gehen, oder eine Gerade enthalten, welche die Berührungserzeugende schneidet, oder endlich eine Gerade enthalten, die mit der Berührungserzeugenden parallel ist. Ausserdem wird sie auch parallel sein können mit einer Ebene, die parallel zur Berührungserzeugenden ist, oder mit einer beliebigen Geraden parallel sein können, ohne dass sie den Conus schneidet. Es folgt also hieraus, dass wenn der Berührungspunkt einer Tangentialebene für einen Conus nicht gegeben ist, folgende Bestimmungsstücke angegeben sein können:

1. Ein Punkt, der ausserhalb der konischen Oberfläche liegt, und durch welchen die Tangentialebene gehen soll.
2. Eine Gerade, mit welcher die Tangentialebene parallel gelegt werden soll.
3. Eine Gerade, von welcher man gewiss weiss, dass dieselbe mit der Berührungserzeugenden der gesuchten Tangentialebene in einer Ebene liegt, also mit jener parallel ist, oder dieselbe schneidet.

§. 269.

Aufgabe 25. Es ist ein Conus durch seine horizontale Spur und sein Centrum gegeben; man soll durch einen ausserhalb des Conus angegebenen Punkt eine Ebene legen, welche jenen berührt.

Auflösung. Durch den angegebenen Punkt wird man zwei Ebenen legen können, welche den

Conus berühren, wenn der letztere eine geschlossene Curve als horizontale Spur hat, und diese beiden Ebenen schneiden sich nach einer Geraden, die durch den gegebenen Punkt und zugleich (nach §. 257.) durch das gegebene Centrum des Conus geht. Von dieser Geraden liegt aber jeder Punkt in der gesuchten Tangentialebene, folglich geht die horizontale Spur der letzteren durch die horizontale Spur jener Geraden, und da die horizontalen Spuren der Tangentialebenen zugleich Tangenten der horizontalen Spuren des Conus sein müssen, so wird man zur Bestimmung der horizontalen Spuren der gesuchten zwei Tangentialebenen folgende Regel anwenden:

1. Ziehe man vom angegebenen Punkte aus nach dem Centrum des Conus eine Gerade (nach §. 73.).
2. Bestimme man (§. 93.) die horizontale Spur der letzteren, und ziehe durch diese an die horizontale Spur des Conus Tangenten, so werden diese die horizontalen Spuren der beiden Tangentialebenen des Conus sein, welche durch den angegebenen Punkt gehen.
3. Zur Bestimmung der vertikalen Spuren beider Tangentialebenen kann man die vertikale Spur der Geraden angeben, die das Centrum und den gegebenen Punkt verbindet; sodann noch durch einen beliebigen Punkt dieser Geraden eine Parallele zu den horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen ziehen und von diesen die vertikalen Spuren suchen, so wird durch die eine der letzteren die vertikale Spur der einen und durch die andere die vertikale Spur der andern Tangentialebene gehen müssen.

Anmerk. Man kann zur Bestimmung der vertikalen Spuren beider Tangentialebenen ihre Berührungserzeugenden suchen und das in (§. 267. 2.) angegebene Verfahren benutzen.

§. 270.

Beispiel. (Fig. 161.) Ist ABCD ein in der horizontalen Tafel liegender Kreis, nach welchem ein Conus, dessen Centrum der Punkt (S, 'S) ist, die horizontale Tafel trifft, so projicire man ABCD (nach §. 70.) vertikal, und es wird 'A'C seine vertikale Projektion sein. Zieht man nun die Geraden (AS, 'AS'), (BS, 'B'S') etc. etc., so erhält man einzelne Lagen der Erzeugenden des

Conus, wodurch also letzterer bestimmt werden kann. Nun sei (m, m') ein gegebener Punkt, man soll durch denselben an den Conus $(ABCD S, A' C' S')$ eine Tangentialebene legen. Zieht man $S m$ und $S' m'$, so wird man die Projektionen der Communktion der beiden durch (m, m') gehenden und den gegebenen Conus tangirenden Ebenen erhalten, und von welcher die horizontale Spur s_2 und die vertikale Spur s_1 (nach §. 95.) bestimmt wurde. Legt man nun (§. 206.) durch s_2 an die Kreislinie $ABCD$ die Geraden $s_2 b_1$ und $s_2 b_2$ tangirend, so erhält man die horizontalen Spuren der beiden gesuchten Tangentialebenen. Diese Punkte b_1 und b_2 (nach §. 70.) vertikal projicirt, und durch die erhaltenen Punkte b'_1 und b'_2 die Geraden $b_1 S$, $b'_1 S'$, $b_2 S$, $b'_2 S'$ gezogen, so erhält man die Projektionen der Berührungserzeugenden beider Ebenen. Zieht man nun durch den Punkt S_2 , in welchem die horizontale Spur der zweiten Tangentialebene die Axe X trifft nach s'_1 die Gerade $S_2 s'_1$, so wird letztere die vertikale Spur dieser Tangentialebene, und $E_2 S_2 E'_2$ diese letztere selbst sein. Da die horizontale Spur $s_2 b_1$ oder E_1 der ersten Tangentialebene die Axe X nicht mehr trifft, so müssen wir von der vertikalen Spur dieser Ebene zwei Punkte angeben, um jene Spur bestimmen zu können. Der Punkt s'_1 gehört schon dieser Spur an, nimmt man nun auf $(S b_1, S' b'_1)$ den Punkt (a, a') (nach §. 75.) an, zieht $a, s_3 \neq E_1$ und $a' s'_3 \neq X$, so erhält man die Projektionen einer Geraden, die in der ersten Tangentialebene liegen muss, folglich wird die vertikale Spur s'_3 dieser Geraden in der vertikalen Spur dieser Ebene liegen müssen. Zieht man nun $s'_1 s'_3$, so erhält man die vertikale Spur E_1 der ersten Tangentialebene. —

§. 271.

Aufgabe 25. Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine konische Fläche eine Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Soll eine Ebene parallel zu einer Geraden sein, so muss sie eine Gerade enthalten, die parallel zu jener ist. Legen wir daher durch das Centrum des Conus eine Parallele zur gegebenen Geraden, so wird diese ganz und gar in der gesuchten Tangentialebene liegen, weil diese durch das Centrum des Conus geht und parallel zur gegebenen Geraden ist. Bestimmt man nun von dieser Parallelen die horizontale Spur, und legt durch letztere an die horizontale Spur der Fläche Tangenten, so erhält man die horizontalen Spuren der gesuchten zwei Tangentialebenen. Die vertikalen Spuren derselben können nun leicht bestimmt werden, indem man

1. die vertikale Spur der durch das Centrum mit der gegebenen Geraden gezogenen Parallelen benützen kann.
2. Die Berührungserzeugenden ziehen und hierdurch Punkte der vertikalen Spuren der Tangentialebenen angeben kann.

§. 272.

Beispiel. (Fig. 162.) Es sei $ABCD$ eine in der horizontalen Tafel liegende Ellipse, nach welcher ein Conus, der sein Centrum im Punkte (S, S') hat, die horizontale Tafel trifft, man soll parallel zur Geraden (L, L') an den gegebenen Conus eine Tangentialebene legen. Zieht man durch S die Gerade $S s'_1 \neq L$ und durch S die Gerade $S s_2 \neq L$, so erhält man eine Gerade $(S s_2, S' s'_1)$, die in der gesuchten Tangentialebene liegt. Von s'_1 auf X die Gerade $s'_1 s_1$ senkrecht gezogen, und diese Senkrechte sowohl, als $S s_2$ verlängert, bis sich beide treffen, so erhält man in s_1 die horizontale Spur der Geraden $(S s_2, S' s'_1)$. Legt man daher (§. 211.) durch s_1 die Geraden $s_1 b_1$ und $s_1 b_2$, dass dieselben die Ellipse $ABCD$ tangiren, so wird man hierdurch die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen erhalten. Da nun diese beiden Spuren die Axe X in den Punkten S_1 und S_2 treffen und s'_2 die vertikale Spur der in den gesuchten Ebenen enthaltenen Geraden $(S s_2, S' s'_1)$ ist, so werden die Geraden $s'_2 S_1$ und $s'_2 S_2$ die vertikalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen sein. Man hat also die beiden Ebenen $E_1 S_1 E'_1$ und $E_2 S_2 E'_2$, welche parallel zur gegebenen Geraden (L, L') sind und den gegebenen Conus tangiren.

§. 273.

Aufgabe 26. Es ist der Berührungspunkt einer beliebigen abwickelbaren Fläche gegeben; man soll durch denselben an die Fläche eine Tangentialebene legen.

Auflösung. Es wurde in §. 252 gezeigt, dass eine abwickelbare Fläche von einer Ebene nach einer ganzen Erzeugenden berührt wird; ferner wurde in §. 254. nachgewiesen, dass die horizontale Spur der Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche Tangente der horizontalen Spur der Fläche ist und endlich geht aus §. 252. hervor, dass man jeden Punkt der Berührungserzeugenden als Berührungspunkt annehmen kann. Hieraus geht nun die Regel hervor, an eine abwickelbare Fläche eine Tangentialebene zu legen, die durch einen

gegebenen Punkt der Fläche geht, und diese ist folgende:

1. Lege man durch den gegebenen Berührungspunkt eine Erzeugende der Fläche, so gehört diese der Tangentialebene an.
2. Bestimme man von dieser die horizontale Spur, und lege durch letztere an die horizontale Spur der Fläche eine Tangente, so erhält man die horizontale Spur der gesuchten Ebene.
3. Bestimme man die vertikale Spur der Berührungserzeugenden, so wird dieser Punkt der vertikalen Spur der Tangentialebene angehören; nehme so dann auf der Berührungserzeugenden einen Punkt noch an, und ziehe durch diesen eine Parallele mit der horizontalen Spur der Tangentialebene, suche von dieser Parallelen die vertikale Spur, und ziehe durch letztere nach der vertikalen Spur der Berührungserzeugenden eine Gerade, so wird diese die vertikale Spur der gesuchten Ebene sein.

(Fig. 156.) Soll z. B. für die entwickelbare Schraubenfläche eine Tangentialebene bestimmt werden, deren Berührungspunkt durch seine Projektionen (B_1, B_1') angegeben ist, so lege man durch diesen Punkt die Erzeugende der Fläche ($B_1 B_2, B_1' B_2'$), durch die horizontale Spur B_1 dieser Erzeugenden lege man an die Evolvente $AB_1 Q_1$ eine Tangente, so erhält man die horizontale Spur der Tangentialebene, von welcher nun die vertikale Spur leicht angegeben werden kann, wenn man die in (3.) gegebenen Mittel benützt.

§. 274.

Aufgabe 27. Durch einen ausserhalb einer entwickelbaren Fläche angegebenen Punkt an diese eine Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Da eine entwickelbare Fläche (§. 252.) von einer Ebene nach einer ganzen Erzeugenden berührt wird, so ist diese Aufgabe eine ganz bestimmte. Um nun dieselbe zu lösen, denken wir uns die horizontale Tafel so weit parallel zu ihrer ersten Lage verschoben, bis dieselbe den gegebenen Punkt enthält, bestimmen ihre neue horizontale Spur, indem wir die Durchgangspunkte einer grossen Anzahl von Lagen ihrer Erzeugenden mit der neuen horizontalen Tafel bestimmen, und diese Punkte sodann durch eine stätige Curve verbinden. Legen wir nun an letztere eine Tan-

gente, die durch den gegebenen Punkt geht, so erhielte man hierdurch die horizontale Spur der Tangentialebene (§. 254.), wenn die horizontale Tafel in der verlangten Lage wäre. Da aber diese Tangente zur vertikalen Projektion eine mit X parallele Gerade hat, und zur horizontalen Projektion eine Tangente an die neue horizontale Spur der Fläche, so wird dieselbe jedenfalls, weil sie noch ausserdem den gegebenen Punkt enthält, in der gesuchten Tangentialebene liegen, und zwar eine Parallele zur horizontalen Spur der letzteren sein. Zieht man daher parallel zur horizontalen Projektion dieser Parallelen an die erste horizontale Spur der Fläche eine Tangente, so wird diese die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene sein. Die vertikale Spur der letzteren wird man bestimmen können, wenn man die Berührungserzeugende sucht, und die früher (in §. 273., 3.) angegebenen Mittel benützt.

§. 275.

Aufgabe 28. Parallel zu einer gegebenen Geraden an eine entwickelbare Fläche eine Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Um diese Aufgabe zu lösen, wollen wir eine der Tafeln parallel zur gegebenen Geraden legen, und die Spur der Fläche für diese neue Lage der Tafel bestimmen. Nun wissen wir (§. 254.), dass die entsprechende Spur der Tangentialebene Tangente der Spur der Fläche sein muss, ferner muss die Tangentialebene parallel zur gegebenen Geraden sein, und folglich ist die Commonsektion der Tangentialebene mit der Tafel, die zur gegebenen Geraden parallel ist, eine Parallele zu dieser Geraden. Legen wir daher die horizontale Tafel parallel zur gegebenen Geraden, (mithin so, dass die Axe X parallel zur vertikalen Projektion der Geraden wird), und suchen die horizontale Spur der Fläche, legen sodann an diese Spur eine Tangente parallel zur (horizontalen Projektion der) Geraden, so erhält man die horizontale Spur der gesuchten Tangentialebene, und kann zugleich die Berührungserzeugende der letzteren konstruieren. Durch diese Berührungserzeugende kann man nun auch die vertikale Spur der Tangentialebene angeben. Sollte man die horizontale Tafel in eine ihr schon vorher gegebene Lage wieder zurückbringen, so ist zwar jene an die neue horizontale Spur der Fläche parallel zur gegebenen Geraden gezogene Gerade nicht die horizontale Spur der Tangentialebene, allein in dieser ist jene Parallele enthalten, und die Berührungserzeugende ist ebenfalls der Tangentialebene angehörig, so dass also hierdurch die Tangentialebene dennoch bestimmt

werden kann, wenn auch die horizontale Tafel in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht wurde, in welcher sie nicht parallel zur gegebenen Geraden ist.

Viertes Kapitel.

Durchschnitte entwickelbarer Flächen durch Ebenen, Konstruktion dieses Durchchnittes, Entwicklung derselben und des zwischen dem letzteren und der Direktrix enthaltenen Theiles der Fläche.

§. 276.

Der Durchschnitt einer Fläche und einer Ebene ist eine Linie und zwar diejenige ebene Curve, welche der Ort aller Durchschnittspunkte der Erzeugenden der Fläche mit der Durchschnittsebene ist.

§. 277.

Wird ein Cylinder durch eine Ebene geschnitten, die parallel zur Ebene der Direktrix ist, so erhält man (§. 256.) eine der Direktrix kongruente Figur, in jedem andern Falle aber erhält man eine von der Direktrix verschiedene Durchschnittsfigur. Wird nun ein Kegel von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Direktrix ist, und wir sollen den Schnitt untersuchen, so wollen wir zu diesem Zwecke um die Direktrix des Kegels ein Polygon von einer beliebigen Anzahl Seiten beschreiben, ohne diese Seitenzahl zu berücksichtigen, sodann dieses Polygon als Direktrix einer Pyramide betrachten, welche mit dem Kegel ein gemeinschaftliches Centrum hat. Diese Pyramide wird nun von der Durchschnittsebene des Kegels nach einem Polygone geschnitten, das um die gesuchte Durchschnittsfigur des Kegels und in jener Ebene beschrieben ist, und statt dieser Figur, weil man ihre Seitenzahl unberücksichtigt lässt, gesetzt werden kann. Es ist aber dieses Polygon, nach welchem die Pyramide von der Durchschnittsebene geschnitten wird, (§. 178.) ähnlich der Direktrix, folglich muss auch die Figur, nach welcher der Kegel von der mit seiner Direktrix parallelen Ebene geschnitten wird, der Direktrix ähnlich sein. Hieraus folgt also der Satz:

Schneidet man einen Kegel durch eine Ebene, die parallel zur Direktrix ist, so erhält man eine der Direktrix ähnliche Figur; oder allgemein: schneidet man einen Kegel durch mehrere parallele Ebenen, so erhält man ähnliche Durchschnittsfiguren.

Anmerk. Dieser Satz wurde seiner grossen Wichtigkeit und Anwendung halber nochmals erwähnt. Wir ersehen hieraus ferner, dass die für die Pyramide (§. 178. und §. 179.) bewiesenen Sätze auch für den Kegel gelten, weil man denselben mit einer Pyramide vertauschen kann, die dasselbe Centrum und eine Direktrix hat, die statt der des Kegels gesetzt werden kann, wenn auf ihre Seitenzahl nicht Rücksicht genommen wird.

§. 278.

Aufgabe 29. Es ist ein Cylinder gegeben, der von einer Ebene geschnitten wird, man soll

1. die Projektionen der Durchschnittslinie,
2. ihre wahre Grösse bestimmen,
3. für einen beliebigen Punkt derselben eine Tangente an dieselbe legen.
4. den zwischen der Durchschnittsebene und der Direktrix enthaltenen Theil des Cylinders entwickeln, und an den entwickelten Schnitt eine Tangente legen.

Auflösung. Ad. 1. Um diese Aufgabe zu lösen, lege man vor Allem das Coordinatensystem so, dass die Konstruktionen nicht zu unbequem werden. Man lege daher die horizontale Tafel senkrecht auf die Richtung der Erzeugenden des Cylinders und die vertikale Tafel senkrecht auf die Durchschnittsebene, so wird die vertikale Projektion der Durchschnittsfigur (§. 83. Anmerk.) in der vertikalen Spur der Schnittebene liegen und derjenige Theil dieser Spur sein, welcher zwischen den äussersten Erzeugenden des Cylinders liegt; die horizontale Projektion des Schnittes wird, weil die Erzeugende in allen ihren Lagen diesen Schnitt treffen wird, und auf der horizontalen Tafel senkrecht bleibt, mit der horizontalen Spur des Cylinders zusammenfallen. Hierdurch ist die erste Aufgabe gelöst.

Ad. 2. Um die wahre Grösse der Durchschnittscurve zu bestimmen, kann man entweder die Durchschnittsebene umlegen, und in dieser so viele Punkte der Durchschnittslinie angeben (§. 230.), dass man durch stätige Verbindung derselben dieselbe ziehen kann; oder man kann die Schnittebene so weit drehen, bis dieselbe parallel zur horizontalen Tafel wird, die einzelnen Punkte der Durchschnittslinie bei dieser Drehung verfolgen, und ihre andern Pro-

jektionen bestimmen, so wird die neue Projektion dieser Linie ihre wahre Grösse angeben. Um aber diese neue horizontale Projektion zu erhalten, nehmen wir eine auf der vertikalen Tafel senkrecht stehende Gerade an, um welche sich die Ebene während ihrer Bewegung bis zum Parallelismus mit der horizontalen Tafel dreht, so wird jeder Punkt einen Kreisbogen beschreiben, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe ist. Es beschreibt daher jeder Punkt der Durchschnittslinie einen Kreisbogen, dessen Ebene parallel zur vertikalen, und mithin senkrecht auf der horizontalen Tafel ist; folglich beschreibt die vertikale Projektion eines jeden Punktes der Durchschnittslinie einen Kreisbogen, dessen Halbmesser so gross ist, als die Entfernung des betreffenden Punktes von der vertikalen Spur der Drehungsaxe. Da nun die Durchschnittsebene auch senkrecht auf der vertikalen Tafel bleibt, wenn sie parallel zur horizontalen Tafel gedreht wurde, so wird in ihre neue vertikale Spur, welche eine durch die vertikale Spur der Drehungsaxe mit X gezogene Parallele ist, die neue vertikale Projektion der Durchschnittslinie zu liegen kommen. Nimmt man daher auf der vertikalen Projektion der Durchschnittslinie eine beliebige Anzahl von Punkten an, beschreibt sodann von der vertikalen Spur der Drehungsaxe aus mit den Entfernungen jener Punkte von dieser Spur aus letzterem Punkte Kreisbögen, so werden die Durchschnittspunkte dieser Kreisbögen mit der neuen vertikalen Spur der Schnittebene die neuen vertikalen Projektionen von Punkten der Durchschnittslinie sein. Hiezu sollen jetzt die horizontalen Projektionen angegeben werden. Die horizontale Projektion eines jeden Punktes der Durchschnittsfigur wird in der Spur der Ebene des Kreisbogens liegen, den der Punkt beschreibt, und da diese horizontalen Spuren der Kreisbögen Parallele zur Axe sind, so hat man nur von den horizontalen Projektionen der angenommenen Punkte der Durchschnittslinie Parallele zur Axe X zu ziehen, und diese von Geraden zu durchschneiden, die senkrecht auf X durch die neuen vertikalen Projektionen von Punkten der Durchschnittslinie gezogen werden. Die erhaltenen Durchschnittspunkte in gehöriger Ordnung stätig verbunden, geben die neue horizontale Projektion der Durchschnittslinie, welche gleich ihrer wahren Grösse ist.

Ad. 3. Ist ein Punkt auf dem Durchschnitte durch seine Projektionen angegeben, und man soll für diesen eine Tangente der Durchschnittslinie finden, so lege man für diesen Punkt an die Cylinderfläche (nach §. 258.) eine Tangentialebene, und es muss sodann in dieser (§. 232.) die gesuchte Tangente enthalten sein, weil die Curve, für welche

durch den angegebenen Punkt eine Tangente gezogen werden soll auf der Cylinderfläche sich befindet. Die gesuchte Tangente muss sich aber auch auf der Schnittebene befinden, weil jene in der Ebene der Durchschnittslinie liegen muss; folglich ist die gesuchte Tangente der letzteren, Communsektion der Schnittebene und der durch den angegebenen Punkt an die Cylinderfläche gelegten Tangentialebene. Um also für einen beliebigen Punkt der Durchschnittscurve an diese eine Tangente zu ziehen, lege man durch diesen Punkt eine Tangentialebene an den Cylinder (§. 258.), suche den Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene der Curve (§. 110.), so wird diese Communsektion die Durchschnittslinie des Cylinders und der angegebenen Ebene tangiren, und daher die gesuchte Gerade sein.

Bei der Aufsuchung der wahren Grösse der Durchschnittslinie kann man auch die Lage ihrer Tangente angeben. Es liegt nämlich letztere in der Schnittebene, und man kann daher den Berührungspunkt sowohl, als noch einen zweiten Punkt der Tangente angeben, wenn man beim Umlegen der Durchschnittsebene in eine der Tafeln die in §. 150. angegebenen Regeln befolgt. Diese zwei Punkte verbinde man durch eine Gerade, so erhält man die Tangente der Durchschnittsfigur.

Ad. 4. Nun soll der zwischen der Durchschnittsebene und der horizontalen Tafel enthaltene Theil der gegebenen Cylinderfläche entwickelt werden. Aus §. 244. ist bekannt, dass wenn man einen Cylinder durch eine Ebene schneidet, die senkrecht auf der Richtung seiner Erzeugenden ist, die Durchschnittslinie bestimmt, und sodann den Cylinder entwickelt, diese Durchschnittslinie sich nach der Entwicklung in eine Gerade verwandelt, welche gleich ihrer ursprünglichen Länge ist, und senkrecht auf der Richtung der Erzeugenden des Cylinders bleibt; die einzelnen Lagen der Erzeugenden aber ihre Längen nicht ändern. Ein solcher senkrechter Schnitt des Cylinders ist aber im vorliegenden Falle schon bekannt, nämlich die horizontale Spur des Cylinders (weil die horizontale Tafel senkrecht auf der Richtung jener Erzeugenden steht); theilt man daher die horizontale Spur des Cylinders in gleiche Theile und zwar in so viele, dass jeder einzelne Theil als eine Gerade angenommen werden kann, zieht eine beliebige Gerade, und trägt auf diese alle Elemente der horizontalen Spur des Cylinders nach und nach, so ist hierdurch diese horizontale Spur entwickelt.

Zieht man nun ferner durch die einzelnen Theilungspunkte der horizontalen Spur des Cylinders Parallele zu seiner Erzeugenden, so werden die zwischen der Axe X und der vertikalen Spur der Schnittebene enthaltenen Theile dieser Parallelen gleich den wahren Längen derjenigen Theile dieser Parallelen sein, die sich zwischen der horizontalen Tafel und der Schnittebene befinden. Wenn man also von den einzelnen Theilpunkten der entwickelten horizontalen Spur des Cylinders senkrechte Gerade auf letztere fällt, und jede so lang macht, als der Theil der entsprechenden Lage der Erzeugenden lang ist, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der Schnittebene liegt, sodann die einzelnen Endpunkte jener Senkrechten durch Gerade in gehöriger Ordnung verbindet, so erhält man eine Curve, welche gleich der entwickelten Durchschnittslinie ist, und die zwischen dieser Linie und der entwickelten horizontalen Spur des Cylinders enthaltene Figur wird von der Cylinderfläche denjenigen entwickelten Theil angeben, der zwischen der horizontalen Tafel und der Durchschnittsebene liegt. —

Um endlich noch an die entwickelte Durchschnittscurve eine Tangente für den auf ihren Projektionen angegebenen Berührungspunkt zu bestimmen, ziehe man durch den Berührungspunkt eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders, und suche ihre wahre Lage in der entwickelten Fläche, so wird ihr Durchschnitt mit der entwickelten Durchschnittslinie den Berührungspunkt der Tangente dieser Linie angeben. Diese Tangente macht aber mit dieser Erzeugenden nach der Entwicklung denselben Winkel, unter welchem sich vorher diese beiden Linien neigten (nach §. 245.); sucht man daher (nach §. 134.) diesen Winkel, und legt denselben in dem Berührungspunkte der entwickelten Durchschnittslinie an die entsprechende Lage der Erzeugenden, so erhält man die gesuchte Tangente des entwickelten Schnittes. Diese Tangente für den auf dem entwickelten Schnitte angegebenen Berührungspunkt kann auch auf andere Weise noch erhalten werden. Verlängert man nämlich die Tangente bis zur horizontalen Tafel, so wird der zwischen ihrer horizontalen Spur und dem angegebenen Berührungspunkte enthaltene Theil derselben (§. 88.) die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sein, dessen eine Kathete die vertikale Ordinate des Berührungspunktes (also die Länge der schon angegebenen Berührungserzeugenden) ist, und dessen andere Kathete gleich dem Theile der horizontalen Projektion der Tangente sein muss, welcher zwischen der horizontalen Projektion des Be-

rührungspunktes und der horizontalen Spur der Tangente liegt. Trägt man daher diese Kathete von dem Fusspunkte der Berührungserzeugenden (ihrem Durchschnittspunkte mit der entwickelten horizontalen Spur des Cylinders) aus auf die entwickelte horizontale Spur des Cylinders, so wird der hierdurch erhaltene Endpunkt der Tangente des entwickelten Schnittes angehören. Von diesem Punkte aus nach dem Berührungspunkte eine Gerade gezogen, gibt daher die gesuchte Tangente. —

§. 279.

Beispiel. (Fig. 163.) Es sei A L G D die horizontale Spur eines auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Cylinders, 'A P R G' die vertikale Projektion dieses Cylinders und S₁ S' S₁ eine Ebene, welche den Cylinderschneidet; man soll die im vor. §. gelösten Aufgaben an diesem Beispiele zeigen.

1. Da der Cylinder senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so wird (nach §. 278. 1.) A B C D E G L die horizontale und 'a g' die vertikale Projektion der Durchschnittslinie des Cylinders mit Ebene S₁ S' S₁ sein.
2. Legt man Ebene S₁ S S' um S' S' in die vertikale Tafel, zieht sodann die Senkrechten 'a A₁, 'b B₁, 'c C₁, 'd D₁, 'e E₁, 'f F₁, 'g G₁, und macht 'a A₁ = 'A A₁, 'b B₁ = B B', 'c C₁ = C C' etc. etc., verbindet die hierdurch erhaltenen Punkte A₁, B₁, C₁ etc. etc. durch eine stätige Curve, so erhält man die Linie A₁ D₁ G₁ L₁, welche die wahre Grösse des gesuchten Durchschnittes ist.

Um die wahre Grösse auch nach der zweiten Methode anzugeben, nehme man die Gerade (D D', d') als Drehungsaxe, und drehe die Ebene S₁ S' S₁ um (D D', d') so weit, bis dieselbe parallel zur horizontalen Tafel wird, so bleiben vor Allem die Punkte (D, d') und (L, d') der Durchschnittscurve liegen, die vertikale Spur der Schnittebene S₁ S' S₁ kommt aber nach s' g' zu liegen, nämlich nach der Geraden, welche durch d' parallel zu X gezogen werden kann. Beschreibt man nun von d' aus mit den Längen d' S, d' a', d' b' etc. etc. als Halbmesser die Kreisebögen S s', a' a', b' b', etc. etc., so erhält man die Punkte s', a', b', c' etc. etc., welche die neuen vertikalen Projektionen der Punkte (s, S), (A, a'), (B, b') etc. etc. sind, und mithin ist a' g' die neue vertikale Projektion der Durchschnittslinie. Zieht man nun s s', ≠ A a', ≠ B b', ≠ C c', ≠ D d', etc. etc. ≠ X, sodann a₁ a', ≠ b₁ b', ≠ c₁ c', ≠ d' d', etc. etc. ≠ D' d', so erhält man die Punkte a₁, b₁, c₁, d₁ etc. etc., welche die neuen ho-

horizontalen Projektionen der Punkte $(s, S), (A, a'), (B, b'), (C, c'), (D, d')$ etc. etc. sind. Zieht man nun die krumme Linie $a_1 L g_1 D$, so erhält man die neue horizontale Projektion der Durchschnittslinie, welche zugleich die wahre Grösse dieses Durchschnittes angibt.

3. Um nun für den Punkt (C, c') eine Tangente an die Durchschnittslinie zu ziehen, wissen wir (aus §. 256.), dass die Projektionen der Tangente einer Curve, Tangenten der Projektionen der Curve für die Projektionen des Berührungspunktes sind; wir werden daher (nach §. 205.) durch C an die Linie $ADGL$ die Tangente Cs ziehen, so wird letztere die horizontale Projektion der gesuchten Tangente sein, die vertikale Projektion der letzteren aber wird mit $a'g'$ zusammenfallen. Bei der Umdrehung der Ebene um (DD', d') bis zum Parallelismus zur horizontalen Tafel, wird der Punkt (C, c') nach (c_1, c'_1) kommen und die horizontale Spur s der Tangente $(Cs, c'S)$ nach (s, s') ; zieht man die Gerade $c_1 s_1$, so ist letztere die Tangente der Durchschnittslinie $a_1 D g_1 L$ für den Punkt (c_1, c'_1) . — In der Durchschnittslinie $A_1 D_1 G_1 L_1$ ist C_1 der wahre Ort des Punktes (C, c') , und da bei der Umlegung der Ebene $S_1 S'S_1$ in die vertikale Tafel s nach s_2 kömmt, (wobei nach §. 130. $s_2 S = S'S_1$ und $s_2 S = Ss$ gemacht wurde), so wird $C_1 s_2$ die Tangente der Linie $A_1 D_1 G_1 L_1$ sein. —

4. Zieht man die beliebige Gerade $Y_1 Y_2$, trägt auf diese die Theile des senkrechten Schnittes $ADGL$ auf, indem man $A_2 B_2 = B_2 C_2 = C_2 D_2 = \text{etc. etc.} = N_2 A_2 = AB$ macht, so wird $A_2 A_2 = ADGL$ sein. Errichtet man nun die Geraden $A_2 a_2, B_2 b_2, C_2 c_2$ etc. etc. senkrecht auf $Y_1 Y_2$, macht $A_2 a_2 = A'a, B_2 b_2 = B'b, C_2 c_2 = C'c$ etc. etc., und verbindet die Punkte a_2, b_2, c_2 etc. etc. stätig, so wird die Curve $a_2 g_2 a_2$ die Entwicklung der Durchschnittslinie ($ADGL, a'g'$), und $a_2 g_2 a_2 A_2 A_2$ die Entwicklung des Cylinderstückes ($ADGL, ag'$) sein. Macht man nun $C_2 s_3 = Cs$, und zieht $c_2 s_2$, so ist diese Gerade $c_2 s_3$ die Tangente der Linie $a_2 g_2 a_2$ für den Punkt c_2 , dessen Projektionen die Punkte C und c sind. —

§. 280.

Aufgabe 30. Ein beliebiger Cylinder ist von einer Ebene geschnitten, die auf keiner der Tafeln senkrecht steht; man soll

1. die Durchschnittscurve bestimmen;

2. für einen beliebigen Punkt derselben eine Tangente suchen.

3. die wahre Grösse des Durchschnittes angeben, und

4. den zwischen der horizontalen Tafel und der Schnittebene enthaltenen Theil der Cylinderfläche entwickeln.

Auflösung. Ad 1. Um die Projektionen des Durchschnittes anzugeben, können wir verschiedene Verfahrungsarten anwenden, durch welche Punkte der Durchschnittscurve erhalten werden:

a. Können wir die horizontale Spur des Cylinders aufsuchen, sodann parallel zur horizontalen Tafel Ebenen legen, welche sowohl den Cylinder, als auch die gegebene Ebene schneiden. Da nun diese einzelnen Durchschnittscurven kongruent der horizontalen Spur des Cylinders sind, so kann man dieselben finden, und es werden die Punkte, in welchen diese einzelnen Schnitte von den Communsektionen der gegebenen Ebene mit den einzelnen Hülfebenen getroffen werden, dem gesuchten Schnitte angehören. Wäre also z. B. die horizontale Spur des Cylinders ein Kreis, und man schneidet den Cylinder durch eine mit der horizontalen Tafel parallele Hülfebene, so wird die horizontale Projektion des Durchschnittes wieder ein Kreis von demselben Halbmesser sein, den die horizontale Spur des Cylinders hat. Die Communsektion dieser Hülfebene und der gegebenen Ebene kann (§. 110.) leicht angegeben werden, indem die vertikale Projektion derselben mit der vertikalen Spur der Hülfebene zusammenfällt, und ihre horizontale Projektion parallel zur horizontalen Spur der gegebenen Ebene sein und durch die horizontale Projektion desjenigen Punktes gehen muss, in welchem sich die vertikalen Spuren beider Ebenen schneiden. Die zwei Punkte nun, in welchen diese Communsektion die Durchschnittscurve der Hülfebene und des Cylinders trifft, gehören dem gesuchten Schnitte an, und es können durch genügsame Wiederholung dieses Verfahrens so viele Punkte erhalten werden, als zur Zeichnung jenes Schnittes nothwendig sind. —

b. Legt man parallel zur Erzeugenden des Cylinders eine beliebige Ebene, so schneidet diese (§. 235.) den Cylinder nach Erzeugenden, die mit G_1 und G_2 bezeichnet sein sollen, und erhalten werden können, wenn man durch die Punkte, in welchen die horizontale Spur des Cylinders von der horizontalen Spur der

Hülfebene getroffen wird, Parallele zur Erzeugenden des Cylinders legt. Die gegebene Ebene wird von der Hülfebene nach einer Geraden C geschnitten, die mit G_1 sowohl, als auch mit G_2 in einer Ebene, nämlich in der Hülfebene liegt, und (§. 110.) bestimmt werden kann. Da nun die gegebene Ebene (nach Voraussetzung) den Cylinder schneidet, so wird sowohl G_1 als auch G_2 von C geschnitten, und diese sollen in den Punkten p_1 und p_2 geschnitten werden. Nun liegen aber diese Punkte sowohl auf der Cylinderfläche, als auch auf der gegebenen Ebene, und gehören mithin der gesuchten Durchschnittslinie an, folglich sind p_1 und p_2 zwei Punkte, durch welche diese Linie gehen muss. Auf gleiche Weise kann man zwei andere und überhaupt beliebig viele Punkte finden, die der gesuchten Durchschnittslinie angehören. Verbindet man diese Punkte in gehöriger Ordnung durch eine stätige Curve, so erhält man den gesuchten Schnitt.

c. Endlich können noch Punkte des letzteren dadurch erhalten werden, dass man von einzelnen Lagen der Erzeugenden des Cylinders die Durchgangspunkte mit der gegebenen Ebene aufsucht, diese Punkte werden sodann auch der gesuchten Durchschnittslinie angehören.

Ad. 2. Man lege für den gegebenen Berührungspunkt an den Cylinder eine Tangentialebene, suche die Communsektion der letzteren und der gegebenen Ebene, so wird dieser Durchschnitt die gesuchte Tangente sein.

Ad. 3. Die wahre Grösse des Durchschnittes wird hier am bequemsten erhalten, indem man die Schnittebene um eine ihrer Spuren dreht, in die entsprechende Tafel legt, und nun in dieser die Punkte aufsucht, deren Projektionen (in 1.) bestimmt wurden. Verbindet man diese Punkte in gehöriger Ordnung, so erhält man den gesuchten Schnitt.

Ad. 4. Soll nun der Cylinder mit dem erhaltenen Schnitte entwickelt werden, so lege man eine Ebene senkrecht auf die Richtung der Erzeugenden des Cylinders, suche die Durchschnittslinie (nach 1.), so wird letztere (nach §. 244.) sich bei der Entwicklung des Cylinders in ihrer Länge nicht ändern, und in eine Gerade verwandeln, die senkrecht auf der Erzeugenden des Cylinders steht. Man entwickle daher zuerst den zwischen dieser auf der Erzeugenden des Cylinders senkrechten Ebene und der horizontalen Tafel liegenden Theil des Cylinders, sodann den Theil des letzteren,

welcher zwischen jener Hülfebene und der gegebenen Ebene enthalten ist, so ist hierdurch die Aufgabe gelöst. —

§. 281.

Aufgabe 31. Es ist eine beliebige Curve im Raume angegeben; man soll den Durchschnitt derselben mit einer angegebenen Ebene aufsuchen.

Auflösung. Betrachtet man die gegebene Curve L als Direktrix eines Cylinders C_1 , dessen Generatrix senkrecht auf der vertikalen Tafel steht so wird die vertikale Spur S dieses Cylinders die vertikale Projektion von L sein. Es wird aber von der angegebenen Ebene E auch C_1 geschnitten und zwar nach einer Linie L_1 , welche mit L einige Punkte gemein haben wird, und deren vertikale Projektion S sein muss. Diese Punkte liegen aber zugleich in E , und werden mithin dem Durchschnitt von C und E angehören; wenn man daher den Schnitt von C_1 und E horizontal projicirt (nach §. 280.), so wird die horizontale Projektion von L_1 , nämlich S , die horizontale Projektion von L schneiden, und hierdurch erhält man die horizontalen Projektionen von Punkten des gesuchten Durchschnittes. Die vertikalen Projektionen dieser Punkte können nun (§. 226.) erhalten werden, wenn man von ihren horizontalen Projektionen aus Senkrechte auf die Axe X zieht, und die Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit S aufsucht. —

§. 282.

Aus §. 237. ist bekannt, dass jede konische Fläche entwickelbar ist. Ist nun die Grundfläche eines Kegels sowohl, als auch sein Centrum, und mithin auch seine Generatrix gegeben, und man theilt den Umfang der Grundfläche in eine beliebige Zahl gleicher Theile, legt sodann durch jeden Theilungspunkt eine Lage der Erzeugenden, so wird die Kegelfläche in ebenso viele Theile getheilt, und wenn die einzelnen Theile der Direktrix geradlinig sind, so werden die Theile des Kegels als ebene Dreiecke betrachtet werden können, deren Scheitel gemeinschaftlich und im Centrum des Kegels ist, deren Grundlinien aber die Elemente der Direktrix sind. Entwickelt man daher die Kegelfläche, so werden für die Entwicklung, weil man auf die Anzahl der Theile, in welche dieselbe getheilt ist, nicht Rücksicht nimmt, dieselben Sätze gelten, welche in §. 184. für die Entwicklung einer Pyramide angegeben wurden, und mithin können wir folgende Sätze aussprechen:

1. Entwickelt man einen Kegel, so werden die Theile seiner Erzeugenden, welche zwischen dem Centrum und seiner Grundfläche liegen nach der Entwicklung dieselben Längen haben, welche dieselben vor der Entwicklung hatten, und die einzelnen Elemente der Direktrix behalten ihre vorige Längen.

2. Die einzelnen Erzeugenden bilden unter sich und mit den Elementen der entwickelten Direktrix dieselben Winkel, welche sie vorher machten, folglich macht jede Erzeugende mit der durch ihren Endpunkt gehenden Tangente der Entwicklung der Direktrix nach der Entwicklung des Kegels denselben Winkel, welchen dieselbe vor der Entwicklung mit derselben Tangente bildete.

3. Die Direktrix verwandelt sich nach der Entwicklung in eine Linie von ursprünglicher Länge, aber von anderer Form, und es sind also die einzelnen Elemente der entwickelten Direktrix gleich denen der Direktrix, ferner bleiben die Tangenten der Direktrix auch tangierend für ihre Entwicklung.

4. Ist der Kegel ein gerader Kreiskegel, so wird, weil (nach 1.) die einzelnen Erzeugenden derselben nach der Entwicklung ihre vorige Länge behalten, die Direktrix sich in einen Kreisumfang verwandeln, dessen Centrum das des Kegels, und von welchem der Halbmesser gleich der Seite des Kegels ist. In diesem Falle verwandelt sich also der Kegel nach der Entwicklung in einen Kreissektor.

§. 283.

Aufgabe 32. Es sei ein senkrechter Kreiskegel gegeben, welcher von einer Ebene geschnitten wird; man soll

1. den Durchschnitt durch seine Projektionen angeben,
2. die wahre Grösse dieses Durchschnittes bestimmen,
3. für einen beliebigen Punkt der Durchschnittscurve eine Tangente derselben angeben,
4. den zwischen der Schnittebene und der Direktrix enthaltenen Theil der

Kegelfläche entwickeln, und an die Entwicklung des Schnittes eine Tangente legen.

Auflösung. Ad. 1. Zur bequemen Zeichnung des Durchschnittes lege man die horizontale Tafel durch die Ebene der Direktrix (hier der Grundfläche) und die vertikale Tafel senkrecht auf die Schnittebene, so wird der Theil der vertikalen Spur der Schnittebene, welcher zwischen den vertikalen Projektionen der äussersten Erzeugenden des Kegels enthalten ist, die vertikale Projektion des gesuchten Schnittes sein. Um die horizontale Projektion dieses Schnittes zu erhalten, nehme man auf demselben beliebig viele Punkte an, und ziehe durch jeden dieser Punkte Ebenen, die parallel zur horizontalen Tafel sind, so wird jede dieser Ebenen den Kegel nach einem Kreise schneiden, dessen horizontale Projektion diesem Schnitte kongruent ist und in dem Mittelpunkt der gegebenen Grundfläche ihren Mittelpunkt hat. Halbirt man daher die vertikale Spur einer solchen Hülfebene, und beschreibt mit ihrer Hälfte vom Mittelpunkte der Grundfläche aus in der horizontalen Tafel einen Kreis, durchschneidet sodann den letzteren durch eine auf X senkrecht stehende Gerade, welche vom Durchschnitte der vertikalen Spur der Hülfebene mit der der gegebenen Ebene gezogen wird, so erhält man die horizontalen Projektionen zweier Punkte, die dem gesuchten Schnitte angehören. Wiederholt man dieses Verfahren, so wird man eine hinreichende Anzahl von Punkten finden können, durch welche die horizontale Projektion des gesuchten Schnittes gehen muss, und bestimmt werden kann. Diese horizontale Projektion kann man auch noch dadurch erhalten, dass man auf der vertikalen Projektion des Schnittes beliebig viele Punkte und eine grosse Anzahl derselben annimmt, durch jeden die vertikale Projektion einer Lage der Erzeugenden des Kegels legt, zu diesen die horizontalen Projektionen sucht, und auf diesen die horizontalen Projektionen jener Punkte aufsucht, deren vertikale Projektionen angegeben sind.

Ad. 2. Um die wahre Grösse des Schnittes anzugeben, denke man sich die Schnittebene um ihre vertikale Spur gedreht und in die vertikale Tafel gelegt, bestimme dann (nach §. 140.) die Länge der einzelnen Schnittpunkte in dieser umgelegten Ebene, verbinde dieselben durch eine stätige Curve, so wird diese der gesuchte Schnitt sein.

Ad. 3. Ist ein Punkt angegeben, von welchem man an den Schnitt eine Tangente legen soll, so kann man wieder zuerst durch den gegebenen Punkt an den Conus eine Tangentialebene (nach §. 266.) legen. Da nun (nach §. 233.) die letztere die gesuchte Tangente enthalten muss, da ferner diese

Tangente in der Schnittebene enthalten ist, so wird die Communktion dieser beiden Ebenen die gesuchte Tangente sein. Nun ist aber die vertikale Projektion dieser Tangente in der vertikalen Spur der Schnittebene enthalten, und es ist also durch letztere die vertikale Projektion der gesuchten Tangente bekannt. Die horizontale Projektion der Communktion jener beiden Ebenen wird erhalten (§. 110.), wenn man vom Durchschnittspunkte ihrer horizontalen Spuren aus nach der horizontalen Projektion des Berührungspunktes eine Gerade zieht. Da die horizontale Spur der Tangentialebene Tangente der horizontalen Spur der Berührungserzeugenden ist (nach §. 254.), so wird die horizontale Projektion der gesuchten Tangente erhalten, wenn man von der horizontalen Spur der den Berührungspunkt enthaltenden Erzeugenden des Kegels an die horizontale Spur des letzteren eine Tangente zieht, diese bis zu ihrem Durchschnitte mit der horizontalen Spur der Schnittebene verlängert, und von dem letzteren Punkte aus nach der horizontalen Projektion des Berührungspunktes eine Gerade zieht.

Ad. 4. Soll endlich der Kegel entwickelt werden, so weis man (aus §. 282.), dass sich seine horizontale Spur in einen Kreisbogen verwandelt, dessen Centrum das des Kegels, und dessen Radius gleich der Seite des letzteren ist. Beschreibt man daher aus einem beliebigen Punkte mit der Länge der Seite des Kegels einen Kreisbogen, so entwickelt sich auf diesem der Umfang der horizontalen Spur ab. Theilt man nun letzteren in gleiche Theile und zwar in so viele, dass jeder als eine Gerade betrachtet werden kann, und trägt diese einzelnen Theile auf jenen Kreisbogen, so erhält man den entwickelten Umfang der horizontalen Spur des Kegels und mithin seine entwickelte Direktrix. Von den einzelnen Theilungspunkten dieser entwickelten Grundlinie des Kegels nach seinem Centrum Gerade gezogen, so werden die letzteren mit den Elementen jener Linie Dreiecke bilden, welche die Elemente des Kegels sind. Sucht man nun die Längen jener Theile der Seiten dieses Kegels, welche zwischen seiner Grundfläche und der Schnittebene enthalten sind, und trägt in der Entwicklung der Kegelfläche auf seine Seiten der Ordnung nach jene Theile, verbindet die erhaltenen Endpunkte in gehöriger Ordnung, so erhält man den entwickelten Schnitt. Um endlich noch für einen auf dem letzteren gegebenen Punkt eine Tangente an diesen Schnitt zu legen, so weis man, dass diese gesuchte Tangente mit der durch den gege-

benen Punkt gezogenen Erzeugenden des Kegels nach der Entwicklung des letzteren denselben Winkel bildet, als vorher, und man würde daher leicht die Tangente erhalten, wenn man durch den gegebenen Punkt des entwickelten Schnittes eine Erzeugende des Kegels legen und an letztere in jenem Punkte eine Gerade anlegen würde, welche mit der Erzeugenden denselben Winkel bildet, den die Tangente von der Entwicklung mit dieser Erzeugenden machte. Uebrigens weis man, dass die Tangente der Direktrix auch nach der Entwicklung der letzteren noch tangierend an derselben bleibt, und ihre vorige Länge beibehält, folglich dürfen wir nur durch den auf dem entwickelten Schnitt angegebenen Punkt eine Erzeugende des Kegels legen, von dem Punkte der letzteren aus, der ihrer horizontalen Spur entspricht, auf dieselbe eine Senkrechte errichten und letztere so lange machen, als die von der horizontalen Spur derselben Erzeugenden an die Direktrix des Kegels gezogene Tangente lang gemacht wurde, den erhaltenen Endpunkt mit dem gegebenen Berührungspunkte durch eine Gerade verbinden, so erhält man die gesuchte Tangente des entwickelten Schnittes. —

§. 284.

Beispiel. (Fig. 164.) Es sei ABCDGL eine in der horizontalen Tafel liegende Kreislinie, welche die horizontale Spur eines Conus ist, (S, S') seien die Projektionen des Centrum dieses letzteren, und dieser wird von der Ebene S₁S₂S₁ geschnitten; man soll die Durchschnittslinie aufsuchen. Zieht man die Geraden A'A, B'B, C'C etc. etc. senkrecht auf X, so erhält man die vertikale Projektion A'G' der horizontalen Spur oder der Grundfläche des Kegels, und zieht man die Geraden SA, SB, SC etc. etc., ferner S'A, S'B, S'C etc. etc., so erhält man die horizontale Projektion SADGL und die vertikale Projektion S'A'G' des Kegels. Da nun SA ≠ X ist, so wird die Gerade (S'A', SA) parallel zur vertikalen Tafel und $\angle S'A'G'$ gleich dem Winkel sein, welchen die Seite des gegebenen Kegels mit der horizontalen Tafel macht. Nun ist $\angle S_1 S_2 X$ kleiner als $\angle S'A'X$, und da $\angle S_1 S_2 X$ der Neigungswinkel der Ebene S₁S₂S₁ gegen die horizontale Tafel ist, so wird unsere Schnittebene S₁S₂S₁ mit der Ebene der Grundfläche des Kegels einen kleineren Winkel bilden, als die Seite des Kegels mit seiner Grundfläche macht. Die Durchschnittslinie, welche man im vorliegenden Falle erhält, ist eine geschlossene Curve, und zwar eine Ellipse. Um nun diesen Schnitt zu erhalten, darf man nur die horizontalen Projektionen jener Punkte bestimmen, deren verti-

kale Projektionen in a' , b' , c' , d' , e' , f' , g' sind, und zu diesem Behufe ziehe man von diesen Punkten aus die Senkrechten $a'a$, $b'b$, $c'c$, $e'e$, ff und $g'g$ auf die Axe X , so werden die Geraden SA , SB , SC , SE , SF , SG etc. etc. von denselben durchschnitten, und man erhält hierdurch die Punkte a , b , c , e , f etc. etc., welche der horizontalen Projektion des gesuchten Durchschnittes angehören. Um die Punkte d und e zu bestimmen, lege man durch d' die Gerade x_5y_5 , und betrachte diese als vertikale Spur einer mit der horizontalen Tafel parallelen Ebene, so wird letztere den Kegel nach einer Linie schneiden, deren vertikale Projektion in x_5y_5 liegt, und deren horizontale Projektion die von S aus mit $Sp = d'p'$ beschriebenen Kreislinie ist, und im Durchschnitte dieser Kreislinie mit SD und SL werden die horizontalen Projektionen d und e jener Punkte sein, deren vertikale Projektionen in d' sind. Verbindet man nun die Punkte a , b , c , d etc. etc. durch eine stätige Curve, so erhält man die horizontale Projektion adg des gesuchten Schnittes. — Legt man nun die Ebene $S_1S_2'S_1$ um $S_2'S_1$ in die vertikale Tafel, zieht aA_1 , bB_1 , cC_1 etc. etc. senkrecht auf $S_2'S_1$, und macht $aA_1 = AA_1$, $bB_1 = BB_1$, $cC_1 = CC_1$ etc. etc., so werden die Punkte A_1 , B_1 , C_1 , D_1 etc. etc. in dieser umgelegten Ebene erhalten, und diese durch eine stätige Curve verbunden, geben die wahre Grösse der verlangten Durchschnittslinie $A_1D_1G_1L_1$. — Endlich soll noch der gegebene Kegel entwickelt werden; hierzu beschreibe man aus dem Punkte S mit der Länge $SA_2 = SA$ der Seite des Kegels einen Kreisbogen $A_2G_2A_2$, mache $A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2$ etc. etc. $= AB = BC =$ etc. etc., ziehe A_2S , B_2S , C_2S , D_2S etc. etc., so erhält man die Entwicklung A_2SA_2 des gegebenen Kegels. Nun suche man die Längen der einzelnen Theile der Erzeugenden, nämlich die Längen von (Aa') , (Bb') , (Cc') , (Cc) etc. etc., mache A_2a_1 , B_2b_1 , C_2c_1 etc. etc. gleich diesen einzelnen Theilen, und verbinde die Punkte a_1 , b_1 , c_1 etc. etc. durch eine stätige Curve, so wird $a_1b_1g_1l_1a_1$ der entwickelte Schnitt sein. — Zieht man Dt tangirend an $ADGL$, verbindet ferner den Punkt t mit dem Punkte d durch die Gerade dt , so wird letztere die horizontale Projektion der an der gesuchten Durchschnittslinie für (d, d') zu ziehenden Tangente. Zieht man endlich D_2T senkrecht auf d_1D_1 und, macht $D_2T = Dt$, zieht sodann Td_1 , so ist letztere Gerade die Tangente der Linie $a_1g_1n_1a_1$. —

Anmerk. 1. Schneidet man den gegebenen Conus durch die Ebene $S_3S_4'S_3$, so dass $\angle S_3S_4X = \angle SA'X$ wird, so erhält man eine offene in sich nicht zurückkehrende Curve als Schnitt, nämlich die Parabel, deren Pro-

jektionen $S_1a'_2$ und $f_1a_2e_2$ sind. Schneidet man endlich den Kegel durch Ebene $S_5S_6'S_5$, so dass $\angle S_5S_6X$ grösser als $\angle SA'X$ wird, so erhält man eine aus zwei Theilen bestehende Curve, deren einer im unteren, und deren anderer Theil im oberen Fache des Conus liegt; diese Curve ist die Hyperbel, und ihre horizontale Projektion ist durch die Curve nrq und Eq_1H bestimmt ist. In Fig. 164. a. ist der Kegel entwickelt und in dieser Entwicklung stellen die Curven $M_1N_1P_1$ und $M_2N_2P_2$, ferner $b_1a_1c_1$ und $b_2a_2c_2$ diese entwickelten Schnitte dar. —

Anmerk. 2. Die Tangente für einen beliebigen Punkt einer dieser Curven wird, wie schon §. 283. erwähnt wurde, gefunden, indem man durch den gegebenen Berührungspunkt eine Ebene legt, welche den Kegel tangirt, den Durchschnitt dieser und der Durchschnittsebene angibt, so wird die hierdurch erhaltene Communsektion die gesuchte Tangente sein. Dabei hat man aber nur, um die horizontale Projektion dieser Tangente anzugeben, von dem Punkte aus, in welchem die horizontale Spur der Tangentialebene die horizontale Spur der Schnittebene trifft, eine Gerade nach der horizontalen Projektion des Berührungspunktes zu ziehen.

Anmerk. 3. Es wurde schon (§. 219., Anmerk. 1.) erwähnt, dass die Asymptoten der Hyperbel Tangenten derselben sind, die ihre Berührungspunkte in unendlicher Entfernung haben. Da nun diese Asymptoten in der Schnittebene liegen müssen, so werden ihre Berührungspunkte in Erzeugenden des Conus liegen, die mit der Schnittebene parallel sind. Zieht man daher durch das Centrum des Conus eine Ebene parallel zur Schnittebene, so wird diese Hülfs Ebene den Conus (§. 239.) nach zwei Erzeugenden G_1 und G_2 schneiden. Betrachtet man nun die eine dieser Erzeugenden G_1 als Berührungserzeugende einer Tangentialebene, so wird in dieser — welche mit T_1 bezeichnet sein soll — eine Asymptote der Hyperbel liegen; folglich wird diese Asymptote der Durchschnitt von T_1 mit der Ebene der Hyperbel sein. Dieser Durchschnitt ist aber parallel mit G_1 , wenn man daher von dem Durchschnitte der horizontalen Spur von T_1 und der Schnittebene eine Gerade parallel mit der horizontalen Projektion von G_1 zieht, so erhält man die horizontale Projektion der einen Asymptote. Ebenso erhält man die horizontale Projektion der andern Asymptote, wenn man G_2 als Berührungserzeugende einer Tangentialebene T_2 betrachtet, von dem Durchschnittspunkte der horizontalen Spur von T_2 mit der horizontalen Spur der Ebene der Hyperbel (der gegebenen Schnittebene) aus eine Gerade parallel zur horizontalen Projektion von G_2 zieht. Durch diese beiden horizontalen Projektionen der Asymptoten sind dieselben nunmehr ganz und gar bestimmt, weil ihre vertikalen Projektionen in die vertikale Spur der Schnittebene fallen müssen.

§. 285.

Aufgabe 33. Es wird ein schiefer Kegel von einer Ebene geschnitten, man soll

1. die Durchschnichtsfigur und eine Tangente für einen auf derselben gegebenen Punkt bestimmen.
2. Den Kegel mit diesem Schnitte entwickeln.

Auflösung. Um die Durchschnichtsline zu finden, schneide man den Kegel durch Ebenen, welche durch sein Centrum gehen. Eine jede solche Ebene wird nun mit dem Kegel eine oder zwei Lagen seiner Erzeugenden gemeinschaftlich haben, und die gegebene Ebene schneiden. Da nun in der Communktion dieser und einer der Hülfebenen ein Punkt des Durchschnittes liegen muss, so werden die Punkte, in welchen diese Communktion von den Erzeugenden getroffen wird, nach welchen die Hülfebene den Kegel schneidet, dem gesuchten Schnitte angehören. Wenn man daher durch das Centrum des Conus eine Ebene E legt, ihre Durchschnitte G_1 und G_2 sucht, sodann den Durchschnitt C von E mit der Schnittebene angibt, dann die Punkte aufsucht, welche C mit G_1 und G_2 gemein hat, so erhält man Punkte, die in dem gesuchten Durchschnitte liegen, und durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man eine gehörige Anzahl von Punkten dieser Linie finden, um dieselbe auch ziehen zu können. — Sucht man die Durchgangspunkte von einzelnen Erzeugenden des Kegels mit der Schnittebene, so erhält man auch Punkte der gesuchten Durchschnichtsline. — Durch Umlegung der Schnittebene in eine der Tafeln kann man auch die wahre Gestalt dieser Linie finden, und eine Tangente derselben kann

man nach dem in §. 285. angegebenen allgemeinen Verfahren bestimmen. — Um nun den Kegel abzuwickeln, müsste man das in §. 184. für die Pyramide angegebene Verfahren anwenden; da aber dasselbe zu unbequem und weitläufig ist, so schlägt man ein anderes Verfahren ein, welches auf später entwickelte Sätze beruht. Man schneidet nämlich den Kegel durch eine Kugel, deren Centrum mit dem des Kegels zusammenfällt, sucht sodann den Durchschnitt dieser beiden Flächen, indem man durch das Centrum des Conus beliebige und eine gehörige Anzahl von Ebenen legt. Diese Ebenen schneiden nämlich den Kegel nach Erzeugenden und die Kugel — wie später erwähnt wird — nach grössten Kreisen und die Durchschnittspunkte dieser Kreislinie mit jenen Erzeugenden sind Punkte der Durchschnichtsline des Kegels und der Kugel. Legt man nun durch diese Durchschnichtsline einen auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Cylinder, entwickelt den letzteren, so erhält man auch die Entwicklung jener Linie. Beschreibt man nun mit einem Halbmesser, der gleich dem der Kugel ist, eine Kreislinie, trägt auf diese die Elemente der entwickelten Durchschnichtsline des Kegels und der Kugel, und zieht durch die Endpunkte dieser aufgetragenen Elemente die entsprechenden Erzeugenden des Kegels, so erhält man seine Entwicklung. Auf diese Erzeugenden trägt man nun die Längen der zwischen dem Centrum und der gegebenen Schnittebene enthaltenen Theile derselben, und verbindet die hierdurch erhaltenen Endpunkte, so erhält man auch die entwickelte und gesuchte Durchschnichtsline.

Dritte Abtheilung.

Von den krummlinig erzeugten Flächen überhaupt.

Fünftes Kapitel.

Rotationsflächen, Flächen vom zweiten Grade überhaupt und Umhüllungsflächen.

§. 286.

Bewegt sich irgend eine (ebene oder doppelt gekrümmte) Linie um eine fixe Gerade so, dass sie mit dieser in einer fixen Verbindung bleibt, und jeder Punkt der Erzeugenden von der Drehungsaxe seine anfängliche Entfernung behält, so entsteht hierdurch eine Fläche, welche man Rotations-, Revolutions- oder Umdrehungsfläche nennt. Die fixe Gerade, um welche sich jene Linie dreht, wird die Rotationsaxe oder Axe der Fläche genannt, während die erste die Generatrix genannt wird. — Da jeder Punkt der Generatrix während der Bewegung der letzteren einen Kreisbogen beschreibt, dessen Ebene senkrecht auf der Rotationsaxe (§. 22. 2.) ist, so folgt vor Allem der Satz:

Schneidet man eine Rotationsfläche durch eine Ebene, welche senkrecht auf der Axe ist, so ist der hierdurch erhaltene Schnitt ein Kreis, dessen Halbmesser die Entfernung des Durchschnittspunktes jener Ebene mit der Generatrix von der Axe ist.

Dieser Kreis wird Parallelkreis der Fläche genannt. Schneidet man die Fläche durch eine Ebene, welche die Rotationsaxe enthält, so erhält man eine Curve, welche der Meridian der Fläche genannt wird. — Ist nun die Generatrix eine ebene Curve, und liegt die Rotationsaxe in der Ebene der Generatrix, so wird auch letztere in allen ihren Lagen die Axe enthalten, folglich ist in diesem Falle ein Meridian gleich der Generatrix und alle Meridiane sind also auch einander gleich. Ist der Meridian eine in sich zurückkehrende ebene Curve, und man legt durch den Mittelpunkt der Axe eine Ebene senkrecht auf dieselbe, so entsteht ein Schnitt, welcher der grösste Parallelkreis sein wird; man nennt denselben Aequator. Die einzelnen Schnittebenen benennt

man nach ihren Schnitten, und unterscheidet daher Meridianebenen und Aequatorialebenen.

§. 287.

Ist der Meridian eine Kreislinie, von welcher die Rotationsaxe ein Durchmesser ist, so entsteht durch Bewegung jener Kreislinie um diese fixe Axe die Kugel. Nun kann man jeden Durchmesser der Generatrix als Axe der Fläche annehmen, weil diese keine andere Bedingung zu erfüllen hat, als dass sie mit dem Meridiane in einer fixen Verbindung bleibt und selbst ihre Lage nicht ändert; da aber ferner (nach §. 286.) jeder auf der Axe senkrechte Schnitt ein Kreis sein muss, und alle Meridiane gleich der Generatrix sein müssen, also hier jeder Meridian auch ein Kreis ist, so erhält man für jeden ebenen Schnitt auf der Kugel einen Kreis, und daraus folgt mithin der Satz: schneidet man eine Kugel durch irgend eine Ebene, so erhält man einen Kreis, als Durchschnitsfigur. Jeder Kreis welcher einen Durchmesser der Kugel enthält, wird grösster Kreis genannt.

§. 288.

Der Einfachheit wegen wollen wir die Rotationsaxe senkrecht auf die horizontale Tafel legen, so wird ihre horizontale Projektion mit ihrer horizontalen Spur zusammenfallen, und alle Parallelkreise projiciren sich horizontal als Kreise von ihrer wahren Grösse, ihre vertikalen Projektionen aber werden mit den vertikalen Spuren ihrer Ebenen zusammenfallen, und so gross als die Durchmesser dieser Kreise sein. Was nun die vertikale Projektion eines Meridians betrifft bei dieser Lage der Rotationsaxe, so wird dieselbe bestimmt, wenn man den Meridian als Direktrix eines Cylinders betrachtet, dessen Generatrix senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, sodann wird die vertikale Spur dieses Cylinders die vertikale Projektion des gegebenen Meridians sein; die horizontale Projektion des letzteren wird die horizontale Spur der Meridianebene sein. Dreht man nun die Meridianebene parallel zur vertikalen Tafel, so wird die vertikale Spur des den Meridian projicirenden Cylinders gleich

dem Meridian werden, während die horizontale Spur des Meridians in dieser Lage eine zur X parallele Gerade ist. —

§. 289.

Nach der Gestalt der Generatrix wird man auch verschiedene Arten von Rotationsflächen erhalten.

1. Es sei der Meridian ein Kreis, so erhält man, wie schon erwähnt, eine Kugel.

2. Ist der Meridian eine Ellipse, deren grosse Axe die Rotationsaxe ist, so entsteht hierdurch eine Fläche, deren Meridiane alle gleich der angegebenen Ellipse und deren Aequator die kleine Axe dieser Ellipse zum Durchmesser hat. Die hierdurch entstandene Fläche ist das Rotationsellipsoid oder das Ellipsoid mit zwei Axen. Wären die Axen des Meridians gegeben, so kann man die vertikale Projektion dieses Ellipsoides erhalten, wenn man senkrecht auf die Axe in der vertikalen Tafel eine Gerade zieht, auf diese von einem angegebenen Punkte aus die grosse Axe der gegebenen Ellipse trägt, und diese (nach §. 208.) konstruirt, so wird diese die vertikale Projektion des Ellipsoides sein, und zugleich die wahre Grösse eines Meridians (nach §. 288.) vorstellen. Nimmt man nun die horizontale Spur der Axe an, und zieht aus dieser als Mittelpunkt mit der halben kleinen Axe des Meridians einen Kreisbogen, so wird dieser die horizontale Projektion des Ellipsoides sein.

3. Ist die vertikale Projektion des Meridians eine Parabel, deren Axe die Rotationsaxe ist, und bewegt sich diese um letztere, indem beide stets in der angegebenen Verbindung bleiben, so entsteht hierdurch eine nicht in sich zurückkehrende Fläche, von welcher jeder Meridian die angegebene Parabel ist, und diese Fläche ist das Rotationsparaboloid. Begrenzt man die Fläche durch eine mit der horizontalen Tafel parallele Ebene, und projicirt diesen Schnitt, so wird seine vertikale Projektion eine auf der Rotationsaxe senkrechte Gerade sein, und seine horizontale Projektion ein Kreis, dessen Durchmesser gleich der vertikalen Projektion dieses Schnittes ist.

4. Hat eine Hyperbel in der Rotationsaxe ihre reelle Axe, und bewegt sich um diese, so entsteht hierdurch eine Fläche, von welcher jeder Meridian gleich dieser Hyperbel ist. Diese Fläche hat aber zwei ganz von einander getrennte Fächer, weil zwischen den beiden Aesten des Meridians kein Punkt der Generatrix liegt, also auch kein Punkt der Fläche liegen

kann, und wird Hyperboloid mit zwei Fächern genannt. Der Mittelpunkt des Meridians wird wieder der Mittelpunkt der Fläche sein.

5. Hat eine Hyperbel ihre imaginäre Axe in der Rotationsaxe, und erzeugt eine Fläche, so entsteht hierdurch eine Fläche, welche ein Fach hat, weil auf beiden Seiten der Rotationsaxe die Aeste der Hyperbel liegen. Dieses Fach ist aber wieder unbegrenzt, und mithin die Fläche eine nicht in sich zurückkehrende. Man nennt diese Fläche das Hyperboloid mit einem Fache. Der Scheitel einer Hyperbel wird einen Kreis beschreiben, dessen Umfang der Ort aller Scheitel der Meridiane dieser Fläche, und dessen Durchmesser gleich der reellen Axe der Hyperbel ist. Dieser Kreis wird Kehlkreis der Fläche genannt.

§. 290.

Die hier erklärten Flächen sind spezielle Fälle von folgenden:

1. Nimmt man eine Ellipse an, deren grosse Axe senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, und bewegt sich eine andere Ellipse so fort, dass ihr Mittelpunkt stets in der Axe der ersten, ihre Ebene senkrecht auf dieser Axe bleibt, ihre Axen ein konstantes Verhältniss behalten, und die erste Ellipse stets getroffen wird, so entsteht eine Fläche, die mit der ersten Ellipse zwei Axen und mit der letzten die konstante Axe gemein hat. Man nennt diese Fläche Ellipsoid mit drei Axen. Geht die erzeugende Ellipse in einen Kreis über, so erhält man ein Ellipsoid mit zwei Axen, also das in 1. des vor. §. beschriebene; folglich kann man ein Rotationsellipsoid auch dadurch erzeugen, indem sich ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Axe einer Ellipse ist, an dieser fortbewegt, und dessen Halbmesser nach und nach den einzelnen Sehnen der Ellipse gleich wird. — Geht diese Ellipse ebenfalls in einen Kreis über, so erhält man die Kugel.

2. Nimmt man eine Parabel als Direktrix, und lässt an dieser eine Ellipse sich so fortbewegen, dass die Ebene der letzteren senkrecht auf der Axe der Parabel bleibt, und die Ellipse mit dieser stets eine Sehne gemeinschaftlich hat, so entsteht hierdurch das elliptische Paraboloid. Geht die erzeugende Ellipse in einen Kreis über, so erhält man das Rotationsparaboloid.

3. Nimmt man wieder eine Parabel, an welcher sich eine Hyperbel so fortbewegt, dass ihre Ebene senkrecht auf der Axe der Parabel ist,

und das Verhältniss ihrer Axen dasselbe bleibt, ihre reelle Axe aber nach und nach in Sehnen der Parabel übergeht, so erhält man eine Fläche, welche man das hyperbolische Paraboloid nennt.

4. Bewegt sich eine Ellipse an einer Hyperbel so, dass ihre Axen stets ein konstantes Verhältniss gegen einander behalten, die eine Axe in Sehnen der Hyperbel übergeht, und die Ebene der Ellipse senkrecht auf der reellen Axe der Hyperbel bleibt, so entsteht hierdurch das elliptische Hyperboloid mit zwei Fächern. Geht die erzeugende Ellipse in einen Kreis über, so erhält man das Rotationshyperboloid mit zwei Fächern.

5. Bewegt sich wieder eine Ellipse auf die vorhin angegebene Weise, und bleibt dabei ihre Ebene stets senkrecht auf der imaginären Axe der Hyperbel, so entsteht hierdurch das elliptische Hyperboloid mit einem Fache. Auch dieses geht in das Rotationshyperboloid mit einem Fache über, wenn man statt der erzeugenden Ellipse einen Kreis nimmt.

Anmerk. 1. Diese hier angegebenen Flächen sind die fünf Flächen vom zweiten Grade. Man ersieht hieraus, dass man aus denselben, die in 3. angeführte ausgenommen, die in §. 289. angegebenen Rotationsflächen wieder ableiten kann, also diese eine zweifache Erzeugungsart zulassen.

Anmerk. 2. Ist der Meridian ein gleichschenkliges Dreieck, bewegt sich also eine die Rotationsaxe schneidende Gerade, so erzeugt dieselbe einen Kegel. Ist die Generatrix eine zur Rotationsaxe parallele Gerade, so entsteht die Cylinderfläche. Ist die Generatrix eine Gerade, welche weder parallel mit der Axe ist, noch diese schneidet, so entsteht das Rotationshyperboloid, welches in 5. des vor. §. erwähnt wurde. Die Eigenschaften dieser Fläche, welche aus dieser Erzeugungsart hervorgehen, werden noch später berücksichtigt.

§. 291.

Bewegt sich eine Fläche stätig fort, so werden ihre auf einander folgenden Lagen sich schneiden, und der geometrische Ort aller einzelnen Durchschnitte wird Umhüllungsfläche oder Umhüllung genannt. Die erzeugende Fläche wird Umhüllte und die einzelnen Durchschnitte ihrer konsekutiven Lagen werden Charakteristiken genannt. Bewegt sich z. B. eine Kugel so fort, dass ihr Mittelpunkt stets in einer gegebenen Geraden bleibt, so werden zwei konsekutive Lagen derselben eine Durchschnittslinie haben, die durch den Mittelpunkt der zweiten Lage geht und auf der Oberfläche einer jeden dieser Kugeln liegt. Der geometrische Ort aller dieser Charakteristiken ist nun die Umhüllung, und die Kugel die Umhüllte. —

§. 292.

Bewegt sich nun eine Fläche fort, und erzeugt eine neue Fläche, und ist die erste Stellung der Umhüllten S_1 , die zweite S_2 , die dritte S_3 etc. etc. Ist nun der Durchschnitt von S_1 und S_2 durch D_1 , der von S_2 und S_3 durch D_2 , der von S_3 und S_4 durch D_3 etc. etc. und der von S_4 und S_5 durch D_4 bezeichnet, so ist der geometrische Ort der Linien $D_1, D_2, D_3, \dots, D_4$ die erzeugte Fläche. Bewegt sich nun D_1 fort, und nimmt nach und nach die Lagen von D_2, D_3, D_4 etc. etc. an, so entsteht eine Fläche, von welcher zwischen D_1 und D_2 das erste Flächenelement f_1 , zwischen D_2 und D_3 das zweite Flächenelement f_2 , zwischen D_3 und D_4 das dritte Flächenelement f_3 etc. etc. liegt. Es liegt aber D_1 sowohl, als auch D_2 auf S_2 , also auf der Umhüllung und auf der Umhüllten, folglich liegt auch f_1 auf diesen beiden Flächen. Ebenso liegt sowohl D_2 als auch D_3 auf S_3 , also liegt auch f_2 auf S_3 , oder f_2 liegt auf der Umhüllung sowohl, als auch auf der Umhüllten, und ebenso lässt sich überhaupt nachweisen, dass alle übrigen Elemente f_3, f_4 etc. etc. der durch D_1, D_2, D_3 etc. etc. erzeugten Fläche auf der Umhüllung und auf der Umhüllten zugleich liegen, folglich haben diese beiden immer ein Flächenelement gemein. Die Bedingung, also, dass eine Fläche die Umhüllte einer andern oder umgekehrt diese Fläche Umhüllung der ersteren ist, besteht darin, dass beide ein Flächenelement gemeinschaftlich haben. Hieraus können nun folgende Folgerungen gemacht werden:

1. Haben wir den Meridian irgend einer Rotationsfläche, so wird jede Tangente dieses Meridians in der Ebene des letzteren liegen, also auch die Rotationsaxe schneiden, oder mit dieser parallel sein müssen. Nehmen wir nun irgend eine Tangente des Meridians an, welche die Rotationsaxe schneidet, und lassen von dem Meridiane die Rotationsfläche erzeugen, so wird jene Tangente einen geraden Kegel beschreiben, dessen Grundfläche der vom Berührungspunkte dieser Tangente beschriebene Parallelkreis der Fläche ist. Dieser Kegel hat also mit der gegebenen Rotationsfläche ein Flächenelement gemeinschaftlich, denn man kann (§. 291.) eine Rotationsfläche auch dadurch erzeugen, dass sich ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Axe bleibt, stets den Meridian treffend fortbewegt, so dass also ein Parallelkreis einer Rotationsfläche als ein Element der letzteren betrachtet werden kann; folglich ist jener Kegel Umhüllte der Rotationsfläche, oder diese Umhüllte des Kegels. Da aber durch

Sechstes Kapitel.

Tangirung der krummlinig erzeugten, nicht abwickelbaren Flächen überhaupt, und der Rotationsflächen insbesondere.

§. 293.

Aus §. 253. ist bekannt, dass die Tangentialebene irgend eines Punktes einer Fläche die Tangenten aller Curven enthält, welche der Fläche angehören und durch den gegebenen Berührungspunkt gezogen werden können. Ist daher auf einer krummen Oberfläche ein Punkt gegeben, für welchen eine Tangentialebene dieser Fläche bestimmt werden soll, so lege man durch diesen Punkt zwei Curven, die der Fläche angehören, und ziehe an diese durch jenen Punkt Tangenten, lege durch diese beiden Tangenten eine Ebene, so wird diese die gesuchte Tangentialebene sein.

Anmerk. Um diese Curven zu erhalten, lege man durch den Berührungspunkt Ebenen, welche mit der Fläche einfache und leicht zu konstruierende Curven gemein haben, konstruiere diese Curven, und bestimme sodann die erwähnten Tangenten.

§. 294.

Für eine Rotationsfläche lässt sich die im vor. §. erwähnte Regel einfach anwenden. Ist nämlich ein Punkt einer Rotationsfläche gegeben, für welchen an diese Fläche eine Tangentialebene gelegt werden soll, so lege man durch diesen Punkt einen Parallelkreis und an diesen eine Tangente, so gehört letztere der Tangentialebene an; sodann ziehe man durch denselben Punkt einen Meridian der Fläche, und lege an diesen eine Tangente, so gehört diese auch der gesuchten Tangentialebene an. Legt man also durch diese beiden Tangenten eine Ebene, so wird diese die gesuchte Tangentialebene sein.

§. 295.

Legt man nun die horizontale Tafel senkrecht auf die Rotationsaxe, so wird die horizontale Projektion eines jeden Parallelkreises gleich diesem selbst, seine vertikale Projektion aber senkrecht auf der Rotationsaxe und gleich dem Durchmesser dieses Kreises sein. Ist daher die vertikale Projektion eines Parallelkreises angegeben, und man will seine horizontale Projektion bestimmen, so halbire man jene, und beschreibe mit der halben Geraden, welche dieser vertikalen Projektion gleich

jede Tangente des Meridians, welche die Rotationsaxe schneidet, ein solcher Kreiskegel, wie der vorhin erwähnte, beschrieben wird, so folgt hieraus der Satz:

Eine Rotationsfläche kann als Umhüllung von Kegeln, deren Mittelpunkte in der Rotationsaxe liegen, und deren Grundflächen Parallelkreise der Umhüllung sind, betrachtet werden.

2. Zieht man eine Tangente des Meridians einer Rotationsfläche, die parallel zur Axe der letzteren ist, und lässt durch jenen Meridian die Fläche erzeugen, so wird die zur Axe parallel gezogene Tangente einen senkrechten Cylinder beschreiben, dessen Grundfläche der von dem Berührungspunkte jener Tangente beschriebene Parallelkreis ist. Dieser Cylinder hat also mit der Rotationsfläche ein Flächenelement gemeinschaftlich, und ist mithin Umhülle dieser Fläche. Es folgt also hieraus: dass man Rotationsflächen als Umhüllungen von Cylindern betrachten kann, deren Grundflächen Parallelkreise und deren Erzeugende parallel der Rotationsaxe sind.

3. Man kann auch für irgend eine Tangente des die Rotationsfläche erzeugenden Meridians die zugehörige Normale gezogen denken, so wird diese die Rotationsaxe ebenfalls schneiden müssen. Betrachtet man nun diesen Durchschnittspunkt als Mittelpunkt eines Kreises, und beschreibt aus diesem mit jener Normale einen Halbkreis, so wird dieser, während der angegebene Meridian die Rotationsfläche beschreibt, eine Kugel erzeugen, deren Halbmesser jene Normale ist und deren Mittelpunkt in der Rotationsaxe liegt. Dabei beschreibt aber der Berührungspunkt der anfänglich gezogenen Normale einen Parallelkreis der Fläche, welcher auch der Kugel angehört; folglich hat diese mit der Rotationsfläche ein Flächenelement gemein, und ist mithin Umhülle dieser Fläche. Es folgt also hieraus: eine Rotationsfläche kann als Umhüllung von Kugeln betrachtet werden, deren Mittelpunkte in der Rotationsaxe liegen, und deren Halbmesser Normalen des Meridians sind.

Anmerk. Es ist leicht nachzuweisen, dass eine Cylinderoberfläche, welche einen Meridian einer Rotationsfläche als Direktrix und eine Generatrix hat, die senkrecht auf der Meridianebene steht, als Umhülle der Rotationsfläche betrachtet werden kann. —

ist, aus der horizontalen Spur der Rotationsaxe einen Kreis, so wird dieser die horizontale Projektion des Parallelkreises sein. Legt man nun für einen auf diesem gegebenen Punkte eine Tangente, so wird die vertikale Projektion derselben mit der vertikalen Projektion des Parallelkreises zusammenfallen, ihre horizontale Projektion aber Tangente der horizontalen Projektion dieses Kreises sein. Da nun diese Tangente parallel mit der horizontalen Tafel ist und in der gesuchten Tangentialebene liegen muss, so wird dieselbe parallel zur horizontalen Spur der Tangentialebene sein, und es folgt also hieraus:

Zieht man durch die horizontale Projektion des gegebenen Berührungspunktes eine Tangente an die horizontale Projektion des durch diesen Punkt gehenden Parallelkreises, so wird mit dieser die horizontale Spur der Tangentialebene parallel sein müssen.

Denkt man sich nun durch den gegebenen Berührungspunkt und die Rotationsaxe eine Ebene gelegt, so wird diese senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen und die Meridianebene sein. Da aber letztere senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so muss ihre horizontale Spur die horizontale Projektion des Berührungspunktes enthalten, und es wird mithin diese horizontale Spur erhalten, wenn man durch die horizontale Spur der Rotationsaxe und die horizontale Projektion des Berührungspunktes eine Gerade zieht. Diese Gerade wird aber senkrecht auf der horizontalen Projektion der vorhin erwähnten Tangente des den Berührungspunkt enthaltenden Parallelkreises sein, und da mit dieser Tangente die horizontale Spur der Tangentialebene parallel sein muss, so wird letztere senkrecht auf der horizontalen Spur der den Berührungspunkt enthaltenden Meridianebene stehen. Hieraus folgt also ein weiterer Satz:

Die horizontale Spur einer Tangentialebene einer Rotationsfläche steht senkrecht auf der horizontalen Spur derjenigen Meridianebene, welche den Berührungspunkt enthält.

§. 296.

Da öfters die Forderung gemacht wird, für einen gegebenen Punkt einer Rotationsfläche den Parallelkreis und den Meridian zu konstruiren, so sollen diese Konstruktionen ausgeführt werden. (Fig. 165.) Ist $C_1 C_2$ die vertikale und C die horizontale Projektion der Rotationsaxe, $A C_1 B' C_2$ die

vertikale Projektion desjenigen Meridians der Fläche, welcher parallel mit der vertikalen Tafel ist und $A B$ seine horizontale Projektion, ferner a die horizontale Projektion eines auf der Rotationsfläche liegenden Punktes, so ist der Kreis ahg die horizontale Projektion des diesen Punkt enthaltenden Parallelkreises, und die vertikale Projektion dieses Punktes kann in a' oder a'_1 sein, folglich ist auch die vertikale Projektion dieses Parallelkreises $a' g'$ oder $a'_1 g'_1$. Ist nun MS die horizontale Spur einer Meridianebene, so muss ihre vertikale Spur die auf XX senkrechte Gerade SM' , und $F'G'$ muss die horizontale Projektion des Meridians selbst sein. Nimmt man daher die Punkte m_1, m_2, m_3 etc. etc. an, welche der horizontalen Projektion dieser Curve angehören, und zieht durch diese Punkte Parallelkreise, so werden die vertikalen Projektionen dieser Punkte in den vertikalen Projektionen der zugehörigen Parallelkreise, also in m'_1 oder in m'_{14} , in m'_2 oder in m'_{13} etc. etc. liegen, und verbindet man die Punkte m'_1, m'_2, m'_3 etc. etc. durch eine stätige Curve, so wird diese die vertikale Projektion des Meridians sein, und es ist dieser durch die Curve $C_1 F' C_2 G'$ bestimmt.

Anmerk. Dreht man die Ebene MSM' um die Axe ($C, C_1 C_2$), bis sie parallel zur vertikalen Tafel liegt, also ihre horizontale Spur die Lage $M_1 S_1$ annimmt, so fällt die vertikale Projektion des Meridians, nach welchem dieselbe die Rotationsfläche schneidet mit dem Meridian $AC_1 B' C_2$ zusammen. Diesen letzteren nennt man den Hauptmeridian. Derselbe ist hinreichend, um die Projektionen der Rotationsfläche angeben zu können.

§. 297.

Aufgabe 34. Es ist eine Rotationsfläche durch ihren Hauptmeridian und die Projektionen ihrer Axe gegeben, ferner ist die horizontale Projektion eines auf dieser Fläche liegenden Punktes bekannt; man soll die vertikale Projektion dieses Punktes bestimmen, und für diesen an die Fläche eine Tangentialebene legen.

Auflösung. Vor Allem beschreibe man aus der horizontalen Spur der Rotationsaxe mit ihrer Entfernung von der horizontalen Projektion des gegebenen Punktes einen Kreis, so ist dieser die horizontale Projektion des Parallelkreises, auf welchem sich der Berührungspunkt befindet, und zieht man von der horizontalen Projektion dieses Punktes aus auf X eine Senkrechte, welche den Hauptmeridian schneidet, so erhält man zwei Punkte, von welchen jeder die vertikale Projektion des Berührungspunktes sein kann. Durch diese zwei Punkte senkrecht auf die Rotationsaxe Sehnen des Meri-

dians gezogen, so werden diese die vertikalen Projektionen des Parallelkreises sein, welche den Berührungspunkt enthalten können, und diese Sehnen werden zugleich (§. 293.) die vertikalen Projektionen der Tangenten sein, welche man durch die Berührungspunkte an ihre Parallelkreise ziehen kann, und von welchen Tangenten die gemeinschaftliche horizontale Projektion erhalten wird, wenn man durch die horizontale Projektion des Berührungspunktes an den zugehörigen Parallelkreis eine Tangente zieht. Sucht man nun von diesen Tangenten ihre vertikalen Spuren, so erhält man zwei Punkte, durch welche die vertikalen Spuren der Tangentialebenen gehen müssen, welche man für die zwei Berührungspunkte, die einerlei horizontale Projektion haben an die Rotationsfläche ziehen kann. Nun müssen wir ferner (§. 294.) durch den gegebenen Berührungspunkt einen Meridian der Fläche legen, und an diesen durch jenen Punkt eine Tangente ziehen. Ziehen wir nun durch die horizontale Spur der Rotationsaxe und die horizontale Projektion des Berührungspunktes eine Gerade, so ist diese die horizontale Spur der Meridianebene, und die horizontale Projektion der gesuchten Tangente. Um die vertikale Projektion des Meridians nicht konstruieren zu dürfen, drehen wir die Meridianebene um die Rotationsaxe, bis sie parallel zur vertikalen Tafel zu liegen kömmt, so wird die vertikale Projektion des gesuchten Meridians mit dem Hauptmeridian zusammenfallen. An diesen durch die neuen vertikalen Projektionen der Berührungspunkte Tangenten gezogen, und ihre horizontalen Spuren gesucht, so würden durch diese Punkte die horizontalen Spuren der Tangentialebenen gehen müssen, wenn die Meridianebene in ihrer wahren Lage wäre. Wir drehen daher diese in ihre erste Lage wieder zurück, und suchen auf ihrer horizontalen Spur die horizontalen Spuren jener Tangenten auf. Ziehen wir nun durch diese Punkte senkrechte Gerade auf die horizontale Spur der Meridianebene, so werden diese (§. 295.) die horizontalen Spuren der Tangentialebenen sein, welche durch die Berührungspunkte, deren gemeinschaftliche horizontale Projektion angegeben war, an die Rotationsfläche gezogen werden können. Von jeder der vertikalen Spuren der Tangentialebenen haben wir schon vorhin einen Punkt aufgesucht, und schneiden die horizontalen Spuren die Axe X nicht mehr auf den Gränzen unserer Tafeln, so können wir von jeder der vertikalen Spuren noch einen Punkt erhalten, indem wir entweder die vertikalen Spuren der Tangenten des Meridians suchen, oder durch einen Punkt einer jeden dieser Tangenten eine Parallele zur entsprechenden hori-

zontalen Spur der Tangentialebene ziehen, und es kann mithin auch die vertikale Spur einer jeden der gesuchten zwei Tangentialebenen bestimmt werden.

§. 298.

Beispiel. (Fig. 166.) Es sei $AC_1B'C_2$ der Hauptmeridian, und zwar ein Kreis, ferner $ACBD$ die horizontale Projektion des Aequators, wobei $AC = AC'$ ist, so wird die gegebene Rotationsfläche (§. 289.) eine Kugel sein. In p_2 sei die horizontale Projektion des Berührungspunktes, so ziehe man aus C mit dem Halbmesser Cp den Parallelkreis hfg , und vom Durchschnittspunkte p_1 des letzteren mit AB auf X eine Senkrechte $p_1p'_1$, ferner durch die hierdurch erhaltenen Punkte p'_1 und p''_1 die Geraden p'_1c und p''_1c_2 senkrecht auf C_1C_2 , so erhält man die vertikalen Projektionen der zwei Parallelkreise, deren gemeinschaftliche horizontale Projektion der Kreis hfg ist. Von p aus auf X eine Senkrechte gezogen, so erhält man in p' und p'' die vertikalen Projektionen des Berührungspunktes. Zieht man an hfg die Tangente p_1v_1 , so wird diese die horizontale Projektion der an den Parallelkreisen ($hfg, d'p'_1$) und ($hfg, d_2p''_1$) zu ziehenden Tangenten sein, und von diesen die vertikalen Spuren v'_1 und v'_2 gesucht, so werden diese zwei Punkte den vertikalen Spuren der gesuchten zwei Tangentialebenen angehören. Zieht man nun CpN , so wird diese die horizontale Spur der den Berührungspunkt enthaltenden Meridianebene und NN' die vertikale Spur dieser Ebene sein. Dreht man Ebene MNV' um (C, C_1C_2) , bis dieselbe parallel zur vertikalen Tafel wird, so beschreibt jeder der auf derselben enthaltenen Punkte M und N Kreisbögen, deren Mittelpunkt C ist, und nach der Drehung wird MN nach M_1N_1 , M nach M_1 und N nach N_1 zu liegen kommen. Hierdurch geht aber die vertikale Projektion des durch MNN' entstandenen Meridianschnittes in den Kreis $AC_2B'C_1$ und die horizontale Projektion desselben in AB über, der Punkt (p, p') wird aber einen auf (C_1C_2, C) also auch auf der vertikalen Tafel senkrecht stehenden Kreisbogen beschreiben, dessen horizontale Projektion pp_1 und dessen vertikale Projektion $p'p'_1$ ist, und mithin werden die Punkte p_1 und p'_1 die neuen Projektionen von (p, p') sein. Ebenso entspricht der Punkt p''_1 der neuen vertikalen Projektion des Berührungspunktes. Zieht man nun $p'_1s'_1$ und $p''_1p'_1$ tangierend an $AC_1B'C_1$, so werden diese die Tangenten, und s_1, t_1 die horizontalen Spuren der Tangenten des Meridianschnittes sein, so lange die Meridianebene parallel mit der vertikalen Tafel ist; dreht man daher diese Ebene

wieder in ihre erste Lage, so beschreiben die Punkte s_1 und t_1 Kreisbögen, deren Mittelpunkt in C ist, und kommen nach s und t nach der Drehung zu liegen. Die vertikalen Projektionen dieser Punkte werden also (nach §. 70.) in s' und t' , und die Tangenten des die Berührungspunkte (p, p') und (p, p'') enthaltenden Meridianschnittes in die Geraden $(h's', p's)$ und $(t'p'', tp)$ fallen. Da nun die Punkte s und t die horizontalen Spuren dieser Tangenten sind, so ziehe man die Geraden sT_1 und tT_2 senkrecht auf MN , so werden diese die horizontalen Spuren der beiden gesuchten Tangentialebenen sein. Die vertikalen Spuren werden erhalten, wenn man die Geraden $S_1v'_1$ und $S_2v'_2$ zieht. Ohne die Punkte S_1 und S_2 zu benützen hätte man diese vertikalen Spuren bestimmen können, wenn man die vertikalen Spuren N' und s_3 der beiden Tangenten des Meridians bestimmt und die Geraden $s_3v'_1$ und $N'v'_2$ gezogen hätte. —

§. 299.

Es wurde schon (§. 279.) erwähnt, dass wenn sich eine Hyperbel, deren imaginäre Axe in der Rotationsaxe liegt, um diese bewegt, das Rotationshyperboloid beschrieben wird. Nimmt man wieder die horizontale Tafel so an, dass dieselbe senkrecht auf der Rotationsaxe steht, und lässt um diese eine Gerade, welche mit dieser Axe nicht in einerlei Ebene liegt, bewegen, so dass alle Punkte derselben ihre anfänglichen Entfernungen von der Drehungsaxe behalten, so wird dasselbe Hyperboloid mit einem Fache beschrieben, von welchem (§. 289.) Erwähnung geschehen ist. Bei der Bewegung dieser geradlinigen Erzeugenden beschreibt jeder ihrer Punkte einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der Rotationsaxe steht, und mithin wird die horizontale Spur der Erzeugenden einen Kreis beschreiben, der die horizontale Spur des Rotationshyperboloides ist. Bestimmt man nun die kürzeste Entfernung der Erzeugenden von der Drehungsaxe, so wird diese der Halbmesser des Kreises sein, welchen der Punkt beschreibt, der am nächsten an der Generatrix liegt. Dieser Kreis, welchen die kürzeste Entfernung der Generatrix von der Rotationsaxe beschreibt, wird Kehlkreis der Fläche genannt. Da nun die Ebene dieses Kehlkreises senkrecht auf der Drehungsaxe, also parallel zur horizontalen Tafel liegt, so wird die vertikale Projektion des Kehlkreises eine auf der vertikalen Projektion der Drehungsaxe senkrecht stehende Gerade sein, welche mit dem Durchmesser des Kehlkreises gleiche Länge hat, und die horizontale Projektion desselben die wahre Grösse dieses Kreises sein, der seinen Mit-

telpunkt in der horizontalen Spur der Rotationsaxe hat. Hierdurch ist man also im Stande die Projektionen des Kehlkreises anzugeben. — Nun wird die Generatrix in allen ihren Lagen den Kehlkreis treffen, folglich wird durch jeden Punkt des Kehlkreises eine Lage der Erzeugenden des Umdrehungshyperboloides gehen müssen. Denkt man sich den Kehlkreis als Direktrix eines Cylinders, von welchem die Generatrix senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, und durch einen beliebigen Punkt des Kehlkreises eine Lage der Erzeugenden dieses Cylinders und eine Erzeugende des Hyperboloides gezogen, sodann durch diese beiden Geraden eine Ebene gelegt, so wird diese eine Tangentialebene des Cylinders sein. Die horizontale Spur dieser Tangentialebene muss aber Tangente der horizontalen Spur des Kehlkreises sein, und wird, weil jene Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, die horizontale Projektion der angenommenen Erzeugenden des Hyperboloides enthalten. Da also die horizontale Spur jener Tangentialebene durch die horizontale Projektion des angegebenen Punktes geht, und Tangente der horizontalen Projektion des Kehlkreises ist; so folgt hieraus der erste Satz, welcher für das Rotationshyperboloid gilt, nämlich:

Die horizontale Projektion einer beliebigen Erzeugenden des Rotationshyperboloides ist Tangente an der horizontalen Projektion seines Kehlkreises.

Zieht man nun eine beliebige Meridianebene, so wird diese von allen Lagen der Erzeugenden nach und nach geschnitten, und die erhaltenen Durchschnittspunkte gehören dem Meridiane dieser Ebene an. (Fig. 168. a.) In dieser Meridianebene sei B ein Punkt der Meridiancurve, Z_1Z_2 die Rotationsaxe, ACB eine auf dieser Axe senkrechte Ebene, Z_2 die horizontale Spur der Rotationsaxe, $Z_2z_2 = r$ der Halbmesser des Kehlkreises, bz_2 senkrecht auf Z_2z_2 , also eine Tangente dieses Kreises, und durch z_2 gehen die beliebige Gerade A_2A_1 und dann noch die Erzeugende BB_1 , so ist vor Allem, wenn noch b die horizontale Projektion von B ist, Bb senkrecht auf bz_2 , also $\frac{Bb}{bz_2} = \tan$.

$< (Bz_2b)$ oder gleich der Tang. des Winkels, welchen die Erzeugende des Hyperboloides mit der horizontalen Tafel bildet. Ist nun $\frac{Bb}{bz_2} = m$, ferner $Bb = z$, $bz_2 = x$, so hat man

$$m = \sqrt{\frac{z}{x^2 - r^2}} \text{ also } z = m \sqrt{x^2 - r^2}$$

Da aber diese Eigenschaft nur einem Punkte eigen ist, welcher auf einer Hyperbel ist, deren halbe reelle Axe $= r$, von welcher ferner x und z die Coordinaten eines beliebigen Punktes sind, und zwar x die mit der reellen Axe parallele und z die Ordinate, die mit der imaginären Axe gleiche Richtung hat, so folgt hieraus, dass ein beliebiger Punkt eines Meridians unserer Fläche einer Hyperbel angehört, deren imaginäre Axe die Drehungsaxe jener Fläche ist; folglich haben wir einen zweiten Satz:

Ein beliebiger Meridian des Rotationshyperboloides ist eine Hyperbel, deren reelle Axe der Halbmesser des Kehlkreises jener Fläche ist.

Nimmt man nun an, dass $z_1 z_2 \neq Z_1 Z_2$ und $< A z_2 z_1 \neq < B z_2 z_1$ ist, so wird auch aus der Congruenz der Dreiecke $A z_1 z_2$ und $B z_2 z_1 : A z_1 = B z_1$, folglich hat man $CA = CB$, und mithin liegt der Punkt A auf dem von B während der Umdrehung von BB_1 beschriebenen Parallelkreise, und es gehört also der Punkt A dem Hyperboloide an. Man kann aber auf dieselbe Weise zeigen, dass jeder Punkt der Geraden AA_1 dieser Fläche angehört, und es folgt hieraus, dass man durch Fortbewegung der Geraden AA_1 dasselbe Hyperboloid erzeugen kann, welches die Gerade BB_1 erzeugt. Daraus folgt also drittens:

Ein Rotationshyperboloid hat zweierlei Erzeugende, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, und welche mit der durch diesen Punkt gehenden und mit der Rotationsaxe parallelen Geraden gleiche Winkel bilden.

Man nennt die erste Erzeugende die des ersten und die zweite die des zweiten Systems, und es lässt also das Hyperboloid zwei Erzeugungsarten zu. Denkt man sich nun den Kehlkreis wieder horizontal projicirt, und den projicirenden Cylinder gezogen, sodann durch einen Punkt des Kehlkreises eine Erzeugende des ersten und sodann eine Erzeugende des zweiten Systems gelegt, so werden diese beiden Geraden mit der durch ihren Durchschnittspunkt gehenden Erzeugenden des projicirenden Cylinders in einer auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Ebene liegen. Diese Ebene ist mithin die horizontal projicirende Ebene jeder der beiden Geraden, und da schon am Anfange dieses §. erwähnt wurde, dass die horizontale Spur dieser Ebene Tangente des Kehlkreises ist, so wird von jeder jener beiden Erzeugenden die horizontale Projektion als Tangente des Kehlkreises erscheinen. Wenn man daher an letzteren eine Tangente

zieht, so kann diese entweder die horizontale Projektion einer Erzeugenden des ersten, oder die horizontale Projektion einer Erzeugenden des zweiten Systems sein.

Wenn man mehrere solche Tangenten des Kehlkreises zieht, so kann man erst dann entscheiden, welche die horizontalen Projektionen von Erzeugenden des einen oder des andern Systemes sind, sobald die horizontalen Spuren dieser Erzeugenden bekannt sind. — Ausser diesen genannten Eigenschaften ist nun noch leicht einzusehen, dass jede Erzeugende des einen Systems alle Erzeugende des andern schneiden muss, dass aber ferner die Erzeugenden eines und desselben Systems sich weder schneiden noch parallel sein können. —

Vermittelst aller dieser hier entwickelten Eigenschaften des Rotationshyperboloides wird man nun auch im Stande sein, dasselbe zu konstruiren. —

§. 300.

Aufgabe 35. Es ist die horizontale Spur eines Rotationshyperboloides und sein Kehlkreis gegeben, man soll

1. diese Fläche konstruiren,
2. für einen auf der Fläche angegebenen Punkt eine Tangentialebene an jene legen.

Auflösung. (Fig. 168.) Es sei $M'N'$ die vertikale und M die horizontale Projektion der Rotationsaxe, $k_1 k_2$ sei die vertikale und $k_1 e k_2 e_1$ die horizontale Projektion des Kehlkreises, ferner sei die Linie $DHB_1 A$, welche (§. 286.) eine Kreislinie sein muss, die horizontale Spur des Hyperboloides, so theile man diese Spur in gleiche (hier in 14) Theile, und ziehe durch die Punkte A, B, C, D etc. etc. die Tangenten des Kehlkreises Aa, Bb, Cc etc. etc., und es werden diese (nach vor. §.) die horizontalen Projektionen von Erzeugenden einerlei Systems sein, von welchen die Punkte A, B, C, D etc. etc. die horizontalen Spuren sind. Bestimmt man nun die vertikalen Projektionen a', b', c' etc. etc. der Punkte, deren horizontale Projektionen in a, b, c etc. etc. sind, gibt sodann auch die vertikalen Projektionen A', B', C' etc. etc. der Punkte A, B, C , etc. etc. an, und zieht die Geraden $'Ga', 'Fb', 'Ec'$ etc. etc., so werden diese die vertikalen Projektionen der Erzeugenden unserer Fläche sein, und mithin kann letztere bestimmt werden. Um die Curve $(D'k_1 D'', 'B_1 k_2 'B_1)$, welche der Meridian der Ebene DMB_1 ist, zu bestimmen, bestimme man die Durchgangspunkte einer Erzeugenden in verschiedenen ihrer Lagen mit dieser Meridianebene, so werden die vertikalen Pro-

jektionen dieser Durchgangspunkte auch die vertikale Projektion jedes Meridians bestimmen. — Um nun für einen beliebigen Punkt dieser Fläche, eine Tangentialebene an diese zu legen, ziehe man durch diesen Punkt zwei Generatricen verschiedenen Systems, lege durch dieselbe eine Ebene, so erhält man die gesuchte Tangentialebene.

§. 201.

Aufgabe 36. Parallel mit einer gegebenen Ebene an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Die Tangentialebene einer Rotationsfläche hat mit dieser bloss den Berührungspunkt gemeinschaftlich, und kann mithin noch die Bedingung erfüllen, mit einer Ebene parallel zu sein, so dass noch der Berührungspunkt auf derselben enthalten ist. Man lege nun vor Allem wieder die Rotationsaxe senkrecht auf die horizontale Tafel, und verfähre dann auf folgende Weise:

1. Ziehe man von der horizontalen Spur der Rotationsaxe aus auf die horizontale Spur der gegebenen Ebene eine Senkrechte, so wird diese die horizontale Spur jener Meridianebene sein, welche den Berührungspunkt enthält, weil (§. 295.) die horizontale Spur der Tangentialebene einer Rotationsfläche senkrecht auf der horizontalen Spur der Meridianebene ist, welche den Berührungspunkt enthält.
2. Bestimme man die Communsektion dieser Meridianebene mit der gegebenen Ebene, so wird diese Durchschnittsline parallel zu derjenigen Tangente des Meridians*) sein, welche durch den Berührungspunkt der zu suchenden Tangentialebene geht. Denn da diese Tangente in der gesuchten Tangentialebene sowohl, als auch in der gegebenen Meridianebene liegt, so ist dieselbe die Communsektion dieser beiden Ebenen. Die Meridianebene schneidet aber die gegebene Ebene und die Tangentialebene nach Geraden, die unter sich parallel sein müssen, folglich ist die Communsektion der Meridianebene und der gegebenen Ebene parallel zu der Tangente des Meridians für den gegebenen Berührungspunkt.
3. Drehe man die Meridianebene (welche den Berührungspunkt enthält) parallel zur vertikalen Tafel, suche die

Anmerk. Es ist hier bloss von dem Meridiane der Rotationsfläche die Rede, auf welchem sich der Berührungspunkt der gesuchten Tangentialebene befindet.

neue Lage jener (in 2. bestimmten) Communsektion, und ziehe mit dieser an den Haupt-Meridian Parallele, so werden diese die vertikalen Projektionen der Parallelkreise angeben, auf welchen sich der Berührungspunkt befindet, und zu diesen Parallelkreisen können die horizontalen Projektionen bestimmt werden.

4. Suche man die horizontalen Spuren dieser Tangenten, und bestimme die Lagen dieser Punkte in der wahren Lage der Meridianebene, ziehe durch diese Spuren parallele Gerade mit der horizontalen Spur der gegebenen Ebene, so erhält man die horizontalen Spuren der zwei Tangentialebenen, welche die angegebene Bedingung erfüllen. Die vertikalen Spuren dieser Ebenen können nach §. 297. angegeben werden.

Beispiel. (Fig. 167.) Es sei ABCD die horizontale und $AM_1 B'M_2$ die vertikale Projektion einer Rotationsfläche, die hier eine Kugel ist, ($M'_1 M'_2, M$) sei die Rotationsaxe, ESE' sei eine Ebene, man soll an die Fläche eine Tangentialebene parallel zu ESE' legen. Man ziehe die Gerade MN senkrecht auf E, so erhält man die horizontale Spur der Meridianebene, welche den Berührungspunkt der zu suchenden Tangentialebene enthält, und der Punkt (a, a') gehört der Communsektion dieser beiden Ebenen an. Um noch einen zweiten Punkt dieser letzteren zu erhalten, ziehe man $bc \neq E$, ferner cc' senkrecht auf X, und von dem Durchschnittspunkte c' der letzteren mit E' eine Parallele c'b' mit X, durchschneide sodann c'b' von der durch b auf X gezogenen Senkrechten, so erhält man den Punkt b', dessen horizontale Projektion in b ist. Bringt man nun die Ebene MN in die Lage MN_1 , so beschreiben die Punkte a und b Kreisbögen von den Halbmessern Ma und Mb, und kommen nach a_1 und b_1 zu liegen, ihre vertikalen Projektionen aber werden nach a'_1 und b'_1 zu liegen kommen. Zieht man nun die Gerade $a'_1 b'_1$, so wird diese die vertikale Projektion der Communsektion von der Meridianebene MN_1 und Ebene ESE' sein. Zieht man nun $m'_1 s'_1 \neq n'_1 s'_2 \neq a'_1 b'_1$, und zieht $s'_1 s_1$ sowohl, als $s'_1 s_2$ senkrecht auf X, so werden die Punkte s_1 und s_2 die horizontalen Spuren jener Geraden sein, welche parallel mit ($a'_1 b'_1, a_1 b_1$) sind und den Meridian $AM_1 B'M_2$ tangiren. Bringt man nun die Punkte s_1 und s_2 in die Meridianebene MN, so kommen dieselben nach s_3 und s_4 zu liegen, während die Punkte (m_1, m'_1) und (n_1, n'_1) nach (m, m') und (n, n') zu liegen kommen, und die Berührungspunkte der zwei Tangentialebenen sind, welche parallel zur

gegebenen Ebene sind. Zieht man nun durch s_3 und s_4 die Geraden T_1 und $T_2 \neq E$, und durch die Punkte S_1 und S_2 die Geraden T'_1 und $T'_2 \neq E'$, so erhält man die Spuren der gesuchten zwei Tangentialebenen. —

§. 302.

Aufgabe 37. Durch einen gegebenen Punkt eine Tangentialebene an eine Rotationsfläche zu legen, wenn ein Parallelkreis gegeben ist, auf welchem sich der Berührungspunkt befinden soll.

Auflösung. Es ist aus §. 292. bekannt, dass eine Rotationsfläche als Umhüllung eines Kegels betrachtet werden kann, dessen Direktrix ein Parallelkreis ist. Zieht man daher jenen Conus, welcher den gegebenen Parallelkreis zur Direktrix hat, so wird dieser die gegebene Fläche nach diesem Parallelkreise tangiren. Legt man nun durch den gegebenen Punkt an diesen umhüllten Kegel eine Tangentialebene, so wird letztere eine Erzeugende des Kegels enthalten. Da aber diese Erzeugende den Parallelkreis treffen muss, so wird der Punkt, den der Parallelkreis und diese Erzeugende gemeinschaftlich haben, auf der Tangentialebene liegen, und da diese Ebene bloss diesen Punkt und keinen zweiten mit der Rotationsfläche gemeinschaftlich hat, so wird dieselbe die gesuchte sein. Es ist mithin die Tangentialebene, welche durch den gegebenen Punkt an die erwähnte Umhülle der Rotationsfläche gelegt werden kann, die gesuchte. (Fig. 169.) Ist $M_1 M_2$ die vertikale und M die horizontale Projektion der Rotationsaxe, ferner $A B C D$ die horizontale und $'A M_1 B' M_2$ die vertikale Projektion der Rotationsfläche, welche hier wieder eine Kugel sein soll, und man soll durch den Punkt (a, a') an diese Fläche eine Tangentialebene legen, deren Berührungspunkt auf dem Parallelkreise $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ liegt, so ziehe man die Tangenten $\alpha' m'_1$ und $\beta' n'_1$ für den Meridian $'A M_1 B' M_2$, so erhält man die vertikalen Projektionen zweier Erzeugenden des umhüllten Conus, von welchen die horizontalen Projektionen in $m_1 n_1$ liegen. Sucht man die horizontale Spur n_1 von $(\beta' n'_1, \beta n)$, und beschreibt aus M mit dem Halbmesser $M n_1$ einen Kreis, so erhält man die horizontale Spur $m_1 P_2 n_1 P_1$ jenes Kegels. Um nun an letzteren durch (a, a') eine Tangentialebene zu legen, rücke man die horizontale Tafel, bis dieselbe durch den Punkt (a, a') geht, also X nach X' zu liegen kömmt, so wird die neue horizontale Spur des Kegels $s_1 n s_2 m$ sein. Zieht man an diese die Tangenten $a m$ und $a n$, so werden letztere die horizontalen Projektionen zweier Geraden sein, mit welchen die horizontalen Spuren der gesuchten Tangentialebenen parallel sein müssen, und deren vertikale Projektio-

nen in $a's'_1$ liegen. Zieht man nun $M P_1$ und $M P_2$, so erhält man die horizontalen Projektionen der Berührungserzeugenden, und durch P_1 und P_2 Tangenten an die horizontale Spur des umhüllten Conus gezogen, so erhält man die horizontalen Spuren der zwei Tangentialebenen, zu welchen die vertikalen Spuren $'E_1$ und $'E_2$ nach den frühern Regeln angegeben werden können.

§. 303.

Aufgabe 38. Durch einen gegebenen Punkt an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn sich der Berührungspunkt auf einem gegebenen Meridiane befinden soll.

Auflösung. (Fig. 170.) Ist $M_1 M_2$ die vertikale und M die horizontale Projektion der Rotationsaxe, die senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, ferner $A B C D$ die horizontale Projektion des Aequators (folglich dieser selbst) und $'A M_1 B' M_2$ der Hauptmeridian, endlich a und a' die Projektionen eines Punktes, man soll eine Tangentialebene an die Fläche ($'A M_1 B' M_2, A B C D$) legen, deren Berührungspunkt auf dem Meridiane sich befindet, von welchem die horizontale Spur seiner Ebene die Gerade $M N$ ist. — Wir wissen, dass die gegebene Fläche Umhüllung eines Cylinders sein kann, dessen Direktrix der gegebene Meridian und von welchem die Generatrix senkrecht auf der Ebene dieser Curve ist. Wenn wir daher auf $M N$ senkrechte Linien ziehen, so werden diese mit der horizontalen, und auf $M_2 M_1$ senkrechte Gerade gezogen, so werden letztere mit der vertikalen Projektion der Richtung der Generatrix des umhüllten Cylinders parallel sein. Da also die Erzeugende dieses Cylinders senkrecht auf der Meridianebene, also parallel mit der horizontalen Tafel ist, so ist der Cylinder auch mit dieser Tafel parallel. Legen wir nun durch den Punkt (a, a') eine Tangentialebene an diesen Cylinder, so wird dieselbe die gegebene Rotationsfläche nicht schneiden können, weil keine Erzeugende des Cylinders jene Fläche schneidet, und die Tangentialebene bloss eine Erzeugende mit dem Cylinder gemein hat. Diese Ebene wird vielmehr den Punkt, in welchem ihre Berührungserzeugende mit dem Cylinder den gegebenen Meridian trifft, mit der Rotationsfläche nur gemein haben, und folglich wird diese Fläche von der Tangentialebene, die man durch den gegebenen Punkt an den umhüllten Cylinder legt, tangirt. Geben wir daher jene Tangentialebene an, so wird dieselbe die gesuchte sein. Da wir aber das in (§. 261.) angegebene Verfahren nicht so, wie es dort erklärt wurde, anwenden können, weil die horizontale Spur

des umhüllten Cylinders fehlt, so betrachten wir die gegebene Meridianebene als Projektionstafel für den Cylinder, und lösen in Bezug auf diese die Aufgabe ebenso, wie in §. 261. gezeigt wurde, und zwar auf folgende Weise:

1. Legt man die Gerade ad senkrecht auf MN , $a'n$ senkrecht auf M_1M_2 , so ist in d die horizontale und in d' die vertikale Projektion des Durchgangspunktes dieser Geraden (ad , $a'd'$) mit Ebene MN .
2. Von diesem Punkte (d , d') haben wir eine Tangente an den Meridian, nämlich an die Direktrix des Cylinders zu legen, so wird diese die Gerade sein, nach welcher Ebene MN von der gesuchten Tangentialebene geschnitten wird. Um aber diese Tangente zu erhalten, bringen wir MN in die Lage von MN_1 , so wird der Meridian mit dem gegebenen Hauptmeridiane $AM_1B'M_2$ zusammenfallen. Durch diese Drehung der Ebene MN kommt aber der Punkt (d , d') nach (d'_1 , d_1) zu liegen, und ziehen wir daher d'_1p' , so wird diese die vertikale und d_1M die horizontale Projektion der Commonsektion der gesuchten Tangentialebene und des Hauptmeridians sein. Bestimmen wir nun die horizontale Spur dieser Tangente, und bringen wir MN_1 wieder nach MN , so kommt s nach s_1 zu liegen, und da dieser letztere Punkt in der gesuchten Tangentialebene liegen muss, so haben wir nur s_1S_1 senkrecht auf MN zu ziehen, und wir erhalten hierdurch (§. 295.) die horizontale Spur E der gesuchten Tangentialebene. Die vertikale Spur E'_1 kann nun leicht bestimmt werden, weil man den Berührungspunkt (p_1 , p'_1) bestimmt hat, und es ist mithin $E_1SE'_1$ die gesuchte Tangentialebene. — Da man noch die zweite Tangente $d'_1p'_3$, an den Hauptmeridian ziehen kann, so ist auch noch eine zweite Tangentialebene möglich, welche den Punkt (a , a') enthält; diese kann aber ebenso, wie die Ebene $E_1S_1E'_1$ bestimmt werden. —

§. 304.

Aufgabe 39. Parallel einer gegebenen Geraden eine Tangentialebene an eine Rotationsfläche zu legen, wenn der Parallelkreis gegeben ist, auf welchem sich der Berührungspunkt befindet.

Auflösung. Betrachten wir den gegebenen Parallelkreis als Direktrix eines Kegels, (§. 292.) so wird dieser die gegebene Rotationsfläche tangiren. Legen wir daher an diesen umhüllten Conus eine Tangentialebene parallel zur gegebenen Gera-

den, so wird diese Ebene mit dem Conus bloss eine Erzeugende, also mit der Rotationsfläche auch nur den Punkt gemein haben, in welchem diese Erzeugende den gegebenen Parallelkreis trifft. Die Tangentialebene also, welche wir parallel zur gegebenen Geraden an den Conus legen, dessen Direktrix der angegebene Parallelkreis ist, wird die gesuchte sein. Dass hier wieder zwei solche Ebenen möglich sind, ist aus §. 271. bekannt. Man kann bei der Bestimmung einer jeden dieser Tangentialebenen entweder das in §. 275. angegebene Verfahren anwenden, oder den Kegel so weit abwärts schieben, bis sein Centrum auf den Tafeln erhalten wird, und sodann das in §. 271. angegebene Verfahren anwenden, nach der Aufsuchung einer Geraden, die der Tangentialebene angehört oder welche eine ihrer Spuren bestimmt, wieder den Conus in seine vorige Lage bringen. — In Fig. 171. ist ein Beispiel hiezu, in welchem die Konstruktionen leicht einzusehen sind. —

§. 305.

Aufgabe 40. Parallel zu einer gegebenen Geraden an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn der Berührungspunkt sich auf einem gegebenen Meridiane befindet.

Auflösung. Zieht man den Cylinder, der zur Direktrix den gegebenen Meridian hat, und dessen Generatrix senkrecht auf der gegebenen Meridianebene steht, legt sodann an diesen umhüllten Cylinder parallel zur gegebenen Geraden zwei Tangentialebenen nach den früher angegebenen Regeln, so werden diese die gesuchten sein. Die Punkte, in welchen der Meridian von den Berührungserzeugenden (der Tangentialebene und des umhüllten Cylinders) getroffen werden, sind die Berührungspunkte beider Tangentialebenen mit der Rotationsfläche. — Hierzu ist ein Beispiel in Fig. 172. —

Siebentes Kapitel.

Tangirende Flächen.

§. 306.

Aufgabe 41. Durch einen gegebenen Punkt einen Conus zu legen, welcher eine angegebene Rotationsfläche tangirt, und die Berührungscurve zu bestimmen.

Auflösung. Nimmt man einen beliebigen Parallelkreis an, und zieht durch den gegebenen Punkt eine Ebene, welche die gegebene Fläche nach einem auf diesem Parallelkreise liegenden Punkte tangirt, sucht sodann diesen Punkt auf, und verbindet diesen mit dem gegebenen durch eine Gerade, so erhält man eine Erzeugende des verlangten Conus, und jener Berührungspunkt gehört der Berührungcurve dieses Conus und der Fläche an. Um daher diesen Conus zu bestimmen, nehme man mehrere Parallelkreise an, und suche auf diesen die Berührungspunkte jener Ebenen (§. 302.) auf, welche durch den gegebenen Punkt gehen und die Rotationsfläche tangiren, verbinde diese einzelnen Berührungspunkte durch eine stätige Curve, so wird diese die Berührungcurve des verlangten Conus mit der gegebenen Fläche sein. Einzelne Punkte dieser Curve mit dem gegebenen Punkte durch Gerade verbunden, so erhält man auch Erzeugende des berührenden Conus. —

§. 307.

Aufgabe 42. Parallel mit einer gegebenen Geraden einen tangirenden Cylinder an eine Rotationsfläche zu legen, und die Berührungcurve zu suchen.

Auflösung. Nimmt man einzelne Meridiane der Rotationsfläche an, betrachtet diese als Directricen von Cylindern, welche von jener Fläche umhüllt werden, und legt an jeden dieser Cylinder eine Tangentialebene, die parallel zur gegebenen Geraden ist, zieht sodann durch den Berührungspunkt einer jeden dieser Tangentialebenen eine Gerade parallel zur gegebenen, so erhält man eine Erzeugende des gesuchten Cylinders. Die Berührungspunkte aller dieser Tangentialebenen durch eine stätige Curve verbunden, geben die Berührungcurve des tangirenden Cylinders mit der gegebenen Rotationsfläche. —

§. 308.

Die in den beiden vorigen Paragraphen gelösten Aufgaben können sogleich angewendet werden, um durch eine gegebene Gerade an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen. Hätten wir nämlich diese Ebene, so könnten wir durch ihren Berührungspunkt eine Gerade L in derselben ziehen, die parallel zur gegebenen Geraden ist. Legen wir daher parallel zur gegebenen Geraden einen tangirenden Cylinder an die Rotationsfläche (nach §. 306.), so wird eine der Erzeugenden dieses tangirenden Cylinders die Gerade L sein. Ziehen wir nun von einem beliebigen Punkte der ge-

gebenen Geraden eine Gerade L_1 nach dem Berührungspunkte der gesuchten Tangentialebene, so wird in dieser die Linie L_1 liegen müssen. Wenn wir also durch einen Punkt der gegebenen Geraden einen tangirenden Conus an die Rotationsfläche legen, so wird eine der Erzeugenden dieses Conus die Gerade L_1 sein. Suchen wir daher den Durchschnittspunkt der Directrix des tangirenden Conus mit der des tangirenden Cylinders, so wird dieser Punkt auf der gesuchten Tangentialebene liegen und der Berührungspunkt dieser Ebene sein. Da aber zwei solche Punkte erhalten werden, so haben wir zwei Tangentialebenen der Rotationsfläche, welche die gegebene Gerade enthalten. Da nun die Berührungspunkte dieser Ebenen angegeben werden können, so können auch diese zwei Tangentialebenen bestimmt werden. —

§. 309.

Ist ein Punkt auf irgend einer Fläche gegeben, so kann man für diesen an die Fläche eine Tangentialebene legen. Wenn nun die gegebene Fläche abwickelbar ist, so geschieht die Tangirung nach einer Lage der Erzeugenden dieser Fläche, mit einer jeden andern Fläche hat aber eine Tangentialebene derselben nur einen Punkt gemeinschaftlich. Soll daher eine Tangentialebene an eine Fläche gelegt werden, so kann dieselbe noch andere Bedingungen erfüllen, ohne dass sie aufhört, Tangentialebene der gegebenen Fläche zu sein, und zwar kann die Tangentialebene entweder noch eine oder auch noch eine zweite Fläche tangiren. Es können nämlich folgende Fälle stattfinden:

1. Kann eine Ebene eine entwickelbare Fläche tangiren, und zugleich Tangentialebene einer unentwickelbaren Fläche sein; denn jene wird nach einer Geraden und diese nach einem Punkte von der Ebene tangirt, folglich ist diese Ebene möglich und der Lage nach völlig bestimmt.
2. Kann eine Ebene zwei unabwickelbare Flächen tangiren und zugleich noch durch einen gegebenen Punkt gehen, oder auf einer gegebenen Ebene senkrecht stehen.
3. Kann eine Ebene drei nicht entwickelbare Flächen zugleich tangiren.

Anmerk. Ist ausser der Bedingung, dass eine Ebene zwei nicht entwickelbare Flächen tangiren soll, keine andere gegeben, so ist die Tangentialebene unbestimmt, und kann daher noch tangirend an beiden Flächen fortbewegt werden. Da aber hierdurch eine Fläche beschrieben wird, so kann man für zwei unentwickelbare Flächen eine tangirende Fläche bestimmen. Diese Fläche wird entwickelbar sein. —

§. 310.

Aufgabe 43. Es sind zwei nicht abwickelbare Flächen gegeben; man soll an diese Flächen eine gemeinschaftliche Tangentialebene legen, die senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht.

Auflösung. Ist die gegebene Ebene durch E bezeichnet, so ziehe man zwei Cylinder, von welchen der eine die erste und der andere die zweite Fläche tangirt, und deren Generatricen auf E senkrecht, also unter sich parallel sind. Die Berührungscurve des einen Cylinders sei c_1 , die des andern c_2 . Nun suche man die Durchschnittscurven beider Cylinder mit der Ebene E , und lege an diese beide Curven eine gemeinschaftliche Tangente t , so kann diese Tangente als eine in der für beide Cylinder gemeinschaftliche Tangentialebene liegende Gerade betrachtet werden. Geben wir nun diese Tangentialebene an, bestimmen ihre Berührungspunkte und die Erzeugenden mit beiden Cylindern, von welchen die eine g_1 , die andere g_2 sein soll, so wird c_1 von g_1 und c_2 von g_2 geschnitten, und zwar in Punkten, die der gesuchten Tangentialebene angehören, wodurch also letztere bestimmt ist.

§. 311.

Aufgabe 44. Durch einen gegebenen Punkt an zwei nicht entwickelbare Flächen eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen.

Auflösung. Man nehme beliebige Ebenen an, und ziehe auf diese senkrecht solche Ebenen, welche die beiden gegebenen Flächen tangiren (§. 310.), so werden die auf einander folgenden Lagen aller dieser Tangentialebenen eine entwickelbare Fläche bilden, welche die beiden gegebenen nicht entwickelbaren Flächen tangirt. Legt man nun an jene Fläche eine Tangentialebene, welche durch den gegebenen Punkt geht, so erhält man die gesuchte.

§. 312.

Aufgabe 45. Es sind drei unentwickelbare Flächen gegeben; man soll ihre gemeinschaftliche Tangentialebene angeben.

Auflösung. Es sei M die erste, N die zweite und P die dritte der gegebenen Flächen. Legen wir an M und N die gemeinschaftliche tangirende Fläche P_1 , sodann auch für M und P eine solche Fläche P_2 , und es sei nun m_1 die Curve, welche P_1 mit M und m_2 die Curve, die P_2 mit M gemeinschaftlich hat, so werden sich m_1 und m_2 schneiden. Ziehen wir nun durch den erhaltenen Durchschnittspunkt eine Erzeugende g_1 von P_1 und sodann eine Erzeugende g_2 von P_2 , und legen durch g_1 und g_2 eine Ebene, so ist diese die gesuchte. —

§. 313.

Aufgabe 46. Für drei Kugeln eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu finden. —

Auflösung. Ist A die erste, B die zweite und C die dritte dieser Kugeln; so suchen wir für A und B ihre tangirende Fläche (welche hier ein Conus ist) k_1 , sodann bestimmen wir für A und C die Tangentialfläche k_2 . Nun soll A von k_1 nach a und von k_2 nach b berührt werden, so schneiden sich a und b nach zwei Punkten. Zieht man durch jeden dieser Punkte für k_1 und k_2 die Erzeugende, und legt durch jede dieser Erzeugenden eine Berührungsebene an den entsprechenden Conus, so erhält man zwei Ebenen, welche jede der drei Kugeln zugleich berühren. Da aber für P und B sowohl, als auch für A und C nicht eine, sondern zwei tangirende Flächen möglich sind, und je zwei Berührungscurven sich auf A schneiden, so erhalten wir acht Berührungspunkte, und mithin gibt es auch für drei Kugeln acht gemeinschaftliche Tangentialebenen. —

Vierte Abtheilung.

Erzeugung und Tangirung der windschiefen Flächen.

Achtes Kapitel.

§. 314.

Bewegt sich eine Gerade so, dass nie zwei auf einander folgende Lagen derselben in einer Ebene liegen, so entsteht hierdurch eine Fläche, die man windschiefe Fläche nennt.

Da in einer solchen Fläche nie zwei auf einander folgende Lagen der Erzeugenden in einer Ebene liegen, so hat dieselbe auch kein ebenes Flächenelement. —

Es bewege sich nun

1. die Erzeugende so, dass sie stets drei in verschiedenen Ebenen liegende Curven A, B, C trifft, so entsteht hierdurch eine Fläche, die windschief ist. Um eine beliebige Lage der Erzeugenden zu erhalten, nehme man auf A einen Punkt an, lege durch diesen und die Curve C einen Conus, und suche die Durchschnittspunkte dieser konischen Fläche mit der Linie B, so werden die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden des Conus einzelne Lagen jener Generatrix sein. Auf dieselbe Weise müsste man verfahren, um noch mehrere Lagen der Erzeugenden zu erhalten, wenn man die Fläche selbst darstellen wollte. — Zieht man für die Durchschnittspunkte der Linien A, B, C mit einer Erzeugenden die Tangenten, so liegen diese in verschiedenen Ebenen, und da diese als Direktrizen für ein Flächenelement dienen können, so wird also dieses Flächenelement nicht eben sein. Ist jede dieser drei Direktrizen eine Gerade, so entsteht durch Bewegung einer Geraden an diesen Direktrizen eine windschiefe Fläche, welche Hyperboloid mit einem Fache genannt wird, und schon früher erwähnt wurde. Eine beliebige Lage der Erzeugenden dieses Hyperboloides wird erhalten, wenn man durch einen Punkt der Direktrix A und die Direktrix C eine Ebene legt, und den Durchgangspunkt von B mit dieser Ebene sucht. Zieht man von dem in A angenommenen Punkte nach diesem Durchgangspunkte eine Gerade, so wird von dieser die

Direktrix C getroffen, und man erhält folglich eine Lage der Generatrix. Bestimmt man beliebig viele Lagen dieser letzteren, so kann man hierdurch die Fläche sich vorstellen. —

Es können zwei Direktrizen noch Curven sein, z. B. A und C, und B eine Gerade, und ferner kann nur eine Direktrix eine Curve, jede der übrigen aber eine Gerade sein.

2. Bewegt sich eine Gerade so, dass sie stets zwei Curven trifft, und parallel zu einer angegebenen Ebene bleibt, so entsteht wieder eine windschiefe Fläche. Ist eine der gegebenen Direktrizen eine Gerade, so entsteht hierdurch das Conoid. Steht die geradlinige Direktrix senkrecht auf der Direktionsebene, so entsteht das senkrechte Conoid. Sind endlich beide Direktrizen gerade Linien, so geht das Conoid in ein hyperbolisches Paraboloid über.

§. 315.

Nimmt man auf einem Flächenelemente einen solchen kleinen Theil an, der als eben betrachtet werden kann, und verlängert diesen ebenen Theil, so erhält man eine Tangentialebene. Legt man nun durch einen gegebenen Berührungspunkt eine Generatrix der Fläche, so erhält man eine der Tangentialebene angehörnde Gerade; legt man ferner durch jenen Punkt eine Curve, die der Fläche angehört, und an diese durch den gegebenen Berührungspunkt eine Tangente, so wird diese auch in der Tangentialebene liegen, und es ist mithin diese ganz und gar der Lage nach bestimmt. Von allen anderen nicht durch den Berührungspunkt gehenden Generatricen werden auch manche die Tangentialebene treffen, und zwar alle jene, die mit ihr nicht parallel sind. Wir ersehen also hieraus, dass die Tangentialebene einer windschiefen Fläche diese in einem Punkte berührt, in allen übrigen aber schneiden kann.

§. 316.

Für die Erzeugung der windschiefen Flächen sind noch einige Sätze zu erwähnen nöthig.

1. (Fig. 173.) Es seien die Seiten des $\triangle ABC$ in den Punkten a, b, c von einer Geraden getroffen, so ist, wenn $Cf \neq AB$ gezogen wird:

$$aB : Cf = Bb : bC, \text{ ferner}$$

$$Cf : Aa = Cc : Ac,$$

und hieraus hat man

$$Aa \times Bb \times Cc = aB \times bC \times Ac$$

d. h. schneidet man die drei Seiten eines Dreieckes durch eine Gerade, so werden die Produkte aus den nicht an einander hängenden Stücken der Seiten einander gleich sein. —

2. (Fig. 174.) Es sei das Viereck $ABCD$ ein windschiefes; dasselbe ist von einer Ebene so geschnitten, dass die Durchgangspunkte seiner Seiten mit dieser Ebene a, b, c und d sind. Zieht man nun die Diagonale BD , und legt durch A, B und D eine Ebene, so wird diese von der ersten Ebene nach der Geraden baS geschnitten, und legt man durch B, C und D eine Ebene, so wird diese von der Ebene der Punkte a, b, c, d in cdS geschnitten, wobei die Geraden ba und cd in einem Punkte S der Diagonale BD zusammen kommen müssen, weil letztere von der am Anfange angenommenen Ebene nur in einem Punkte getroffen werden kann. Es ist nun (nach 1.)

$$Aa \times DS \times Bb = aD \times BS \times bA \text{ und}$$

$$Dd \times BS \times cC = Cd \times Ds \times Bc$$

folglich

$$Aa \times Bb \times cC \times dD = Ab \times Bc \times Cd \times Da$$

d. h. Schneidet man die Seiten eines Viereckes durch eine Ebene, so müssen die Produkte aus den nicht an einander liegenden Stücken derselben einander gleich sein.

3. Ist (Fig. 174.)

$$Ab \times Bc \times Cd \times Da = aA \times bB \times cC \times dD,$$

und man zieht die Geraden BDS, cdS, baS , so wird (nach 1.)

$$aA \times bB \times sD = Da \times Ab \times Bs \text{ und}$$

$$cC \times Dd \times SB = Bc \times Cd \times DS,$$

daher erhält man durch Multiplikation dieser drei Gleichungen:

$$Ds \times BD + Ds \times DS = DS \times BD + DS \times Ds$$

oder

$$Ds = DS$$

Da aber in diesem Falle a mit S zusammenfällt, so liegen die Punkte a, b, c und d in einer Ebene.

§. 317.

Hat man nun ein Hyperboloid mit einem Fache, dessen Direktrizen (Fig. 175.) A_1, A_2 und A_3 sind, und B_1, B_2, B_3 sind drei Lagen der Generatricen, so schneiden diese die drei Direktrizen in den Punkten a, b, c, h, r, g, f, e und d , und es liegen h, b, g und e in einer Ebene, weil A_2 und B_2 sich schneiden. Lässt man nun B_1, B_2 und B_3 fest liegen, und eine Gerade an diese fortbewegen, so entsteht ein zweites Hyperboloid, von welchem ks eine Lage der Generatrix sein soll; mithin werden die Punkte h, k, g und s in einer Ebene liegen, weil hg und ks sich schneiden, nämlich in l . Nimmt man eine Generatrix mq des ersten Hyperboloides an, so werden die Punkte m, b, q und e in einer Ebene liegen, weil mq und A_2 sich schneiden, nämlich in p . Nun hat man (nach 2. des vor. §.):

$$fh \times ab \times cg \times de = fe \times ha \times bc \times dg, \text{ ferner}$$

$$ha \times kc \times dg \times fs = fh \times ak \times cg \times ds \text{ und}$$

$$ma \times bc \times qd \times fe = fm \times ab \times cq \times de,$$

daher durch Multiplikation dieser Gleichungen:

$$am \times ck \times dq \times sf = fm \times ak \times cq \times ds$$

Hieraus folgt (nach 3. des vor. §.), dass die Punkte m, k, q und s in einer Ebene liegen. Es müssen sich also die Geraden mq und ks schneiden, und es schneidet also eine beliebige Generatrix des ersten Hyperboloides eine jede des zweiten, oder alle Generatricen des ersten werden von denen des zweiten Hyperboloides geschnitten. Es ist also das zweite Hyperboloid dasselbe, wie das erste, und es kann mithin ein Hyperboloid auf zweierlei Weise erzeugt werden. —

Anmerk. Nimmt man einen beliebigen Punkt auf einem Hyperboloide an, so kann man durch denselben zwei Generatricen verschiedenen Systems legen, und legt man durch diese eine Ebene, so erhält man eine Tangentialebene des Hyperboloides für diesen Punkt. — Es ist leicht aus den obigen Betrachtungen zu ersehen, wie man ein Hyperboloid mit einem Fache konstruiren kann, wenn seine drei Direktrizen bekannt, und wie man eine Generatrix des zweiten Systems erhält, wenn drei Lagen der Generatrix des ersten Systems bekannt sind.

§. 318.

(Fig. 176.) Ist D_1 die eine und D_2 die zweite Direktrix eines hyperbolischen Paraboloides, ferner ac und df zwei Lagen der Erzeugenden desselben, so kann man diese letztere als zwei Lagen

der Direktionsebene oder der Ebene ansehen, mit welcher dieselben parallel bleiben. Zieht man nun durch den beliebigen Punkt m die Geraden $D'_1 \neq D_1$ und $D'_2 \neq D_2$, lässt ac und df fest liegen, und eine Gerade an diesen fortbewegen, die parallel zur Ebene $D'_1 m D'_1$ bleibt, so entsteht ein zweites Paraboloid. Ist nun von diesem die Gerade be eine beliebige Lage der Generatrix und von dem ersteren die Gerade gh eine beliebige Lage der Erzeugenden, so ist (nach §. 59.), weil die Geraden ac , gk und df als die Stellungen der Direktionsebene des ersten Paraboloides betrachtet werden können:

$$ag : ck = gd : kf \text{ oder}$$

$$ag \times kf = ck \times gd \dots (1)$$

Man kann aber auch die Geraden D_1 , be und D_2 als drei parallele Stellungen der Direktionsebene $D'_2 m D'_1$ betrachten, und deshalb ist wieder (§. 39.):

$$bc : fe = ab : de, \text{ und daher auch}$$

$$bc \times de = ab \times fe \dots (2)$$

Durch Multiplikation von (1) und (2) ergibt sich:

$$ag \times bc \times kf \times de = ab \times ck \times ef \times dg,$$

daher liegen (nach §. 316., 3.) die Punkte g , b , k und e in einer Ebene, oder die beliebige Generatrix gk des ersten Paraboloides muss die beliebig angenommene Erzeugende be des zweiten Paraboloides schneiden. Da nun auf dieselbe Weise gezeigt werden kann, dass jede Generatrix des ersten eine Lage der Generatrix des zweiten Paraboloides schneiden muss, so liegen alle Punkte des ersten auch auf allen Punkten des zweiten Paraboloides, oder das auf die erste Weise erzeugte Paraboloid ist dasselbe, als das auf die zweite Weise erzeugte. Es lässt also auch ein hyperbolisches Paraboloid zweierlei Erzeugungsarten zu.

Anmerk. Aus diesem folgt, dass man durch einen Punkt eines Paraboloides eine Erzeugende des ersten und eine des zweiten Systems legen kann. Legt man durch zwei solche Erzeugende eine Ebene, so erhält man für den angenommenen Punkt eine Tangentialebene des Paraboloides.

§. 319.

Aufgabe 47. Die Direktrixen eines Paraboloides sind parallel zur vertikalen Tafel, und die Generatrix desselben soll stets parallel zur horizontalen Tafel bleiben; man soll das Paraboloid konstruieren.

Auflösung. (Fig. 177.) Ist (D_1, D'_1) die eine, (D_2, D'_2) die andere Direktrix, so nehme man die Geraden $a'_1 b'_1$, $a'_2 b'_2$, $a'_3 b'_3$, $a'_4 b'_4$, $a'_5 b'_5$, etc. etc. parallel zur Axe an, so werden

diese die vertikalen Projektionen einzelner Lagen der Generatrix sein, zu welchen die horizontalen Projektionen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ etc. etc. gehören. Durch eine gehörige Anzahl von Lagen der Generatrix wird die Form der Fläche bestimmt sein. — Ist der Punkt (m_1, m'_1) gegeben, durch welchen eine Generatrix der Fläche gezogen werden soll, so ziehe man $m'_1 m'_2$ parallel X , bestimme die horizontale Projektion des Punktes, dessen vertikale in m'_2 ist, so wird man m_2 erhalten. Zieht man also $m_1 m_2$, so ist diese die horizontale Projektion der verlangten Generatrix.

Nun lasse man die Generatricen (G_1, G'_1) und (G_2, G'_2) fix liegen, und an diese eine Gerade so fortbewegen, dass sie parallel zur vertikalen Tafel bleibt, so wird hierdurch (nach vor. §.) dasselbe Paraboloid erzeugt. Ist daher $m_1 n$ die horizontale Projektion einer Generatrix des zweiten Systems, so wird die zugehörige vertikale Projektion in D'_3 gefunden, wie die Konstruktion zeigt. — Sollte man durch (m_1, m'_1) eine Tangentialebene legen, so würde man diese erhalten, wenn man durch die Geraden (G_1, G'_1) und (D_3, D'_3) eine Ebene legt. —

§. 320.

Bewegt sich eine Gerade so, dass sie beständig eine fixe Gerade und eine Curve trifft, und dabei stets mit einer Ebene parallel bleibt, auf welcher die fixe Gerade senkrecht steht, so erhält man das senkrechte Conoid.

Nimmt man die horizontale Tafel als Direktionsebene und eine auf derselben senkrechte Gerade als Direktrix an, so nehme man verschiedene Ebenen parallel zur horizontalen Tafel an, und es werden sodann ihre vertikalen Spuren die vertikalen Projektionen von Lagen der Generatrix sein, deren horizontale Projektionen leicht angegeben werden können, und wodurch also auch das senkrechte Conoid verzeichnet werden kann —

§. 321.

Bewegt sich eine Gerade so, dass sie stets horizontal bleibt, und dabei eine Kugel berührt, so erhält man das Kugelconoid. Die Berührungcurve des letzteren mit der Kugel ist ausser jener Geraden die Direktrix. Nimmt man zur horizontalen Tafel parallele Ebenen an, sucht die Parallelkreise, nach welchen die Kugel von jenen Hülfebenen geschnitten wird, und zieht an diese von den Durchgangspunkten der geraden Direktrix mit den Hülfebenen Tangenten, so erhält man Generatricen des Conoids und mithin auch dieses selbst.

Fünfte Abtheilung.

Durchdringung der Flächen unter sich.

Achtes Kapitel.

Durchdringung entwickelbarer Flächen unter sich.

§. 322.

Diese allgemeine Aufgabe enthält auch die besondere: den Durchschnitt einer Fläche mit einer Ebene zu bestimmen. Das allgemeine Verfahren der letzteren Aufgabe besteht darin, dass man die Durchgangspunkte der Erzeugenden der Fläche und der Durchschnittsebene aufsucht, und die erhaltenen Punkte durch eine Curve verbindet, so wird diese der gesuchte Durchschnitt sein. Man kann aber auch zur Aufsuchung dieses Durchschnittes Ebenen zu Hülfe nehmen, welche die Fläche entweder nach Erzeugenden oder nach bekannten Curven schneiden. Diese Durchschnittscurven sowohl, als auch die Communsektionen der Hülfeebenen mit der Schnittebene müssen bestimmt werden, und man erhält sodann in den Durchschnitten jener Curven mit diesen Communsektionen einzelne Punkte der gesuchten Durchschnittslinie. — Das zuletzt hier angegebene Verfahren wird auch eingeschlagen, um die Durchschnittslinie zweier Flächen anzugeben. Man schneidet nämlich beide Flächen durch Hülfeebenen, welche mit jeder derselben einfache und leicht zu konstruierende Curven gemein haben, sucht die Durchschnittspunkte dieser Curven auf, so werden diese dem gesuchten Durchschnitt angehören. Zu Hülfeebenen wird man zur horizontalen Tafel parallel, auf dieser senkrecht, zur vertikalen Tafel parallel oder auf dieser senkrecht stehende Ebenen etc. etc. wählen, je nachdem die eine oder die andere Lage der Hülfeebenen leicht konstruierbare Schnitte gibt. —

§. 323.

Aufgabe 48. Es sind zwei Cylinderflächen gegeben, man soll ihre Durchschnittslinie aufsuchen.

Auflösung. Man schlage hier dasselbe Verfahren ein, welches für den Durchschnitt zweier Prismen (§. 186. und §. 187.) angegeben wurde, indem man jeden Cylinder als Prisma von unendlich vielen Seitenebenen betrachten kann, wenn man auf die Anzahl dieser Seitenebenen nicht Rücksicht nimmt.

Beispiel. (Fig. 178.) Hier ist $ADGKb_1p_1s_1$ die horizontale, $A'F's_1p_1$ die vertikale Projektion des einen, $A_1B_1D_1M_1p_2$ die horizontale, $A_1H_1s_2p_2$ die vertikale Projektion des andern Cylinders, deren

Durchdringungslinie bestimmt werden soll. Diese Cylinder haben eine Eintritts- und eine Austrittscurve, deren Projektionen $(\alpha_1\beta_1\delta_1\varepsilon_1, \alpha'_1\beta'_1\delta'_1\varepsilon'_1)$ und $(\alpha_2\beta_2\delta_2\varepsilon_2, \alpha'_2\beta'_2\delta'_2\varepsilon'_2)$ sind. — Für einen Punkt einer der Curven erhält man eine Tangente derselben, indem man durch diesen Punkt an jeden der Cylinder eine Tangentialebene legt, so wird die Communsektion dieser beiden Tangentialebenen die gesuchte Tangente sein. —

§. 324.

Soll die Durchdringungslinie zweier Kegel, oder eines Cylinders und eines Kegels bestimmt werden, so verfährt man ganz und gar nach den in den §§. 189, 190. und 191. angegebenen Regeln, und hiernach wurden auch die in den Figg. 179., 180. und 181. gezeichneten Aufgaben behandelt, von welchen die erste die Durchdringung zweier Cylinder darstellt, von denen der eine parallel mit der horizontalen Tafel und der andere senkrecht auf dieser Tafel steht, die zweite in Fig. 180. die Durchdringung eines Kegels mit einem Cylinder und die dritte in Fig. 181. die Durchdringung zweier Kegel zeigt. —

Neuntes Kapitel.

Durchdringung zweier Flächen überhaupt.

§. 325.

Aufgabe 49. Es ist ein Cylinder angegeben, dessen horizontale Spur ein Kreis ist, und derselbe ist von einer Rotationsfläche geschnitten; man soll die Durchdringungslinie bestimmen.

Auflösung. Gibt man die horizontale Spur des Cylinders an, und schneidet sodann beide Flächen durch Ebenen, die parallel zur horizontalen Tafel sind, so erhält man als Durchschnitte der Hülfeebenen mit der Rotationsfläche Parallelkreise und als Durchschnitte des Cylinders mit diesen Ebenen werden Figuren erhalten, die kongruent der horizontalen Spur des Cylinders sein müssen. Wenn man daher eine Hülfeebene parallel zur horizontalen Tafel legt, und den Durchschnitt des auf der Rotationsfläche erhaltenen Parallelkreises mit dem Durchschnitte der Hülfeebene und des Cylinders aufsucht, so erhält man Punkte der Durchschnittslinie.

In Fig. 182. ist ABDE die horizontale Spur eines Cylinders, ACHLE die horizontale und 'A'K'L'D' die vertikale Projektion des letzteren, M_1 ist die horizontale und M'_1 die vertikale Projektion des Mittelpunktes einer Kugel, die von jenem geschnitten wird. Legt man z. B. Ebene $a_4 b_4$ parallel zur horizontalen Tafel, so schneidet diese den Cylinder nach einem Kreise, dessen Mittelpunkt in $(m_4 m'_4)$, und im Durchschnitte der Axe des Cylinders ($MM_1, M'M'_1$) mit $a_4 b_4$ sein wird. Beschreibt man daher mit $m'_4 m''_4$ aus m_4 eine Kreislinie, so müssen auf dieser einzelne Punkte des Durchschnittees enthalten sein. Nun hat man noch aus M_1 mit dem Halbmesser, der gleich $M'_1 m''_4$ ist, eine Kreislinie zu beschreiben, so wird diese die Durchschnittslinie der Hülfssebene $a_4 b_4$ und des Cylinders schneiden. Dieses geschieht nun in der horizontalen Tafel in dem Punkte s_1 , wenn man daher die Gerade $s_1 s'_1$ senkrecht auf X zieht, so wird im Durchschnitte von $M'_1 s'_1$ mit $s_1 s'_1$ nämlich in s'_1 die vertikale Projektion eines Punktes der Durchschnittslinie erhalten. Auf dieselbe Weise bestimme man jeden der übrigen dieser Punkte, verbinde dieselben in gehöriger Ordnung, so erhält man die Projektionen der Durchschnittslinie. Die Linie $(c_1 d_1 g_1 k_1 s_1, c'_1 d'_1 k'_1 s'_1)$ ist die Eintritts- und die Linie $(a_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1, a'_1 \beta'_1 \gamma'_1 \delta'_1)$ die Austrittslinie.

§. 326.

Aufgabe 50. Ein Conus und eine Rotationsfläche durchdringen sich; man soll ihre Durchschnittscurve bestimmen.

Auflösung. Da die Punkte der Durchschnittscurve wieder beiden Flächen angehören, so müssen wir, um diese zu finden, Erzeugende oder andere Linien beider Flächen haben, die sich schneiden. Früher haben wir die gesucht, die immer in einer und derselben Ebene oder Fläche waren, von welcher letzteren die beiden Flächen geschnitten wurden. Dieses wollen wir hier auch thun, und jetzt anstatt einer Hülfssebene eine Hülfsfläche nehmen; diese Hülfsfläche soll aber die beiden gegebenen Flächen aufs einfachste schneiden. Nehmen wir nun einen Conus zu Hülfe, so wird dieser den gegebenen Conus nach zwei Geraden aufs einfachste schneiden, welches der Fall sein wird, wenn beide Regel einerlei Centrum haben. Um nun einen solchen bestimmten Conus zu erhalten, nehmen wir einen Parallelkreis der Rotationsfläche als Direktrix desselben, welchen wir noch beliebig annehmen können, so ist dieser zugleich der Schnitt, den der Hülfsconus mit der Rotationsoberfläche bildet. Um den Conus zu projiciren, wollen wir durch das Centrum des Conus und durch das Centrum des Parallelkreises (der Direktrix) eine Gerade legen, welche die Axe des Hülfsconus ist. Suchen wir von dieser die horizontale Spur, so ist diese das Centrum der Spur des Conus, der zu Hülfe genommen wurde. Diese Spur ist ein Kreis, von welchem nur noch der Radius gesucht werden darf. Um diesen zu erhalten, legen wir an die vertikale Projektion der Direktrix die Projektionen der äussersten Erzeugenden. Diese treffen die Axe, und die Durchschnitte der vertikalen Projektionen von den äussersten Erzeugenden mit der Axe X schliessen den Durchmesser der horizontalen Spur der Hülfsfläche ein, und wir können daher die horizontale Spur der letzteren ver-

zeichnen. Letztere schneidet die horizontale Spur des gegebenen Conus, wodurch wir Punkte der gemeinschaftlichen Erzeugenden beider Regel erhalten, und bestimmen wir diese, so werden sie den angenommenen Parallelkreis schneiden, wodurch wir Punkte der Durchschnittscurve erhalten. Durch genügsame Wiederholung dieses Verfahrens erhalten wir so viele Punkte der gesuchten Durchschnittslinie, als zur Bestimmung derselben nothwendig sind.

Anmerk. In Fig. 183. ist die Durchdringungslinie eines senkrechten Kreiskegels und einer Kugel aufgesucht, und zwar durch horizontale Hülfssebenen.

§. 327.

Aufgabe 51. Die Durchschnittscurve eines Cylinders mit einer Rotationsfläche zu bestimmen.

Auflösung. Da ein Cylinder nur ein speciel-ler Fall vom Conus ist, so gilt hier wieder das vorige Verfahren. Der zur Hülfsfläche angenommene Regel wird in einen Cylinder übergehen, weil er mit dem gegebenen sein Centrum in unendlicher Entfernung hat. Wir projiciren daher einen Cylinder vermittelt eines gegebenen Parallelkreises, der mit dem gegebenen parallel ist, suchen sodann die Axe dieses Cylinders, bestimmen ihre horizontale Spur, welche so gross als ihre angegebene Direktrix ist. Vermittelt des Durchschnittees der Spur des Hülfszylinders und der des gegebenen finden wir die Erzeugenden, welche beide gemein haben. Diese schneiden den Parallelkreis ab, wodurch wir Punkte der Durchschnittscurve, und diese selbst durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens erhalten.

§. 328.

Aufgabe 52. Es ist eine windschiefe Fläche und eine Rotationsfläche gegeben, welche Flächen sich durchdringen, man soll ihre Durchschnittscurve bestimmen.

Auflösung. Wir nehmen hier eine Ebene zu Hülfe, welche die Rotationsfläche nach einem Parallelkreise schneidet; und da wir die Rotationsaxe senkrecht auf die horizontale Tafel stellen können, so wird die horizontale Projektion des Schnittes immer ein Kreis sein, und die Hülfssebene senkrecht auf der vertikalen Tafel stehen. Nun muss man den Durchgang der Erzeugenden von der windschiefen Fläche in dieser Ebene suchen, um die Durchschnittscurve der windschiefen Fläche mit der Ebene zu erhalten. Da wo die vertikale Projektion einer Erzeugenden die vertikale Spur der Hülfssebene schneidet, ist immer die Projektion eines Punktes, welcher der Ebene und der windschiefen Fläche angehört, dessen horizontale Projektion bestimmt werden kann. Beide Curven schneiden sich, wodurch wir zwei Punkte des gesuchten Durchschnittees und diese selbst durch Wiederholung der Konstruktion, erhalten.

§. 329.

Aufgabe 53. Es durchdringen sich zwei Rotationsflächen, deren Axen parallel laufen; man soll ihren Durchschnitt bestimmen.

Auflösung. Wir stellen hier die horizontale Tafel senkrecht auf jede der beiden Axen, oder

umgekehrt. Nun müssen wir hier entweder eine Fläche oder Ebene zu Hülfe nehmen. Am einfachsten wird jede Rotationsfläche nach einer Ebene geschnitten, deren Schnitt ein Parallelkreis ist. Wollen wir also hier eine Ebene mit der horizontalen Tafel parallel zu Hülfe nehmen, so wird sie beide Flächen nach Parallelkreisen schneiden. Die beiden Parallelkreise schneiden sich, wodurch wir Punkte der Durchschnitcurve erhalten. In Fig. 184. ist dieses Verfahren an dem Durchschnitte zweier Kugeln gezeigt. —

§. 330.

Aufgabe 54. Zwei Rotationsflächen, die sich durchdringen, und deren Axen sich schneiden, sind gegeben; man soll ihre Durchschnitcurve bestimmen.

Auflösung. Wir können die horizontale Tafel senkrecht auf die Axe der einen Fläche stellen, und die vertikale Tafel parallel zu beiden Rotationsaxen, welches leicht geschehen kann; denn wenn die eine Axe senkrecht auf der horizontalen Tafel steht; so ist sie schon parallel zur vertikalen Tafel, und wir dürfen daher nur durch die horizontale Spur dieser Axe die horizontale Projektion der andern Axe parallel mit der Axe X ziehen, und die vertikale Projektion derselben bestimmen. Von der zweiten Fläche haben wir bloss den Meridian in der vertikalen Tafel anzugeben, welcher in seiner wahren Grösse in dieser Tafel erscheinen wird. — Um nun endlich zum Resultate zu gelangen, müssen wir entweder eine Ebene oder Fläche zu Hülfe nehmen. Eine Ebene kann wohl eine Fläche nach einem Parallelkreise schneiden, aber die andere nicht, wollen wir daher eine Fläche zu Hülfe nehmen. Diese, wenn sie eine Rotationsfläche ist, wird jede der Flächen nach einem Parallelkreise schneiden, wenn sie mit denselben einerlei Rotationsaxen hat. Da nun diese Hülfsfläche die Axe der einen sowohl als auch die Axe der andern Fläche zu ihrer Rotationsaxe haben soll, so kann dieselbe nur eine Kugel sein, weil diese beliebig viele Rotationsaxen haben kann. Das Centrum der Kugel muss aber in ihrer Rotationsaxe liegen, es muss daher sowohl in der Axe der einen, als auch in der Axe der andern Fläche liegen, und mithin im Durchschnitte beider Axen. Legen wir nun durch diesen Punkt als Centrum beliebig viele Hülfskugeln, so wird jede die beiden Flächen nach Parallelkreisen schneiden, welche in vertikalen Projektionen gerade Linien sein werden, indem sie senkrecht auf den Rotationsaxen, und diese parallel zur vertikalen Tafel sind. Die vertikalen Projektionen der beiden Parallelkreise geben in ihrem Durchschnitte Punkte der Curve an, die man nur noch horizontal zu projectiren hat. Zwei Punkte der Curve erhält man auch, wenn man die Durchschnitte beider Meridiane projectirt. —

§. 331.

Aufgabe 55. Es sind zwei Rotationsflächen gegeben, deren Axen sich nicht schneiden, man soll ihre Durchdringungcurve bestimmen.

Auflösung. Wir können die horizontale Tafel senkrecht auf eine der Rotationsaxen stellen,

und die vertikale Tafel parallel zur andern Rotationsaxe, so ist sie zugleich zur ersten Axe parallel. Wir müssen also die horizontale Projektion der zweiten Axe parallel zur Projektionsaxe legen, so dass sie nicht durch die horizontale Projektion der ersten geht. Hier wird nun keine Ebene und keine Fläche beide Flächen zugleich aufs einfachste schneiden. Wir wollen daher eine Ebene zu Hülfe nehmen, welche die erste Fläche, deren Axe auf der horizontalen Tafel senkrecht steht, aufs einfachste, nämlich nach einem Parallelkreise schneidet, und von der andern Fläche (die bloss durch den Meridian und die Axe angegeben ist) mehrere Parallelkreise projectiren. Von diesen Parallelkreisen suchen wir nun den Durchgang in die Hülfebene. Um diesen zu erhalten, bestimmen wir zuerst die Communktion zwischen der Ebene des Parallelkreises und der Hülfebene (welche in der vertikalen Projektion ein Punkt, und in der horizontalen Projektion ein Perpendikel auf die Axe ist). Um den Durchchnitt der Communktion und des Parallelkreises zu erhalten, drehen wir die Ebene desselben, bis sie parallel zur horizontalen Tafel ist, damit die horizontale Projektion ein Kreis wird, von welchem wir nur das Centrum bestimmen dürfen. Wo nun dieser Kreis die horizontale Projektion der Communktion schneidet, sind Projektionen der Punkte des Durchganges eines Parallelkreises in die Hülfebene. Bestimmt man auf diese Weise den Durchgang von mehreren Parallelkreisen in die Hülfebene, so erhält man durch Verbindung aller Durchgangspunkte eine Curve, die sowohl in der zweiten Fläche als auch in der Hülfebene liegt. Der Parallelkreis, nach welchem die Hülfebene die erste Fläche schneidet, liegt nun auch in der Hülfebene, daher schneidet die Curve den Parallelkreis, und man erhält hierdurch zwei Punkte der Durchschnitcurve. Durch Wiederholung der ganzen Operation, indem man eine zweite, dritte etc. etc. Hülfebene annimmt, ist man im Stande die ganze Curve zu verzeichnen.

§. 332.

Aufgabe 56. Eine windschiefe Fläche und ein Cylinder durchdringen sich; man soll die Durchschnitcurve bestimmen.

Auflösung. Wir nehmen hier eine Ebene zu Hülfe, die beide Flächen aufs einfachste schneidet. In Bezug auf die Lage der Hülfebene, so muss diese mit dem Cylinder parallel sein, und daher eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders enthalten; sie muss auch ferner eine gerade Erzeugende der Windschiefen enthalten. Projectiren wir daher von der Windschiefen eine gerade Erzeugende, und legen durch einen Punkt derselben eine Parallele zur Erzeugenden des Cylinders, durch beide Gerade eine Ebene, so wird sie die gewünschten Bedingungen erfüllen. Sie schneidet nämlich den Cylinder nach einer oder zwei geraden Erzeugenden, und ebenso auch die Windschiefe (nach Annahme) nach einer Erzeugenden. Die Erzeugenden des Cylinders und die Erzeugende der Windschiefen durchschneiden sich, wodurch wir Punkte der Curve erhalten. Um letztere selbst zu bestimmen, dürfen wir nur diese Operation genugsam wiederholen.

Entstehung einer Curve, Projectionen derselben, Projectionen eines auf derselben liegenden Punktes, aus zwei Projectionen die dritte anzugeben, §. 223. — §. 225	105
Aus einer Projection einer ebenen Curve und den Spuren ihrer Ebene ihre andere Projection anzugeben, Durchschnitt einer ebenen Curve mit einer Ebene, Beispiele, §. 226. — §. 228.	107

Zweite Abtheilung.

Erzeugung der entwickelbaren Flächen, Tangirung und
Durchschnitte derselben durch Ebenen.

Drittes Kapitel.

Erzeugung der entwickelbaren Flächen.

Erklärungen, Darstellung einer Fläche, Tangentialebene derselben, §. 229. — §. 231.	110
Allgemeine Erzeugungsart der entwickelbaren Flächen, Eigenschaften derselben und ihre Tangentialebenen, §. 232. — §. 233.	111
Erzeugung des Cylinders, senkrechter und schiefer Cylinder etc. etc., Durchschnitte desselben mit Ebenen, die parallel zur Generatrix oder parallel zur Direktrix sind, §. 234. — §. 236.	111
Erzeugung des Conus, sein Mantel etc. etc., senkrechter Conus, Schnitte desselben durch Ebenen, welche durch sein Centrum gehen, oder die parallel zu seiner Direktrix sind, §. 237. — §. 240.	112
Einen Cylinder, dessen Direktrix und Generatrix gegeben ist, zu projectiren, seine Spuren zu bestimmen und einen Punkt seiner Oberfläche, dessen eine Projektion angegeben ist, zu projectiren. Beispiel, §. 241. — §. 242.	114
Aus der Direktrix eines Kegels und seinem Centrum seine Projektionen zu bestimmen und die vertikale Projektion eines Punktes seiner Oberfläche anzugeben, dessen horizontale Projektion bekannt ist. Beispiel, §. 243.	114
Sätze über die Entwicklung eines Cylinders, §. 244.	115
Entstehung der Schraubenlinie, Schraubengang, Höhe desselben, Konstruktion der Schraubenlinie, Entwicklung derselben, Zusammenstellung der Eigenschaften der Schraubenlinie, Tangente derselben, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, §. 245 — 250.	115
Entstehung der Schraubenfläche und ihre Konstruktion, §. 251.	119

Viertes Kapitel.

Tangirung der entwickelbaren Flächen.

Die Tangentialebene einer solchen Fläche hat eine Erzeugende mit derselben gemein, Regeln über die Konstruktion einer Tangentialebene für einen gegebenen Berührungspunkt, die Spuren einer Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche sind Tangenten der Spuren dieser Fläche, §. 252. — §. 254.	120
Zwei Tangentialebenen eines Cylinders schneiden sich nach einer Geraden, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, §. 255.	121
Die Projektion der Tangente einer Curve ist Tangente der Projektion der Curve für die entsprechende Projektion des Berührungspunktes, §. 256.	121
Zwei Tangentialebenen eines Conus schneiden sich nach einer durch sein Centrum gehenden Geraden, §. 257.	122
Für einen auf einem Cylinder gegebenen Punkt eine Tangentialebene desselben zu bestimmen, Beispiel, §. 258. — §. 259.	122
Bedingungen, welche die Tangentialebene eines Cylinders erfüllen kann, wenn der Berührungspunkt nicht gegeben ist, §. 260.	123
Durch einen gegebenen Punkt, ferner parallel zu einer gegebenen Geraden eine Tangentialebene an einen Cylinder legen, eine Tangentialebene zu suchen, die parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist, Beispiele, §. 261. — §. 265.	123
Es ist ein Punkt auf einer konischen Fläche gegeben, an diese für jenen Punkt eine Tangentialebene zu legen, Beispiel, §. 266. — §. 267.	125
Man kann durch einen Punkt oder durch eine Gerade an einen Conus eine Tangentialebene legen; diese Aufgaben zu lösen, Beispiel, §. 268. — §. 272.	126
Tangentialebenen einer beliebigen abwickelbaren Fläche für den gegebenen Berührungspunkt, für einen ausserhalb der Fläche gegebenen Punkt oder parallel zu einer Geraden, §. 273. — §. 275.	127

Viertes Kapitel.

Durchschnitte der entwickelbaren Flächen durch Ebenen.

Durchschnitte überhaupt, Durchschnitt eines Cylinders oder eines Conus durch eine zu ihrer Direktrix parallele Ebene, §. 276. — §. 277.	129
Ein senkrechter Cylinder ist von einer Ebene geschnitten, man soll 1. die Projektionen der Durchschnittslinie, 2. ihre wahre Grösse, 3. Tangenten derselben, 4. die Entwicklung des Cylinders und jener Linie angeben, Beispiel, §. 278. — 279.	129
Ein schiefer Cylinder ist durch eine Ebene geschnitten, man soll dieselben Aufgaben lösen, §. 280.	132
Den Durchschnitt einer beliebigen Curve mit einer Ebene anzugeben §. 281.	133
Entwicklung des Kegels §. 282.	133
Ein senkrechter Conus wird von einer Ebene geschnitten, die Durchschnittslinie und eine Tangente derselben anzugeben, und den Kegel zu entwickeln, Beispiel, §. 283. — §. 284.	134
Die Durchschnittslinie eines schiefen Kegels zu finden und den letzteren zu entwickeln, §. 285.	136

Dritte Abtheilung.

Von den krummlinig-erzeugten Flächen überhaupt.

Fünftes Kapitel.

Rotationsflächen, Flächen vom zweiten Grade überhaupt und Umhüllungsflächen.

Entstehung einer Rotationsfläche, Axe, Meridian, Parallelkreis, Aequator, zweifache Erzeugung einer Rotationsfläche, verschiedene Arten der Rotationsflächen; Flächen vom zweiten Grade überhaupt, §. 286. — §. 290.	138
Umhüllungsflächen, Umhülle und Charakteristiken, Lehrsatz hierüber, §. 291. — §. 292.	140

Sechstes Kapitel.

Tangirung der Rotationsflächen und krummlinig erzeugter Flächen überhaupt.

Tangentialebenen überhaupt und Bedingungen, Lehrsätze hiefür; Konstruktion eines Meridians, §. 293. — §. 296.	141
Eine Tangentialebene für den gegebenen Berührungspunkt an einer Rotationsfläche, Beispiel, §. 297. — §. 298.	142
Rotationshyperboloid und Tangentialebene desselben, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, §. 299.	144
Parallel mit einer gegebenen Ebene an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, Beispiel, §. 300.	146
Durch einen gegebenen Punkt an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn sich der Berührungspunkt entweder auf einem gegebenen Meridian oder auf einem Parallelkreise befindet, Beispiele, §. 301. — §. 303.	147
Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Rotationsfläche eine Tangentialebene zu legen, wenn der Parallelkreis oder der Meridian gegeben ist, auf dem sich der Berührungspunkt befinden soll, §. 304. — §. 305.	148

Siebentes Kapitel.

Tangirende Flächen.

Durch einen gegebenen Punkt an eine Rotationsfläche einen tangirenden Conus zu legen und die Berührungcurve zu suchen, §. 306.	148
Parallel mit einer gegebenen Geraden an eine Rotationsfläche einen tangirenden Cylinder zu legen §. 307.	149
Durch eine Gerade eine Tangentialebene an eine Rotationsfläche zu legen, §. 308.	149
Tangentialebenen für mehrere Flächen zugleich, §. 309. — §. 313.	150

Vierte Abtheilung.

Von den windschiefen Flächen.

Achtes Kapitel.

Erzeugung und Tangirung derselben.

Erzeugung derselben, §. 314. — §. 316.	151
Das Hyperboloid mit einem Mantel, doppelte Erzeugungsart derselben, Tangentialebene desselben für einen gegebenen Berührungspunkt §. 317. — §. 318.	152
Das hyperbolische Paraboloid, doppelte Erzeugungsart desselben, Tangentialebene desselben, §. 319. — §. 320.	152
Verschiedene windschiefe Flächen, §. 321. — §. 321.	153

Fünfte Abtheilung.

Durchdringung der Flächen unter sich.

Neuntes Kapitel.

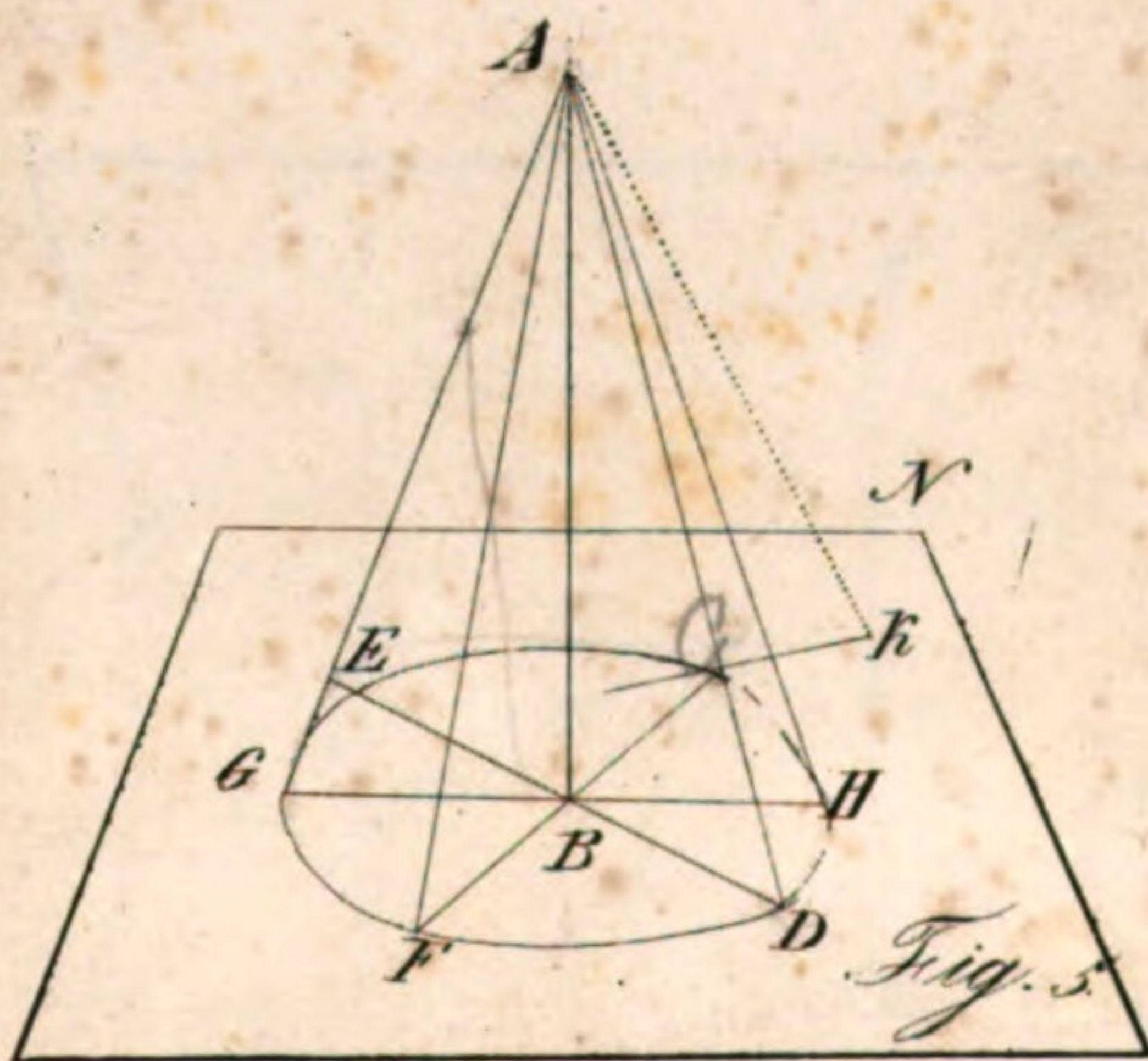
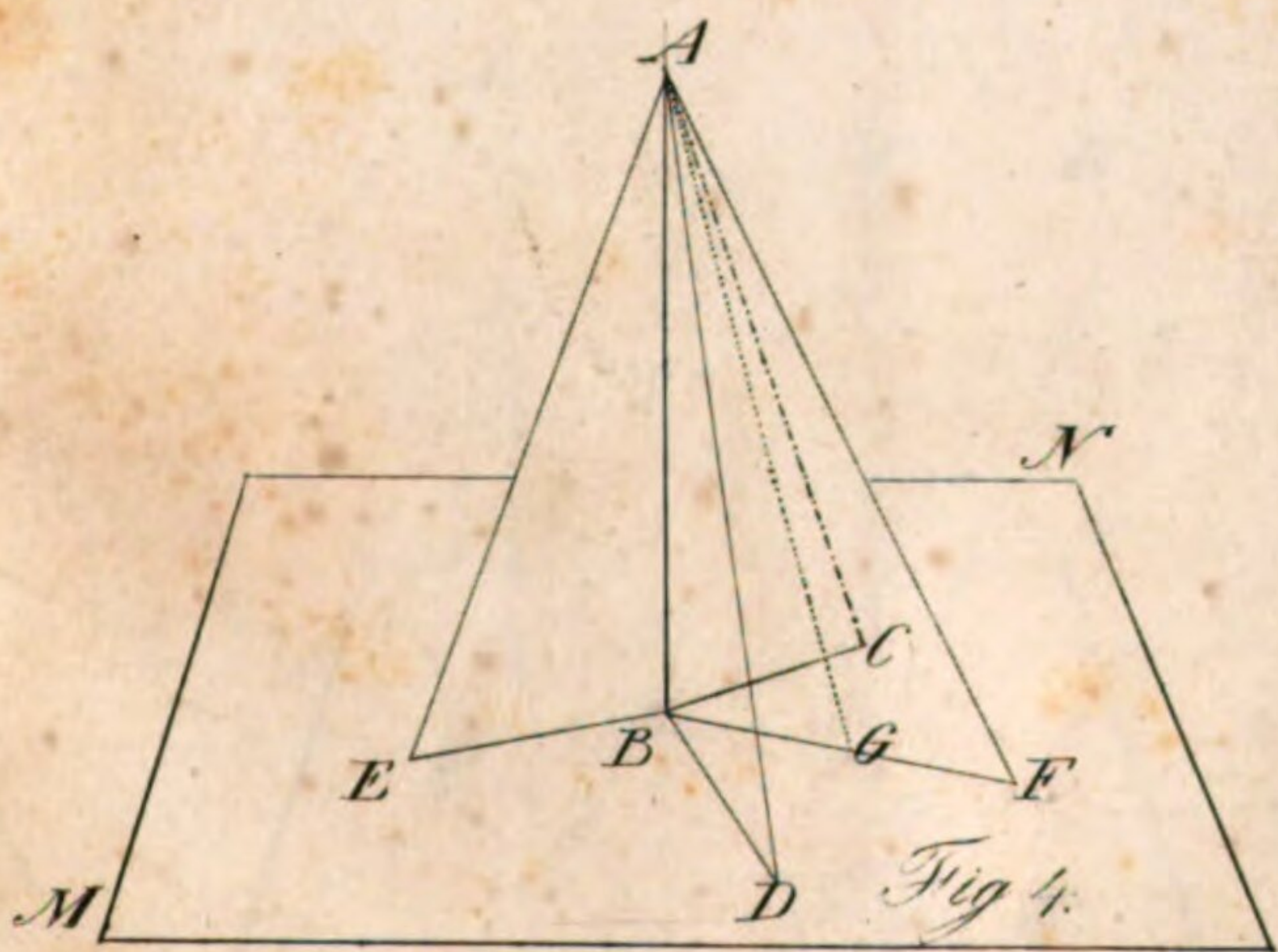
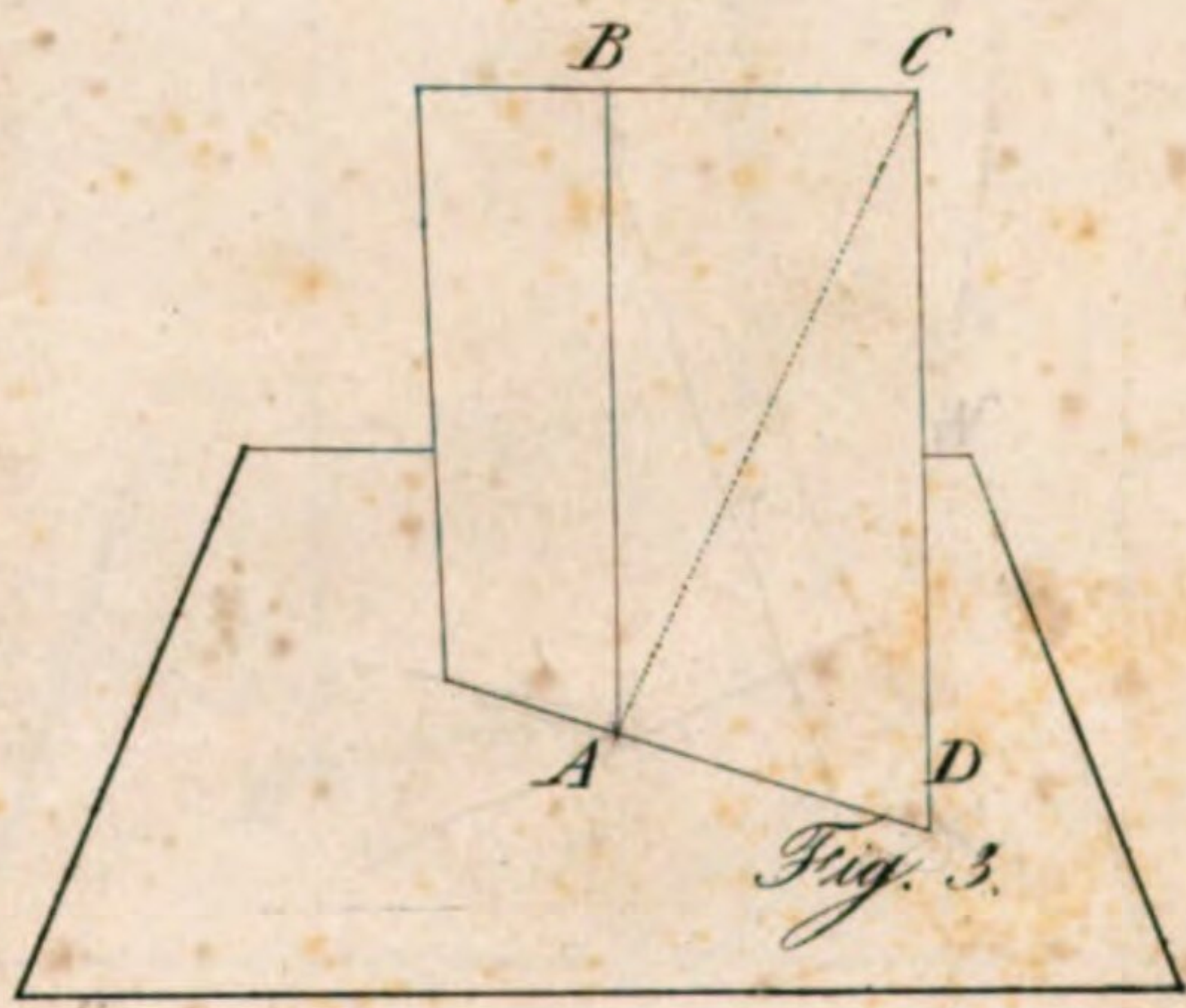
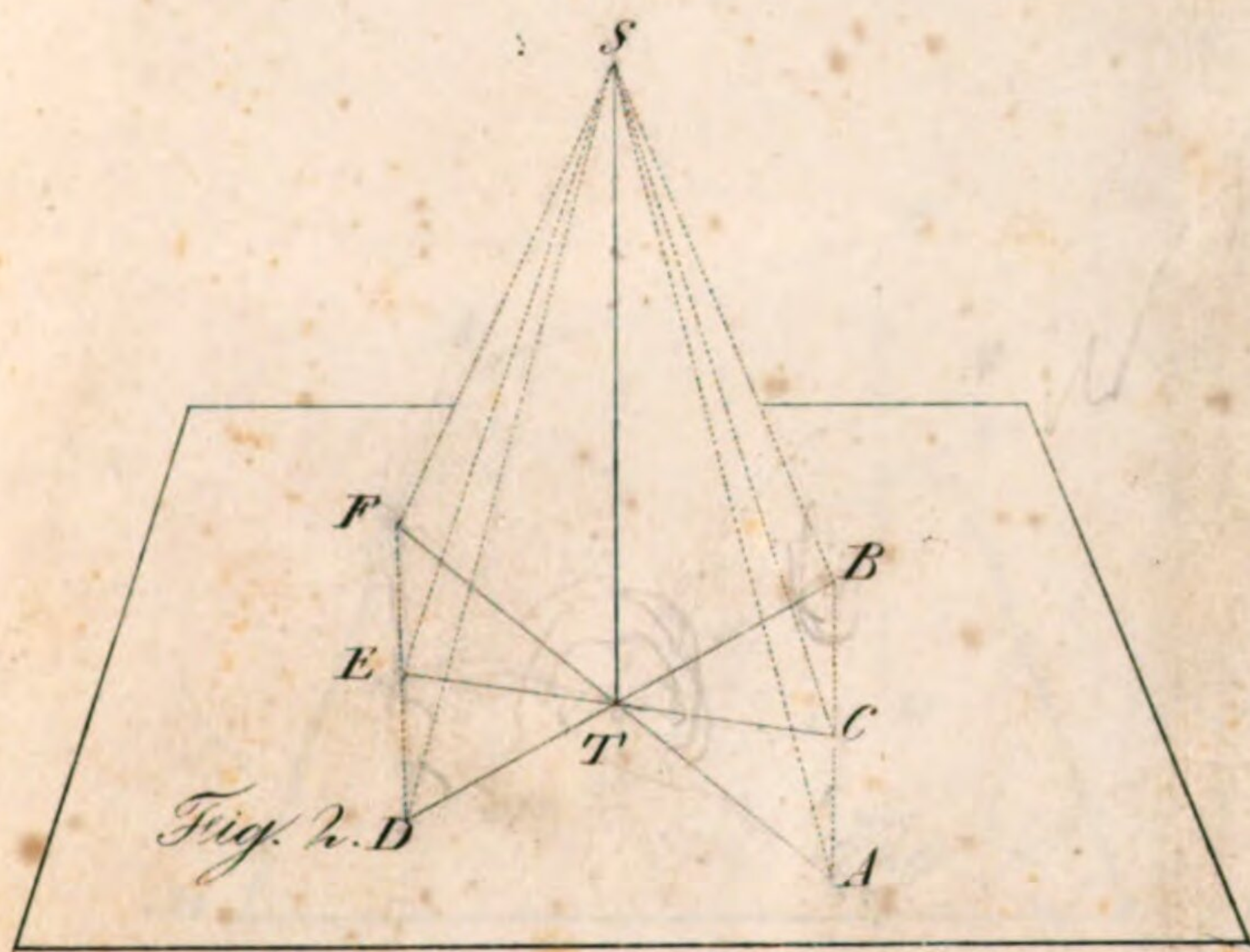
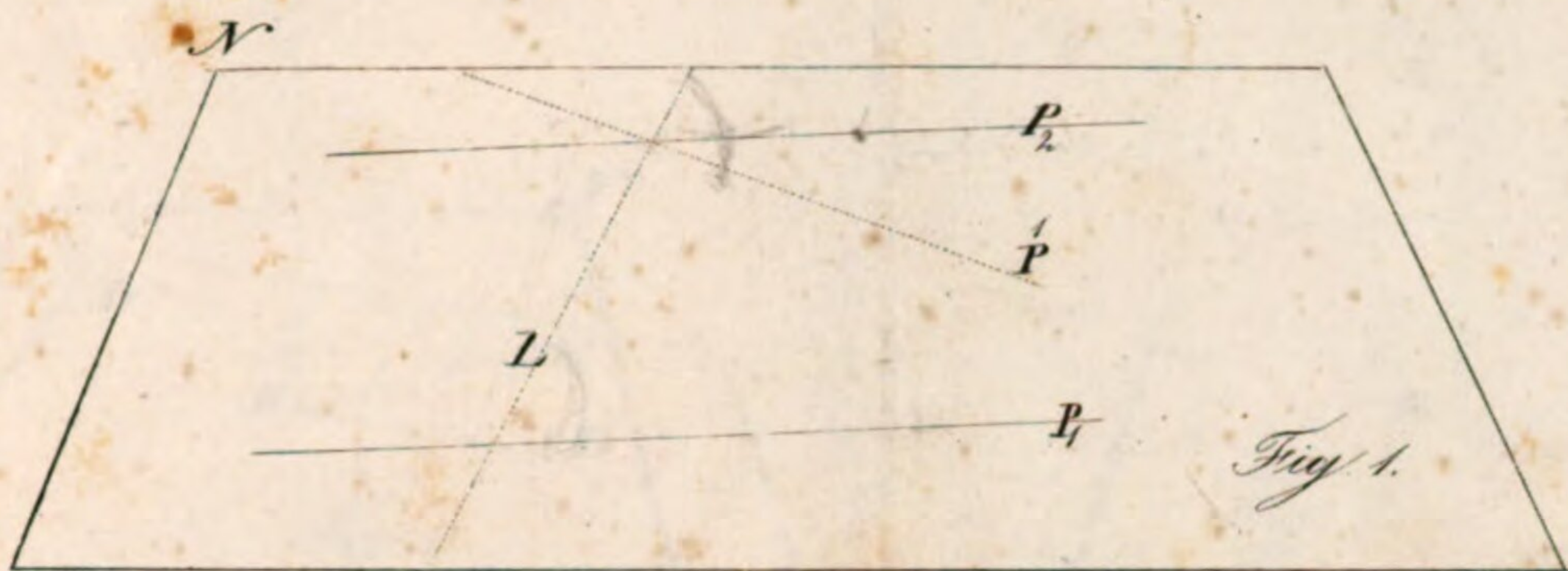
Durchschnitte abwickelbarer Flächen unter sich.

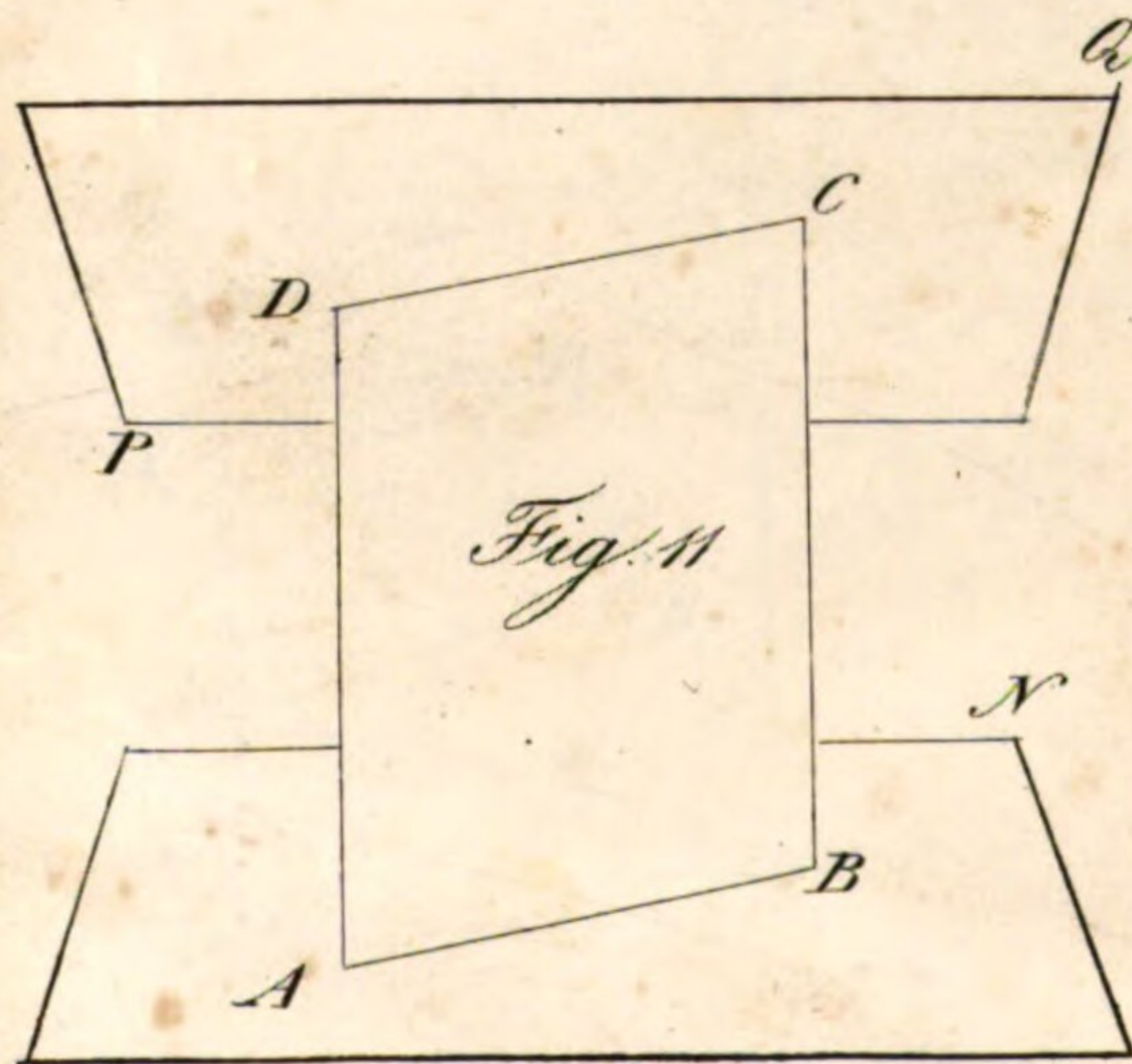
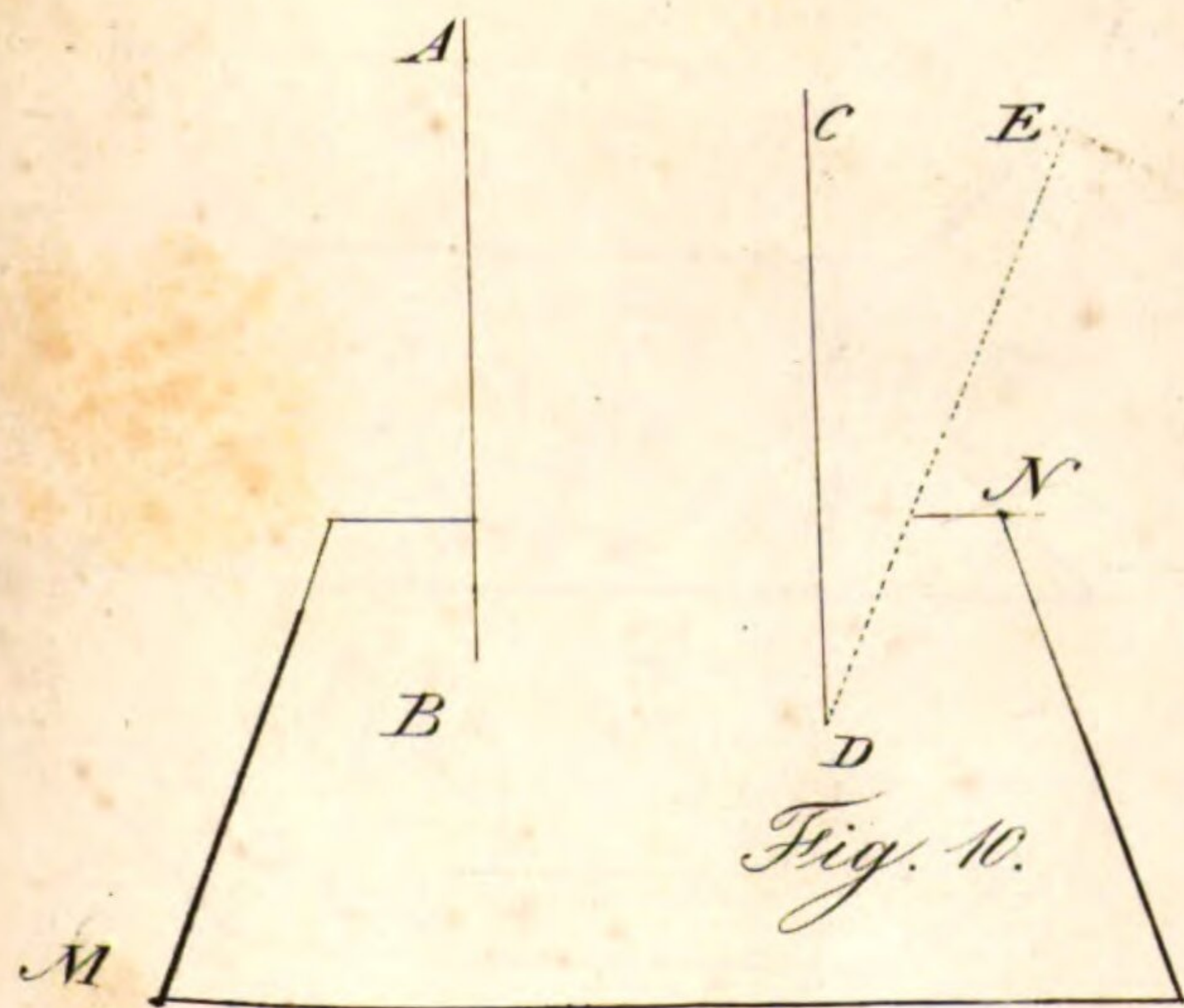
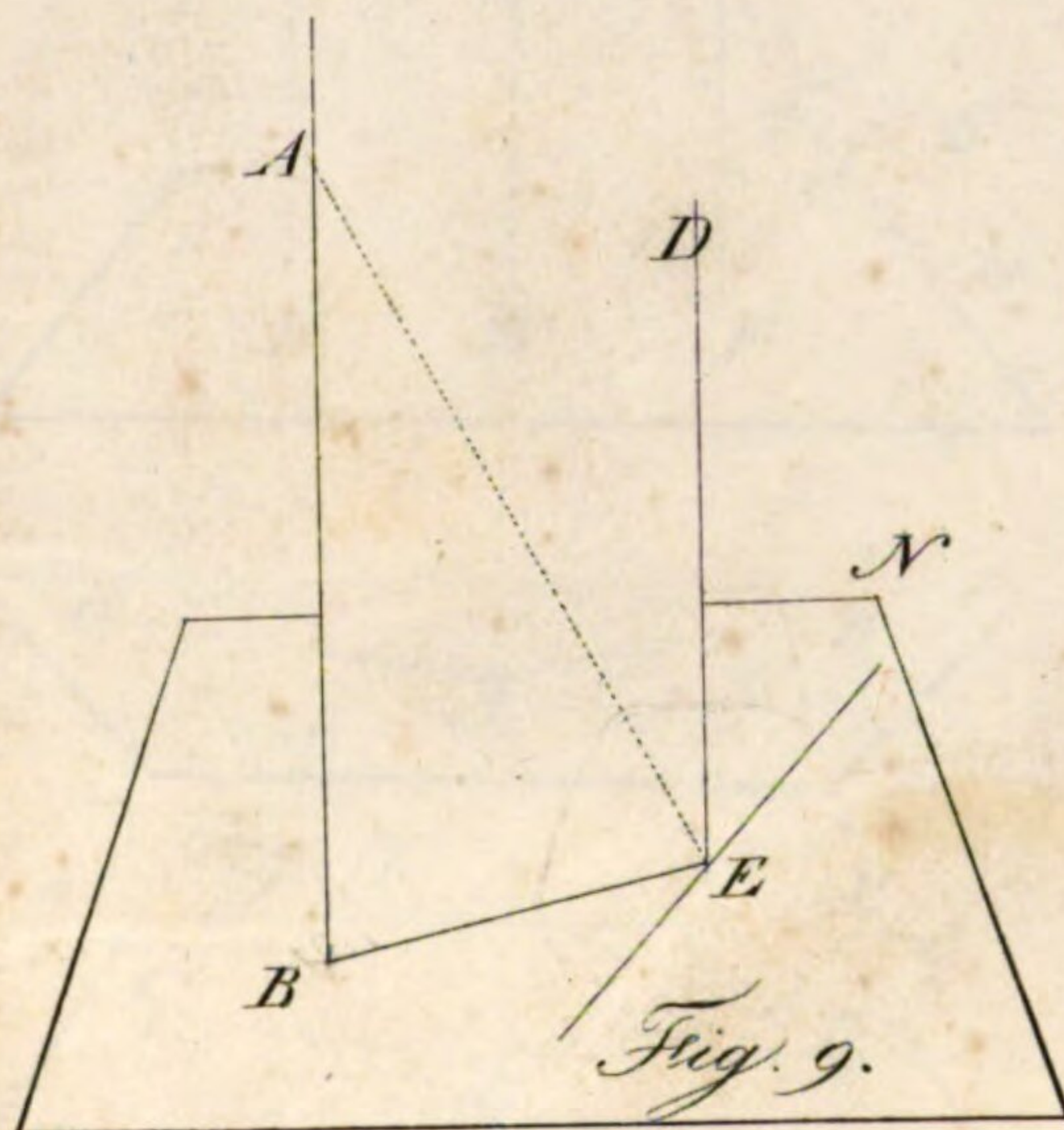
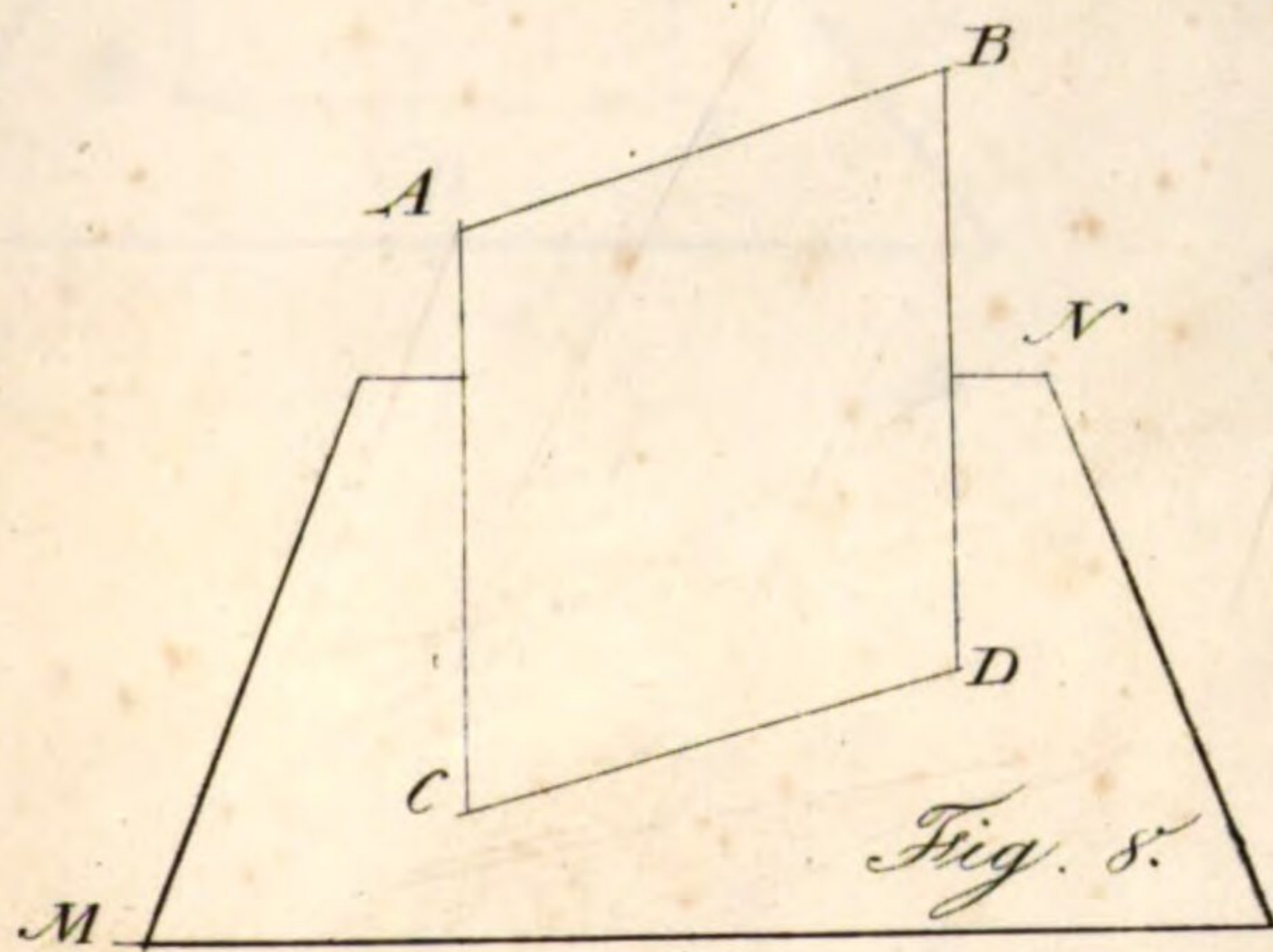
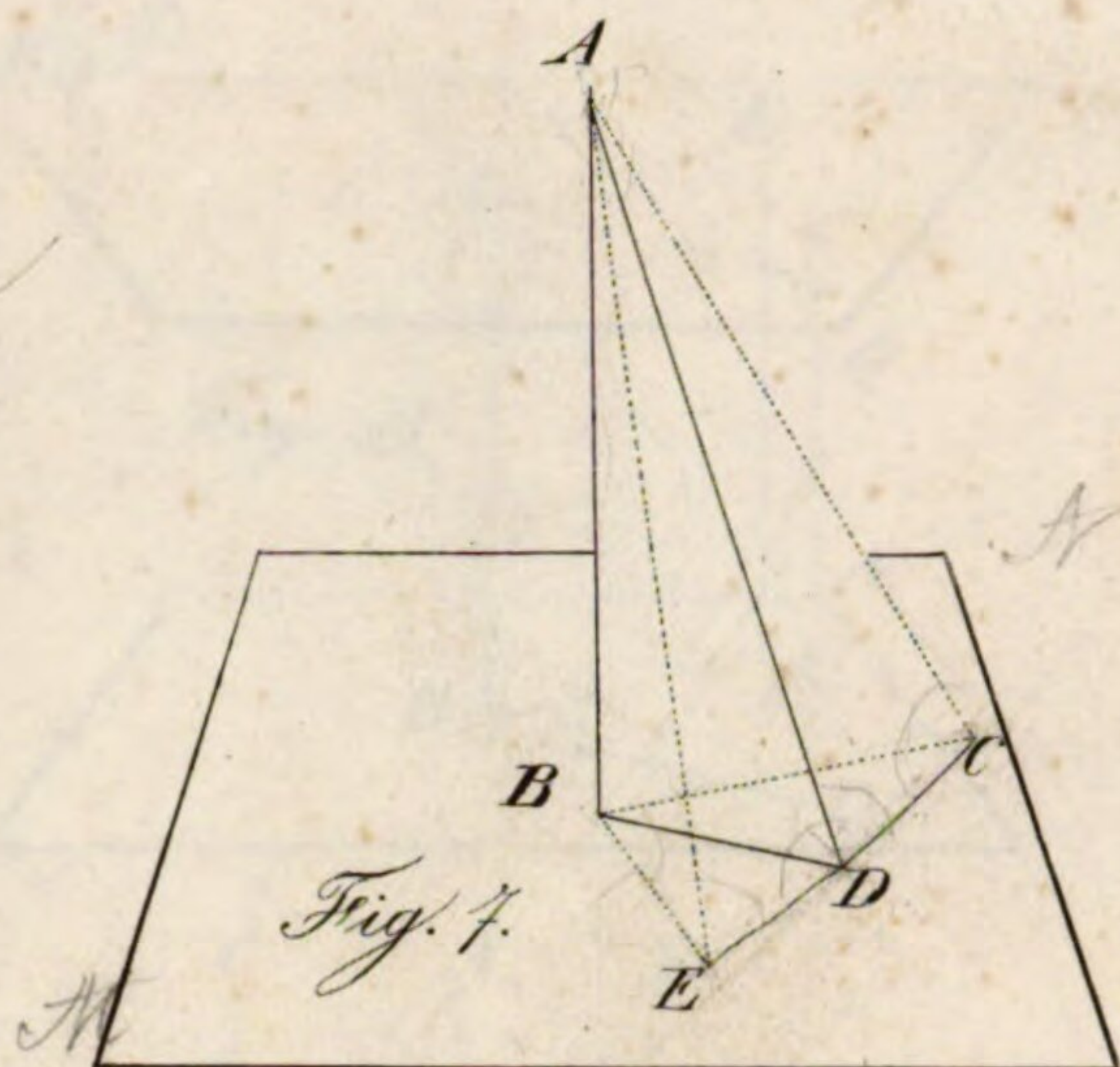
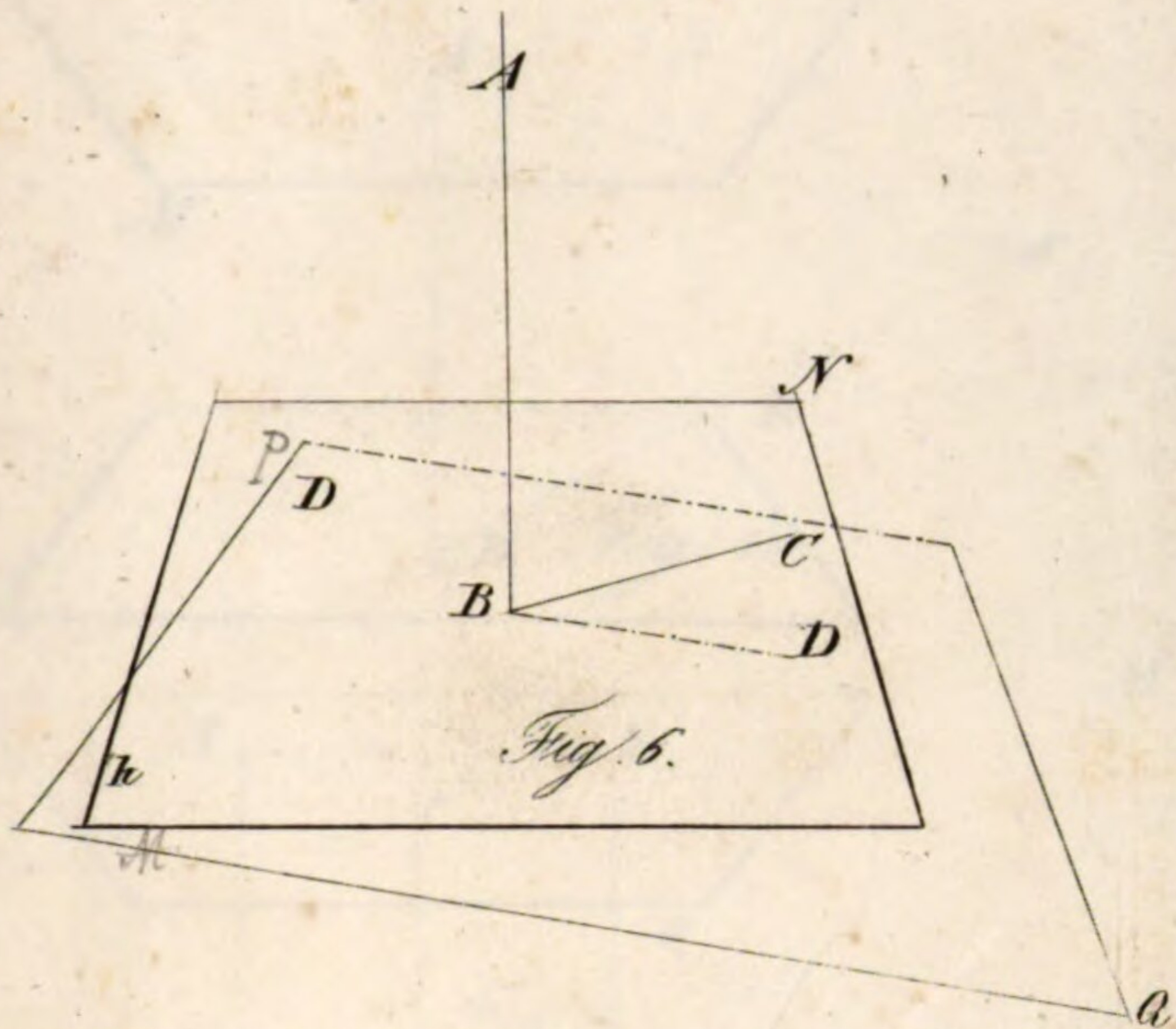
Durchdringungslinie zweier Cylinder, §. 323.	154
Durchdringungslinie eines Cylinders und eines Kegels, Durchdringung zweier Kegel, §. 324.	154

Zehntes Kapitel.

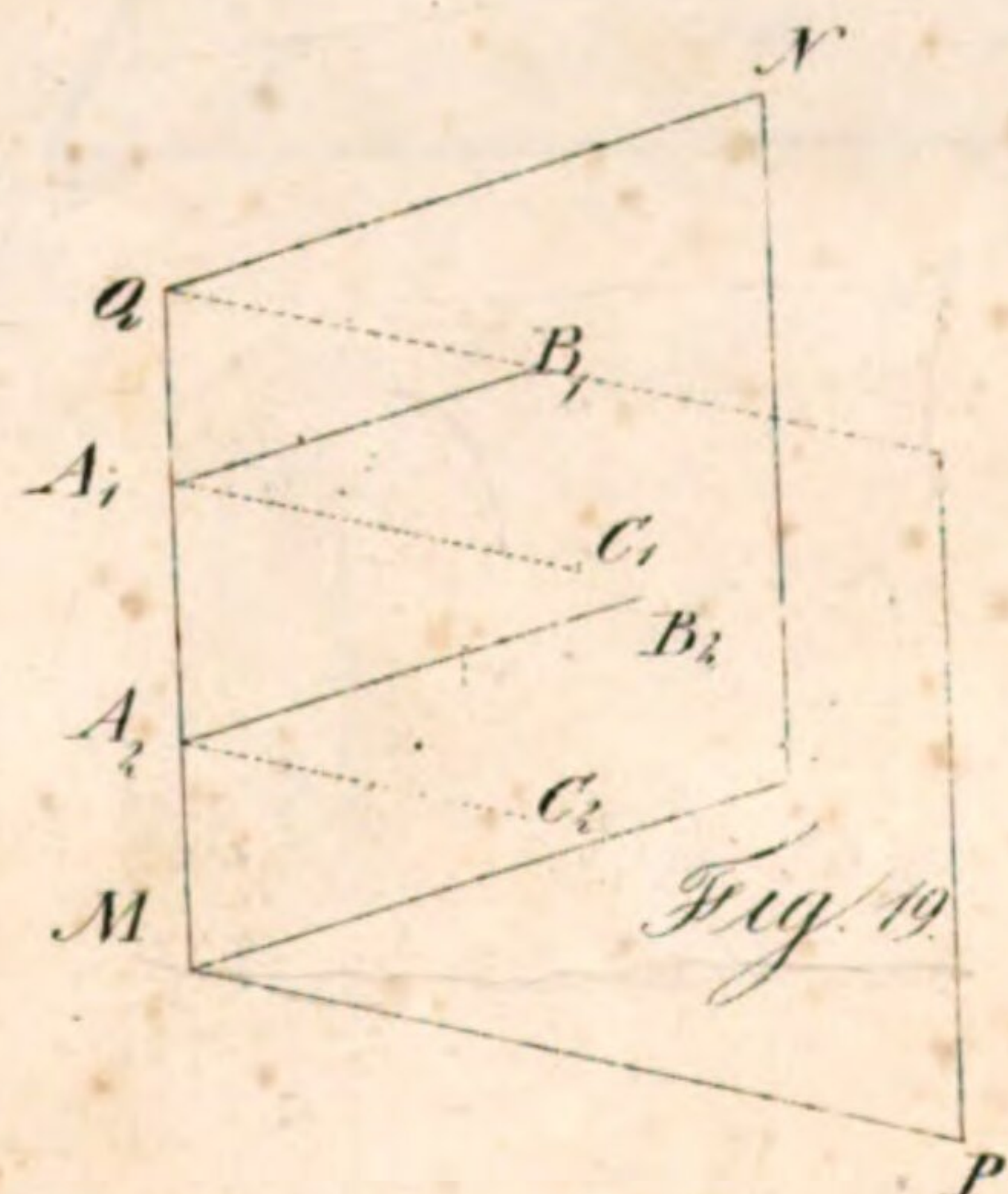
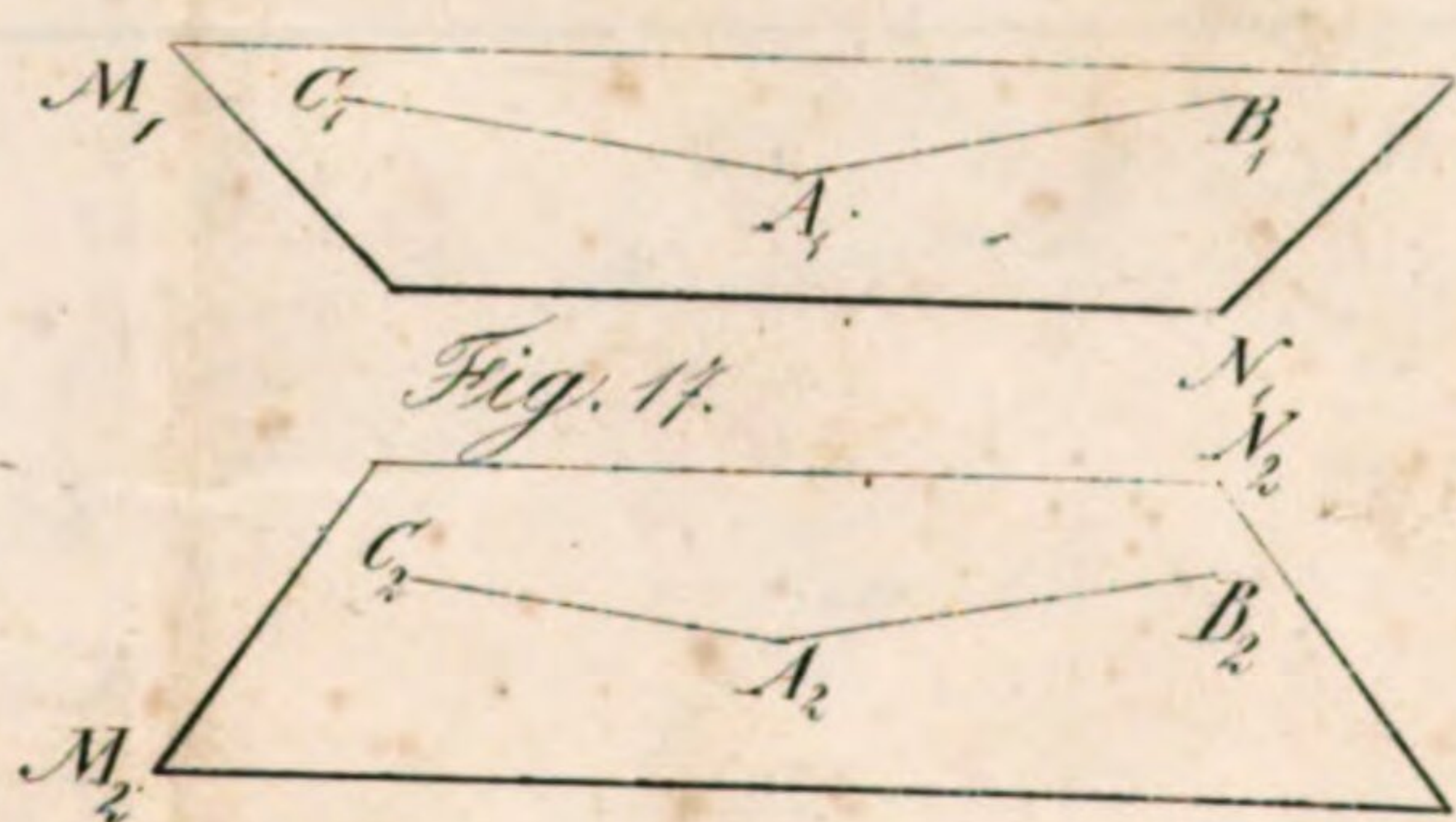
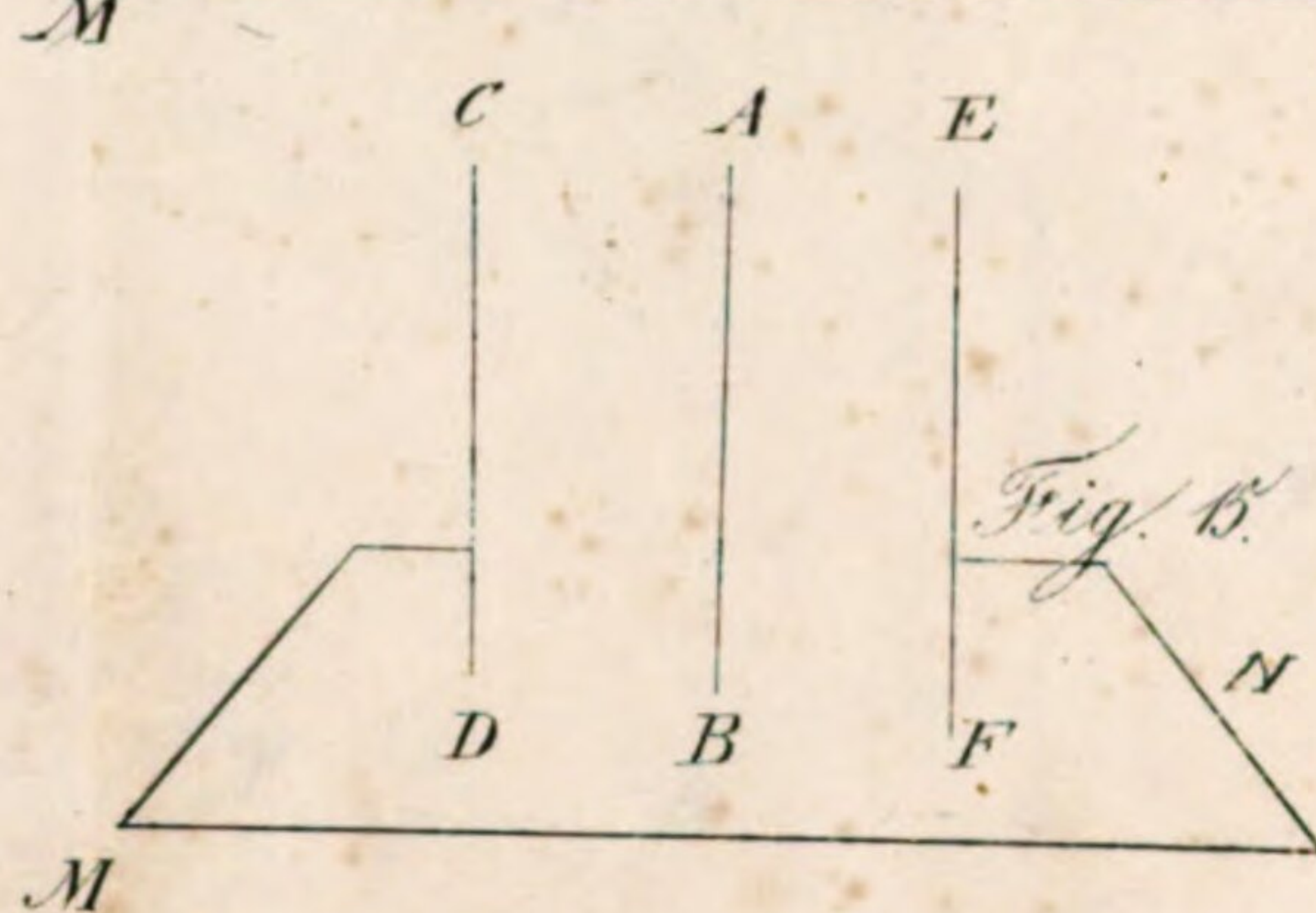
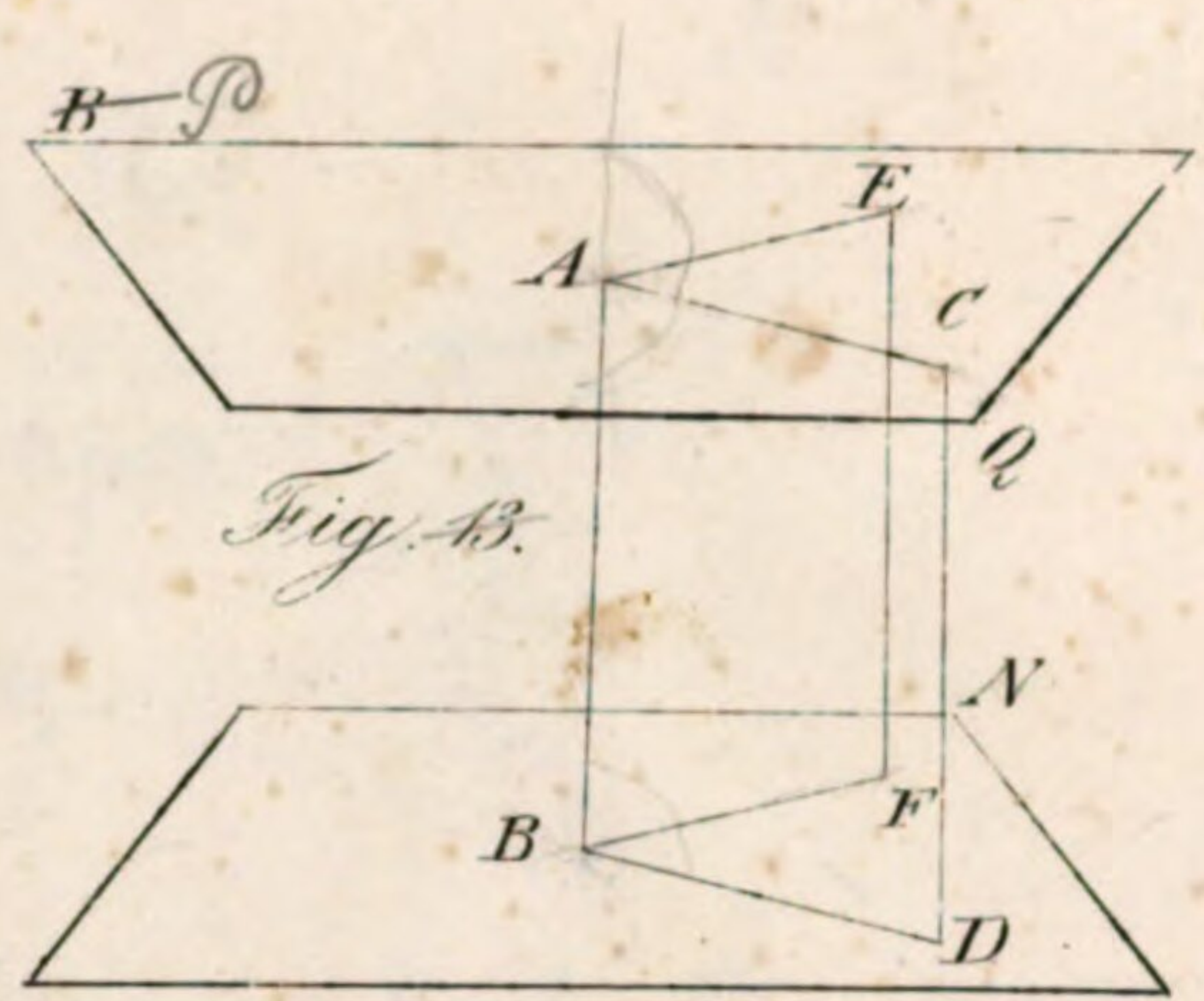
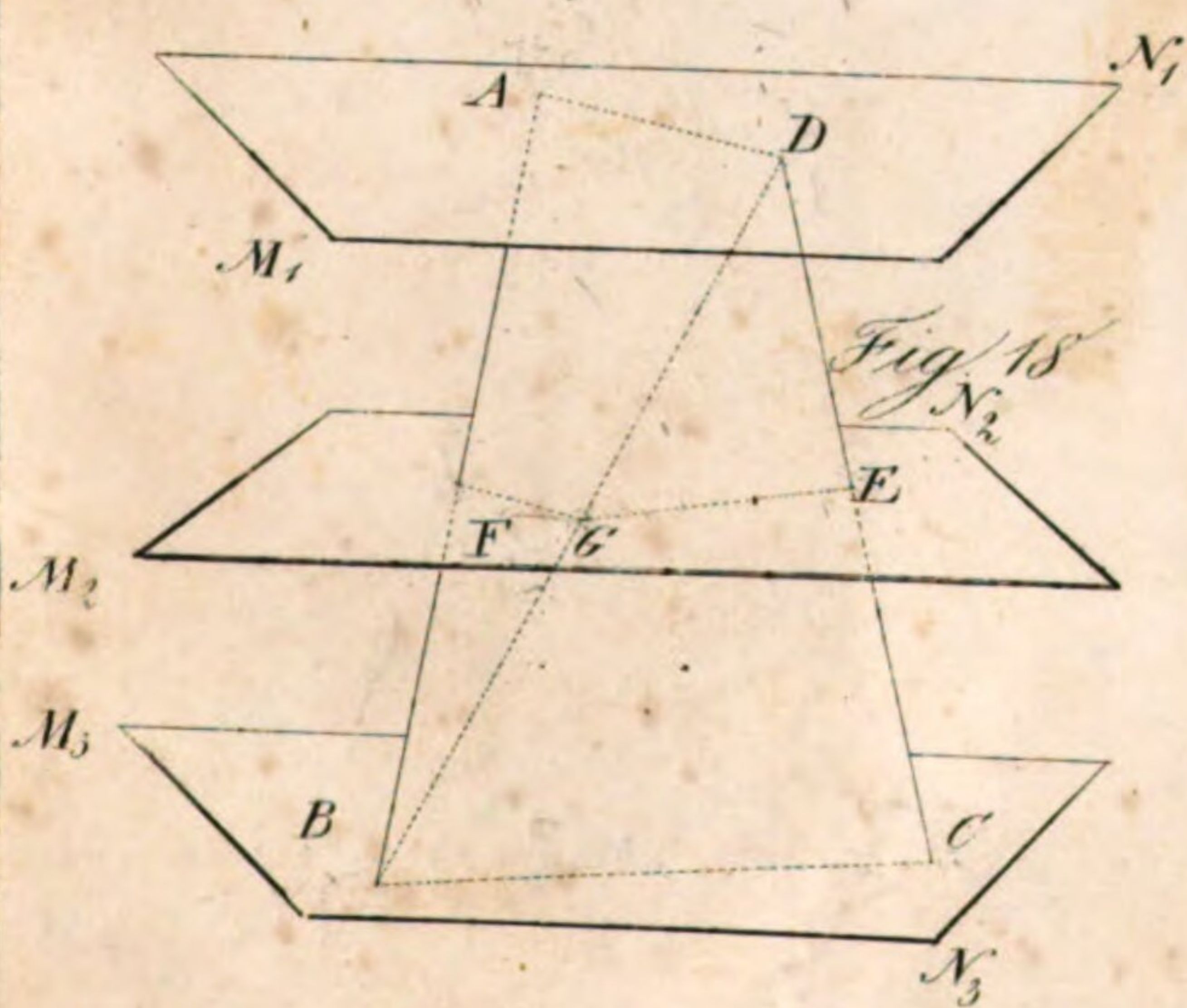
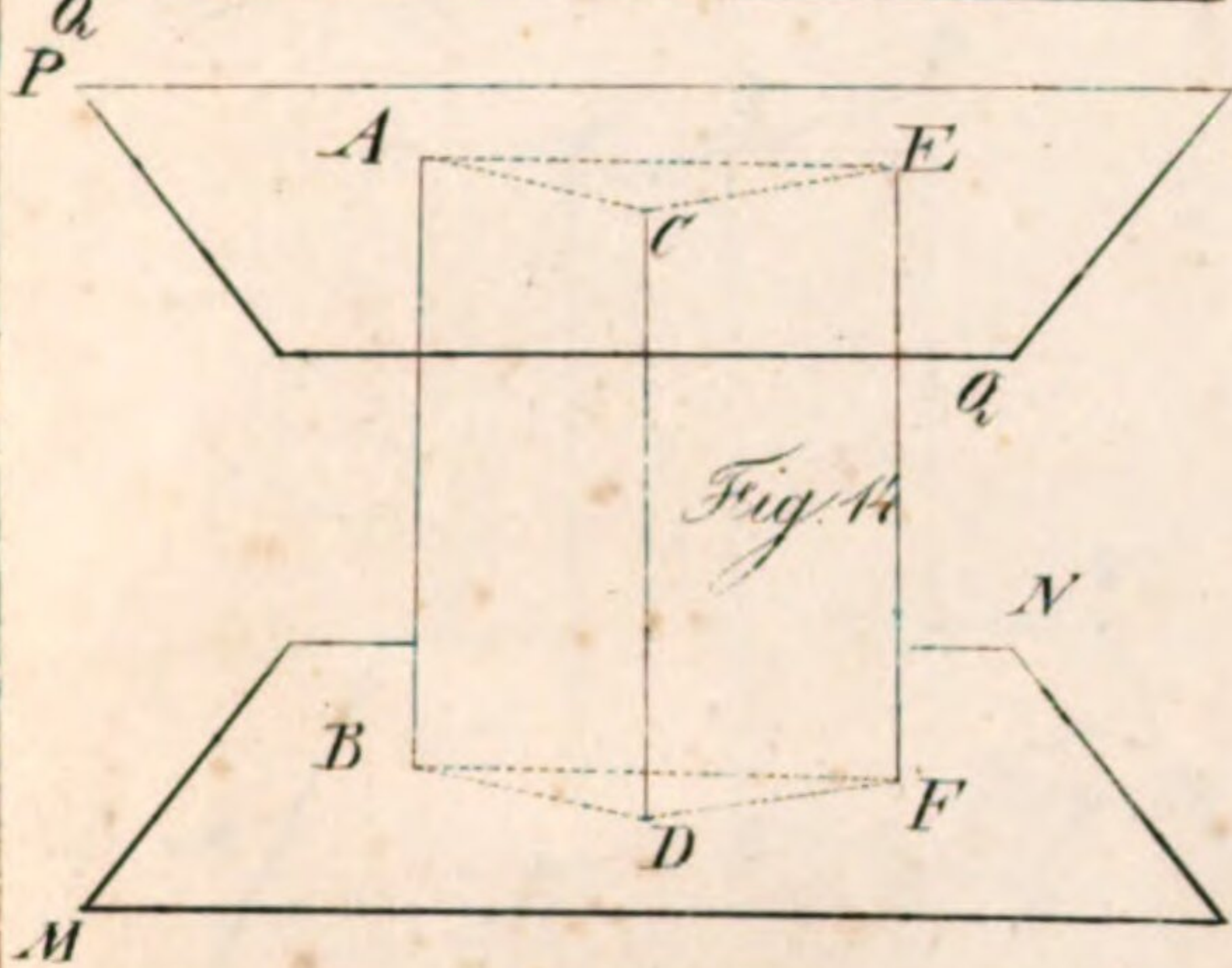
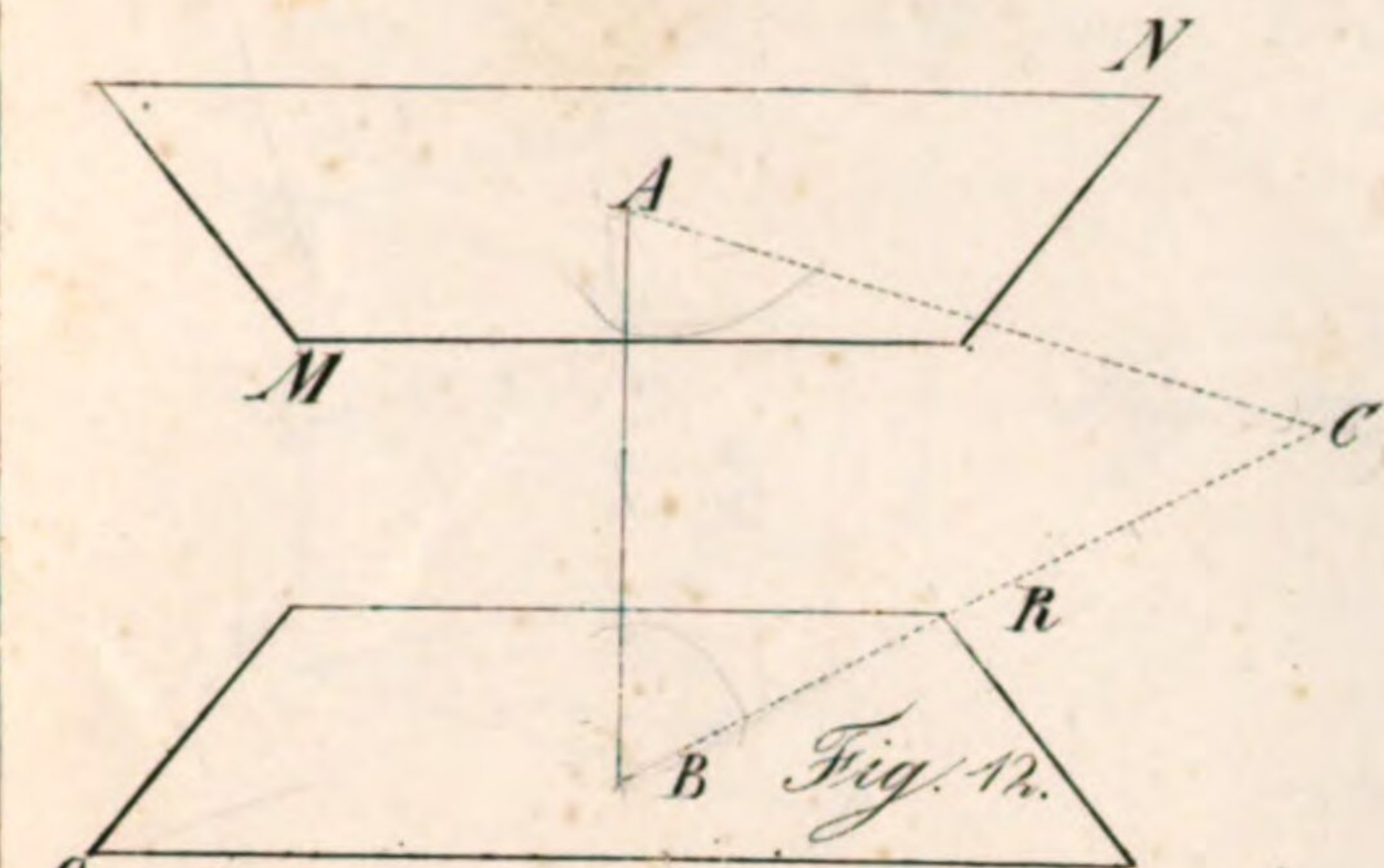
Durchdringung verschiedener Flächen unter sich.

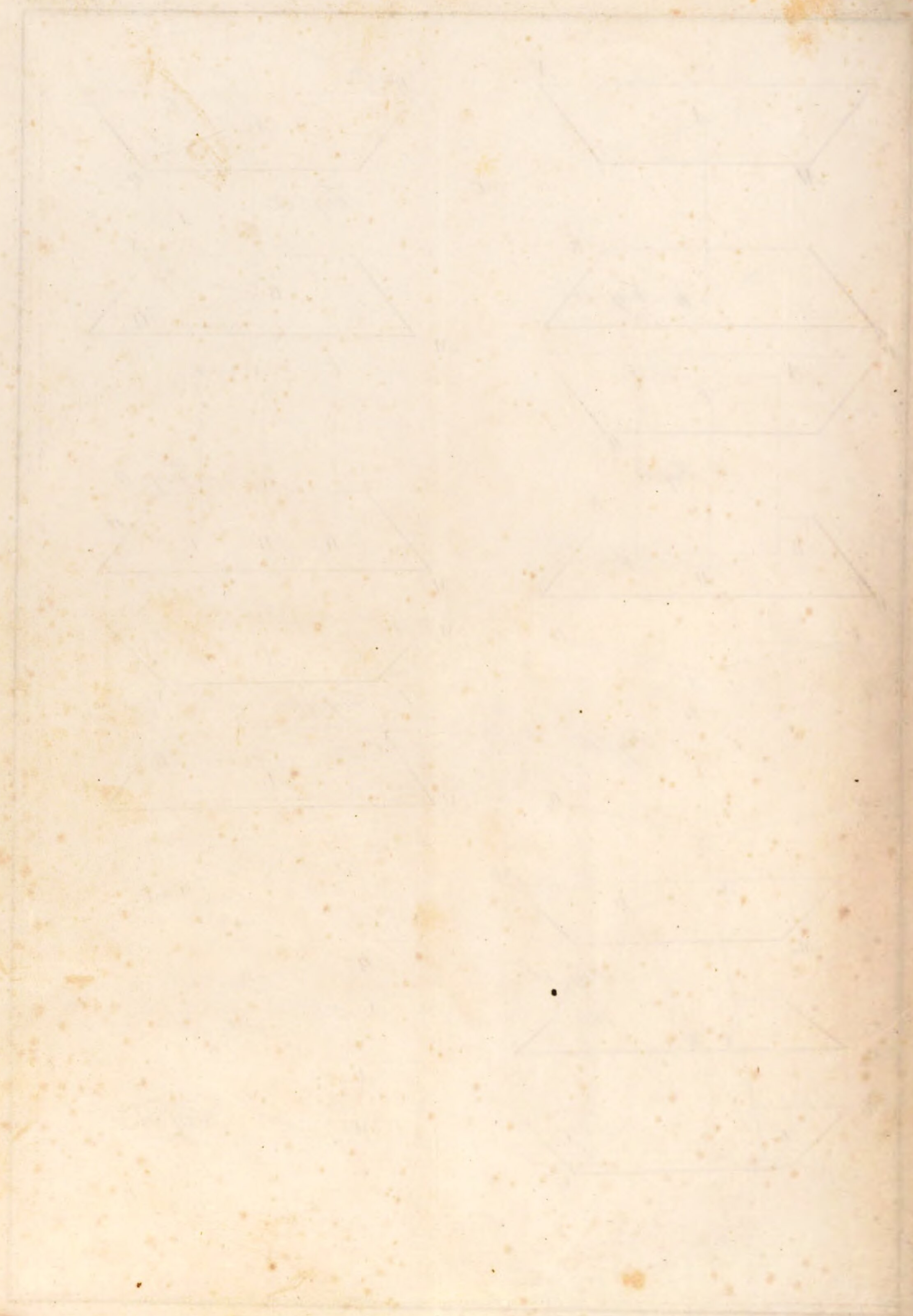
Durchdringungslinie eines Cylinders und einer Kugel, dann eines Kegels und einer Rotationsfläche, §. 325. — §. 327.	154
Die Durchdringungcurve einer windschiefen Fläche und einer Rotationsfläche und die Durchschnittslinie zweier Rotationsflächen zu finden, §. 328. — §. 331.	155
Durchdringung eines Cylinders und einer windschiefen Fläche, §. 332.	156











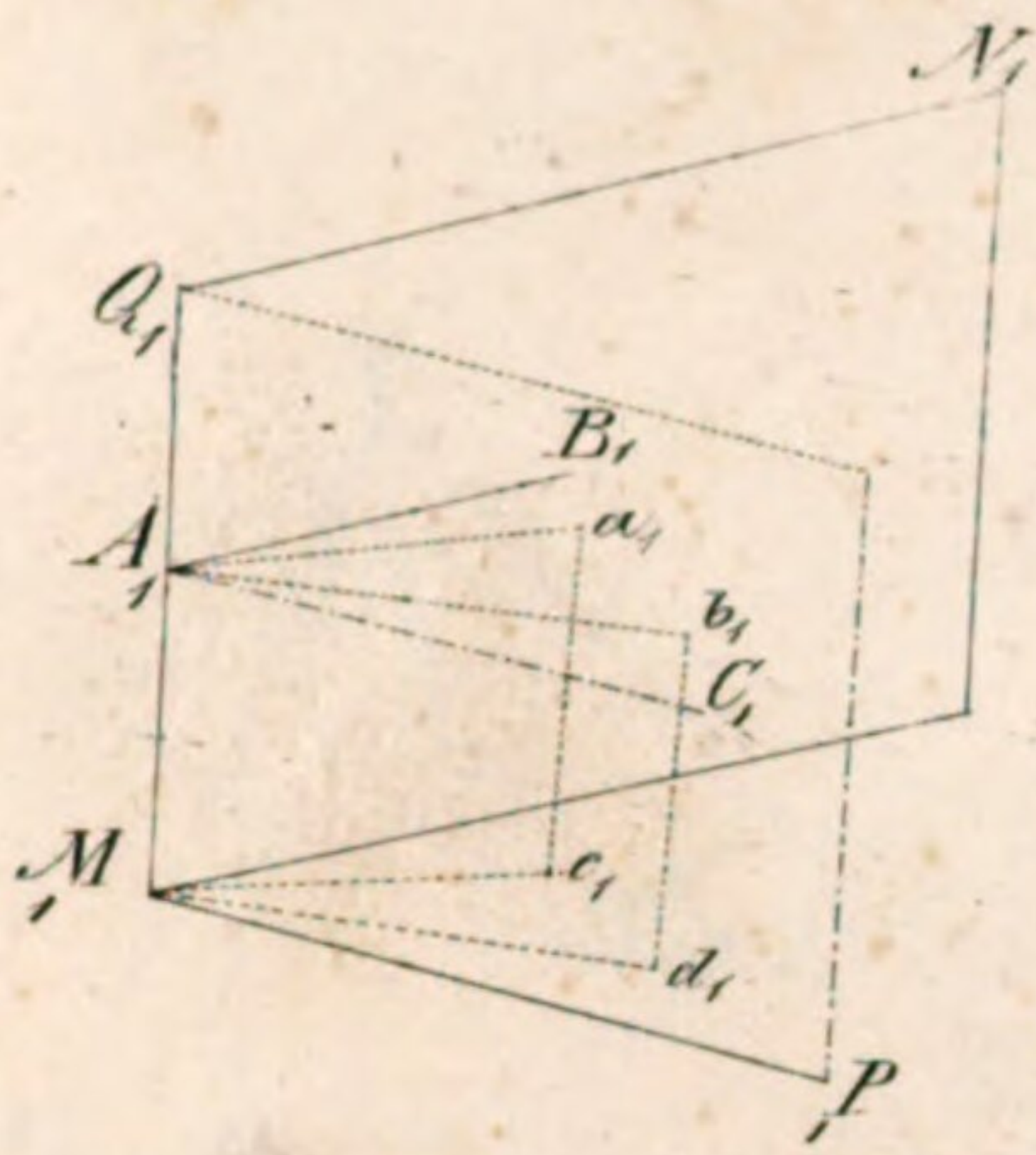
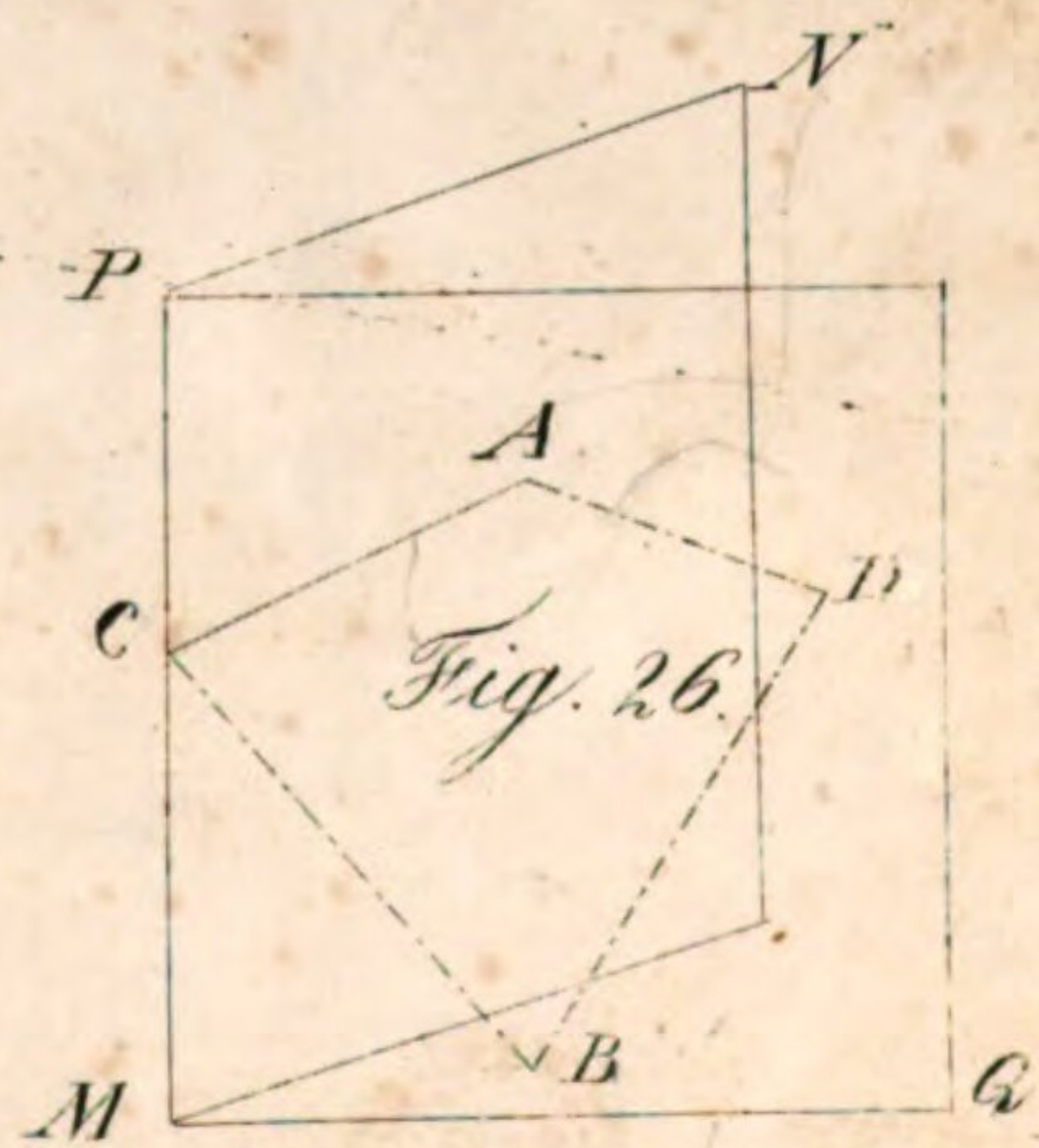
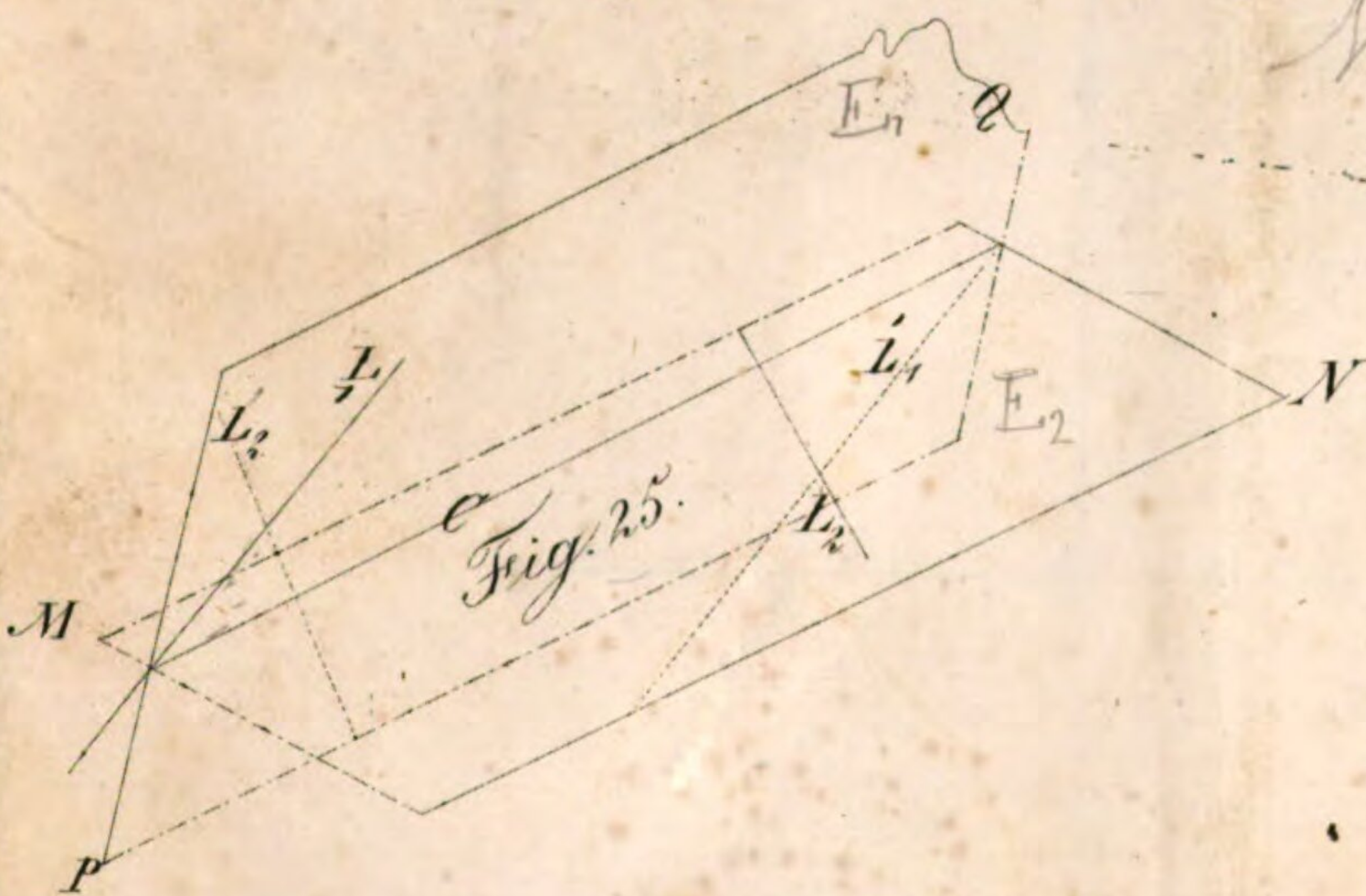
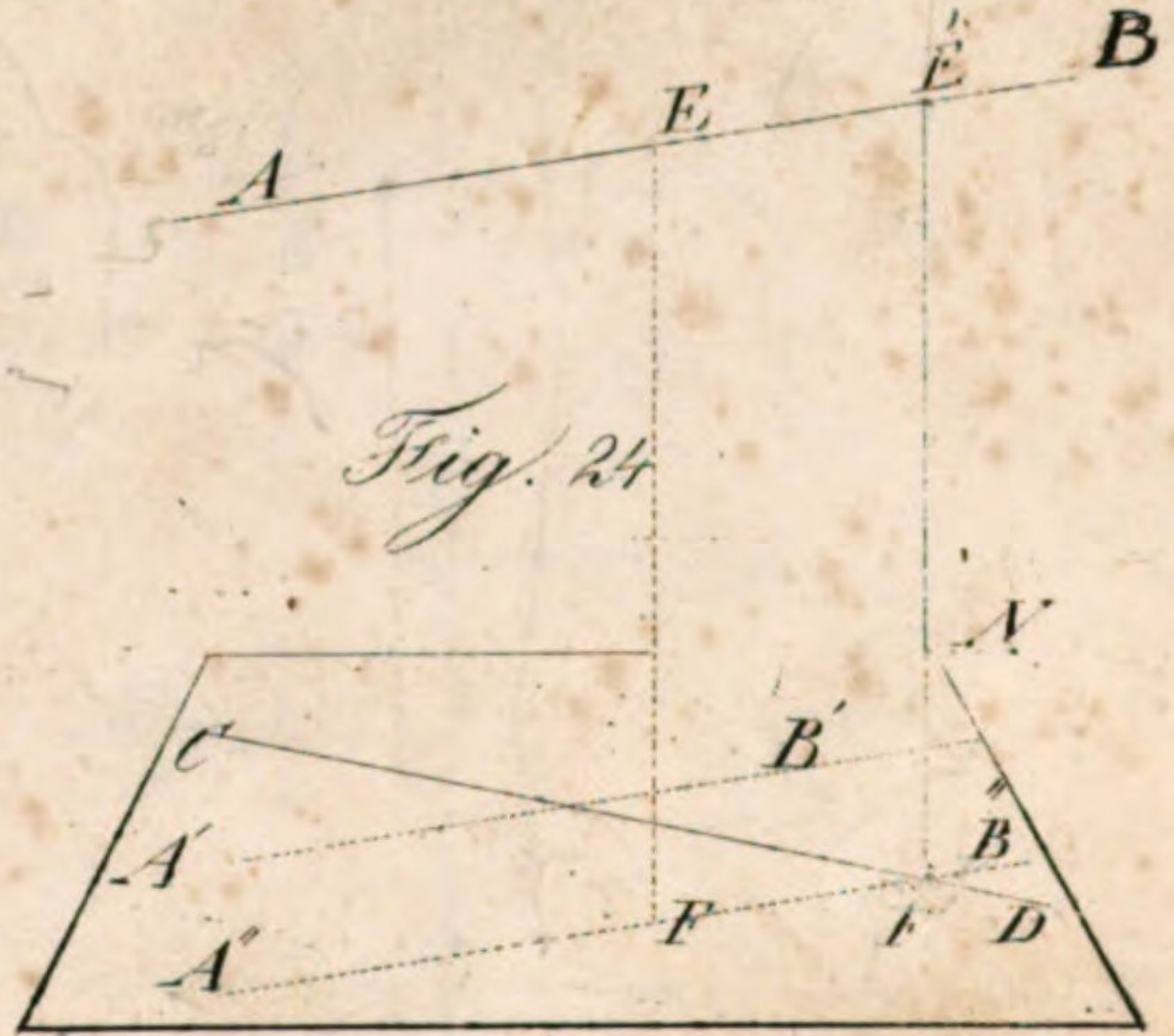
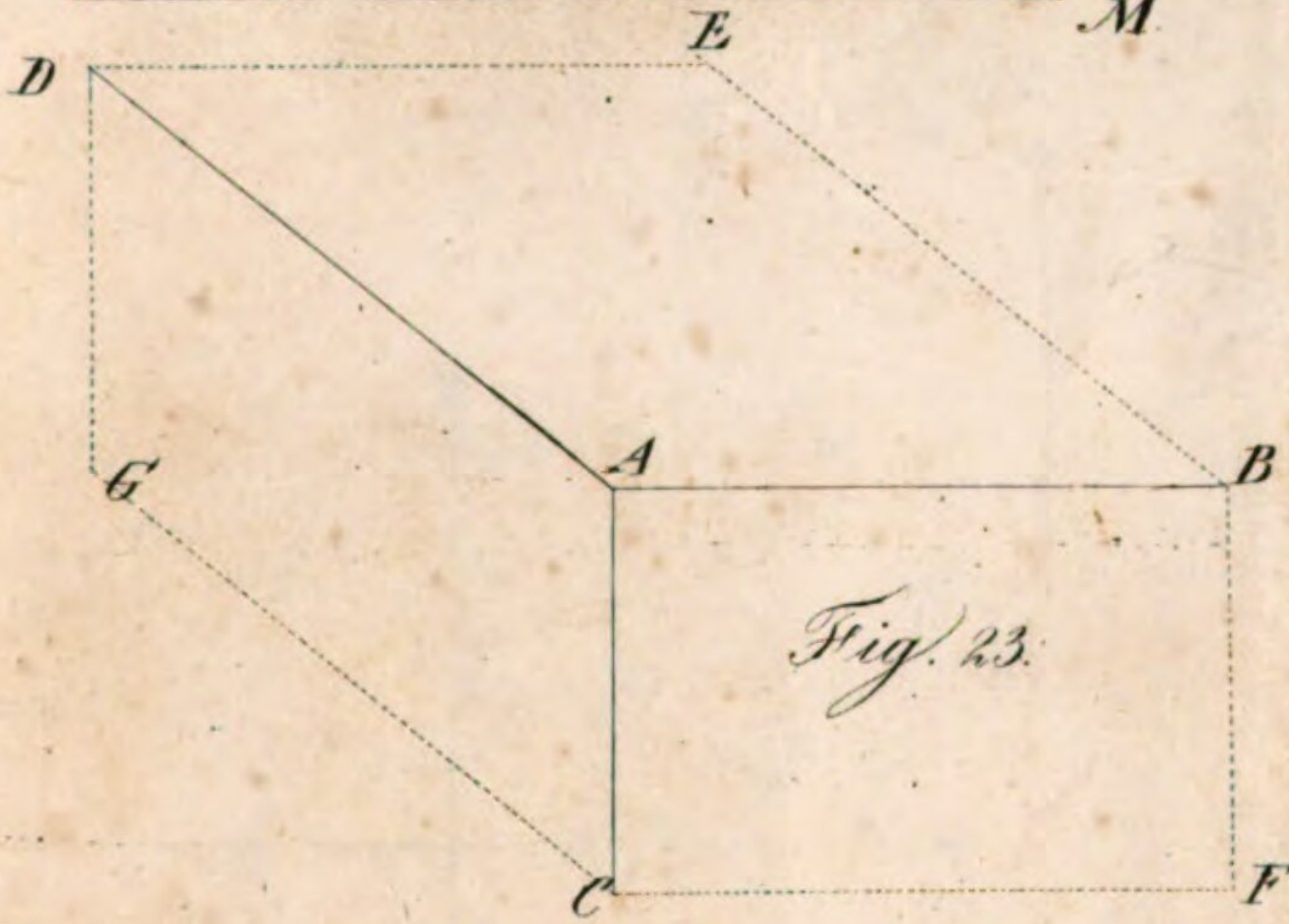
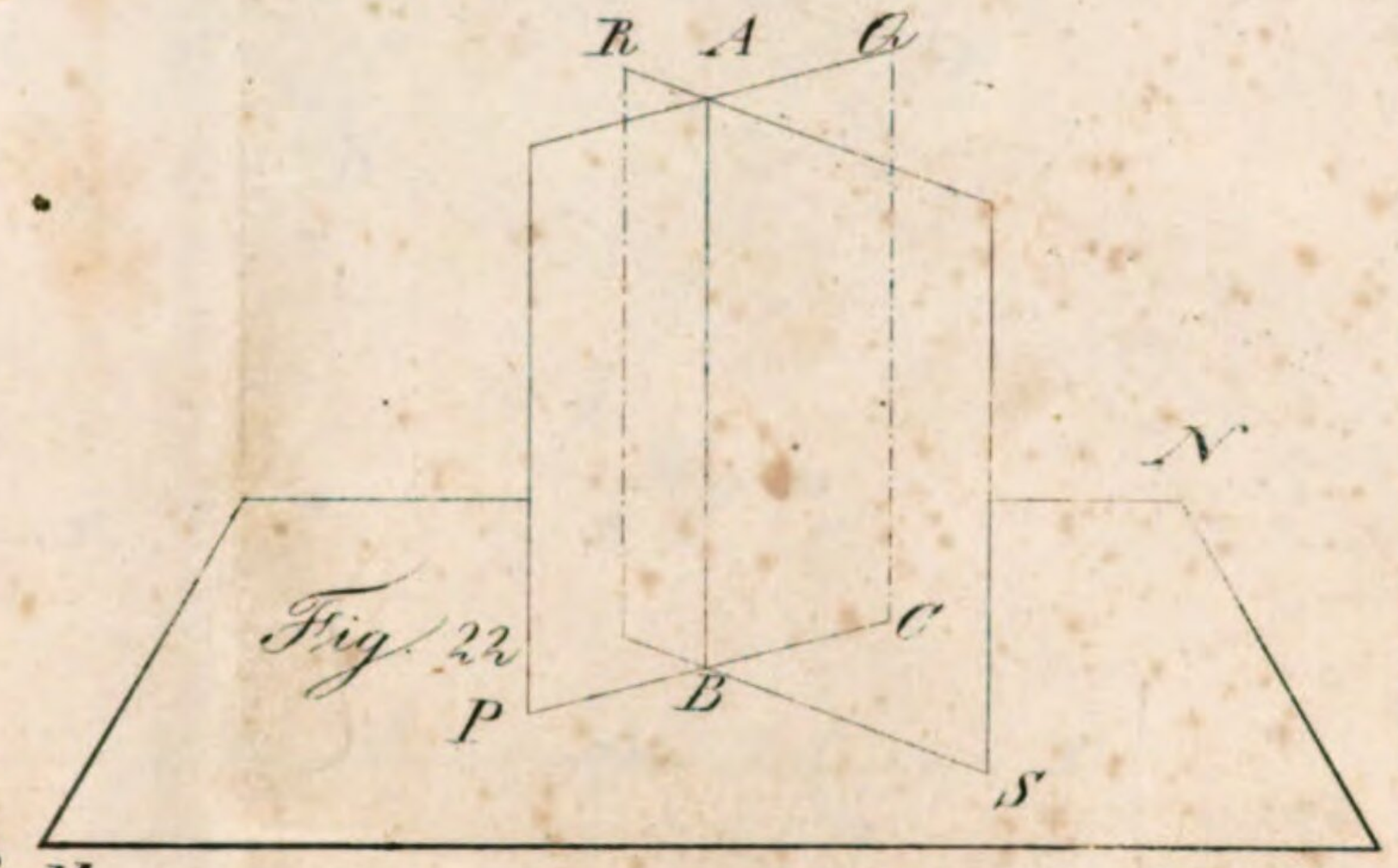
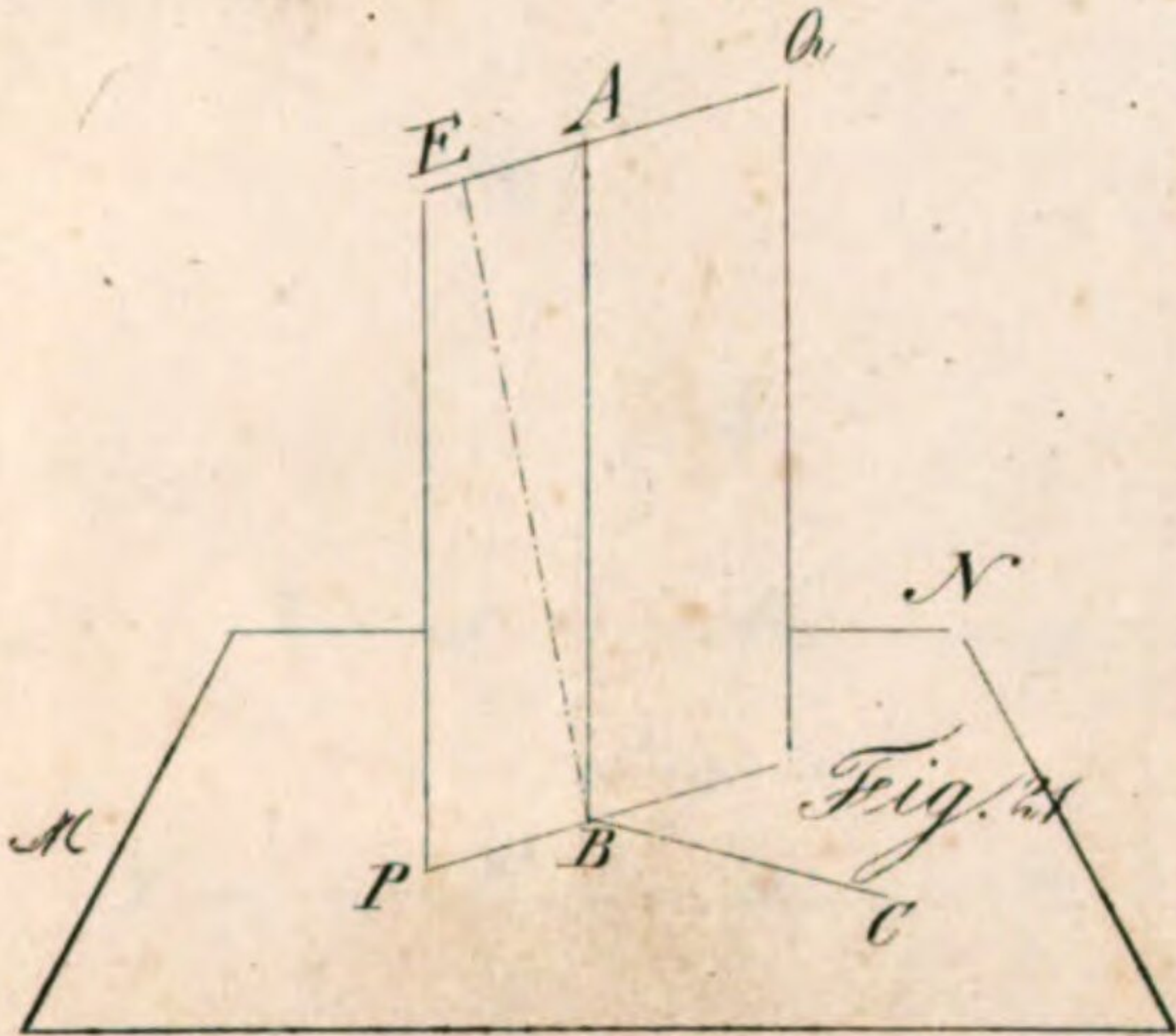
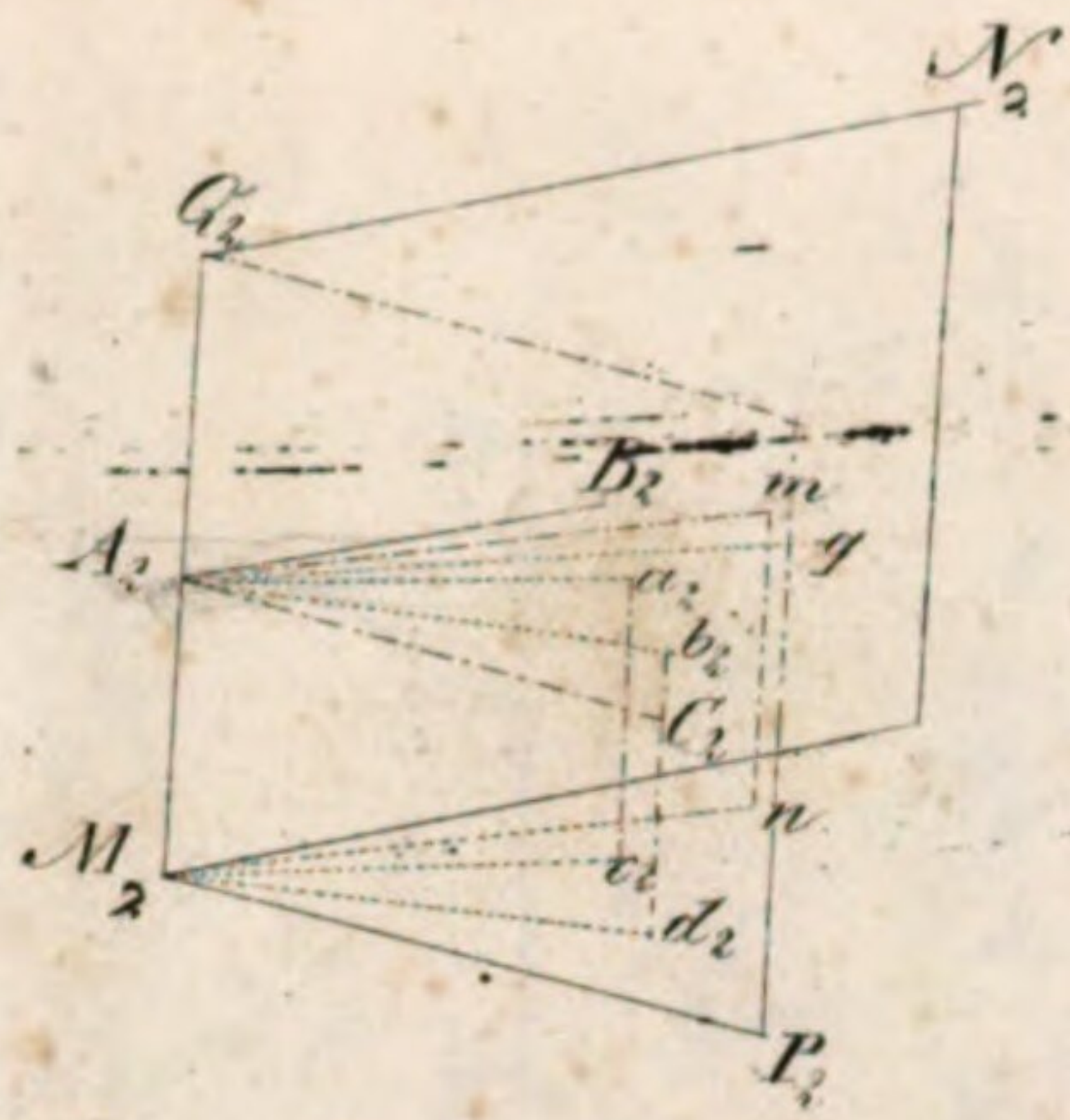
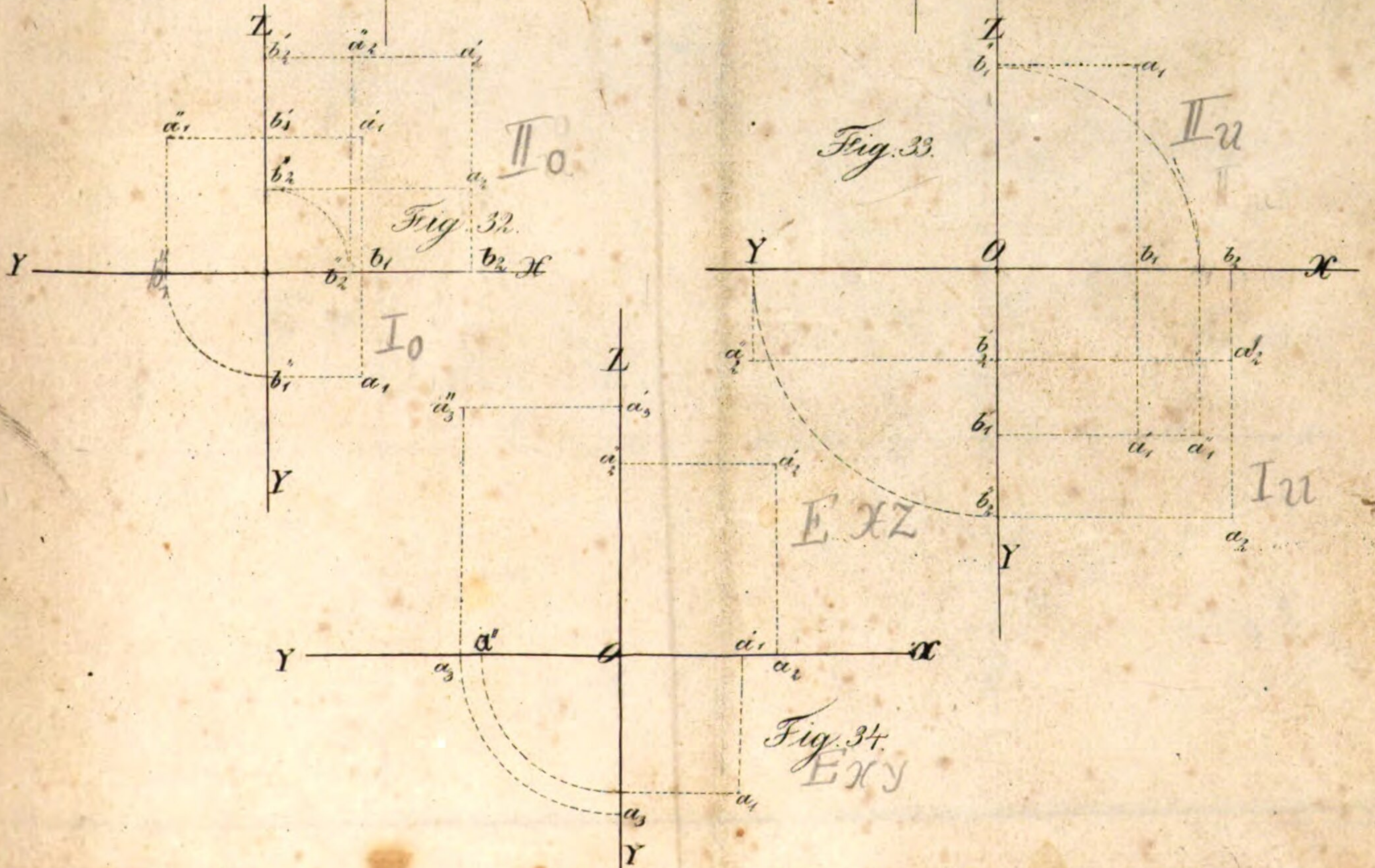
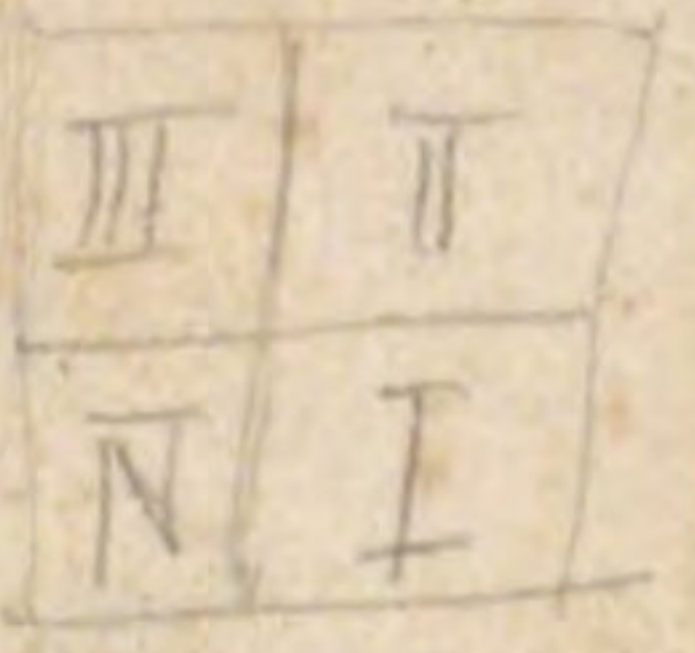
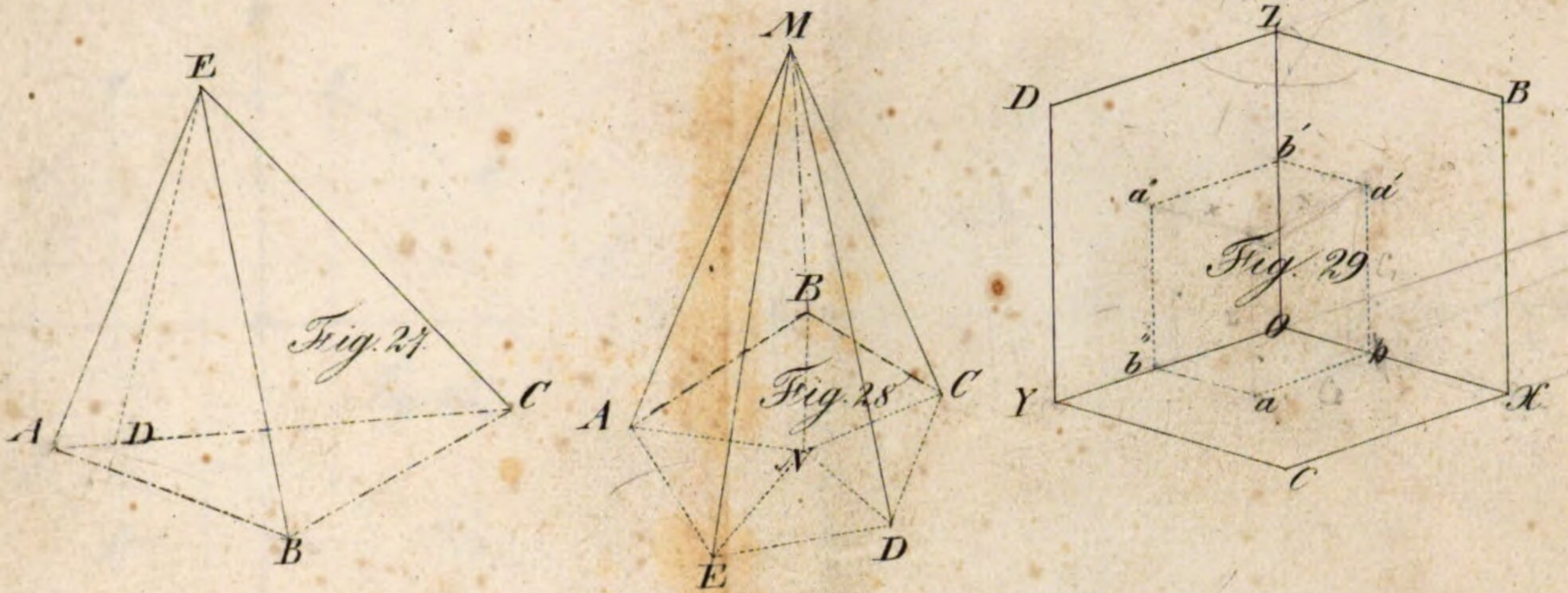


Fig. 20.

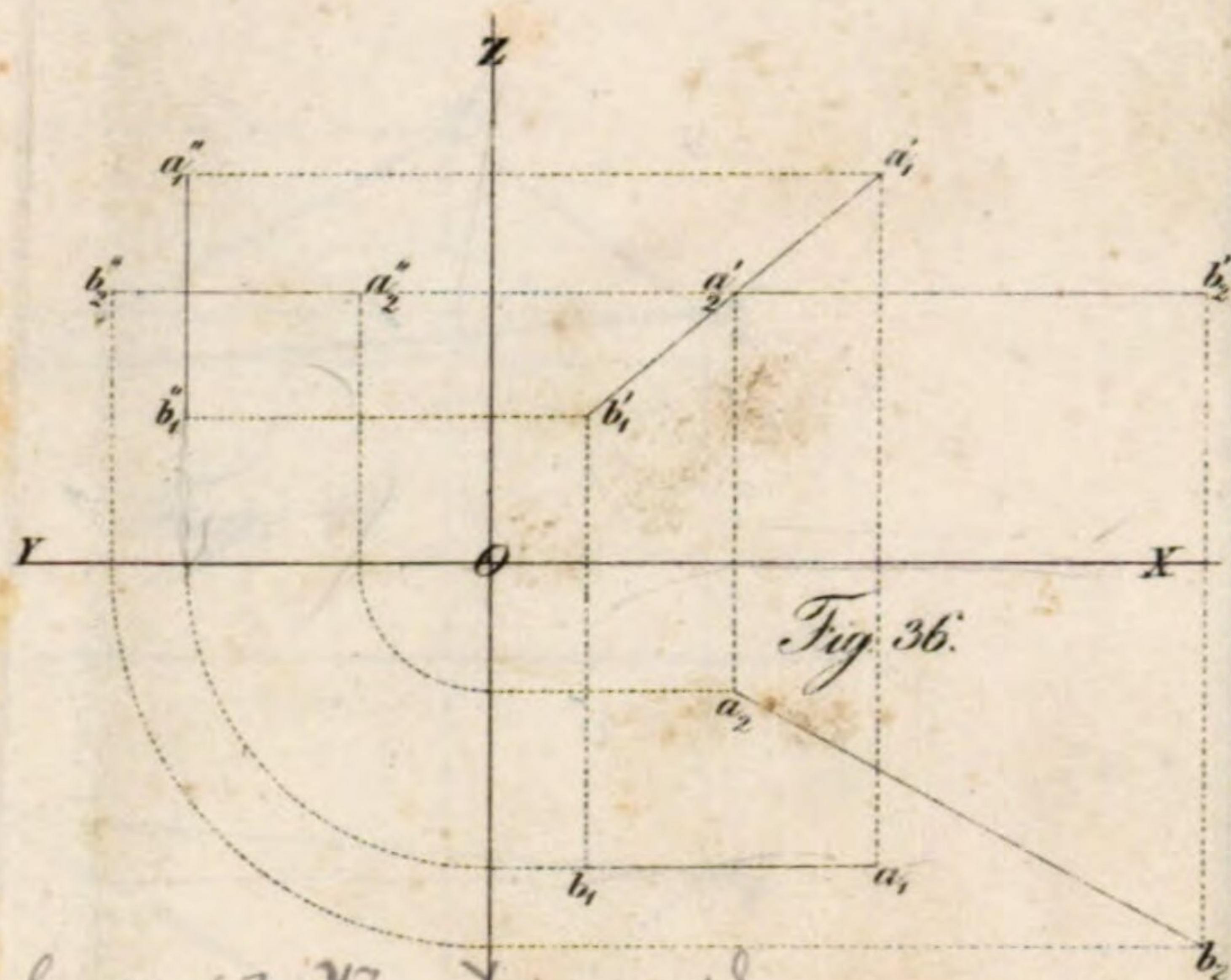
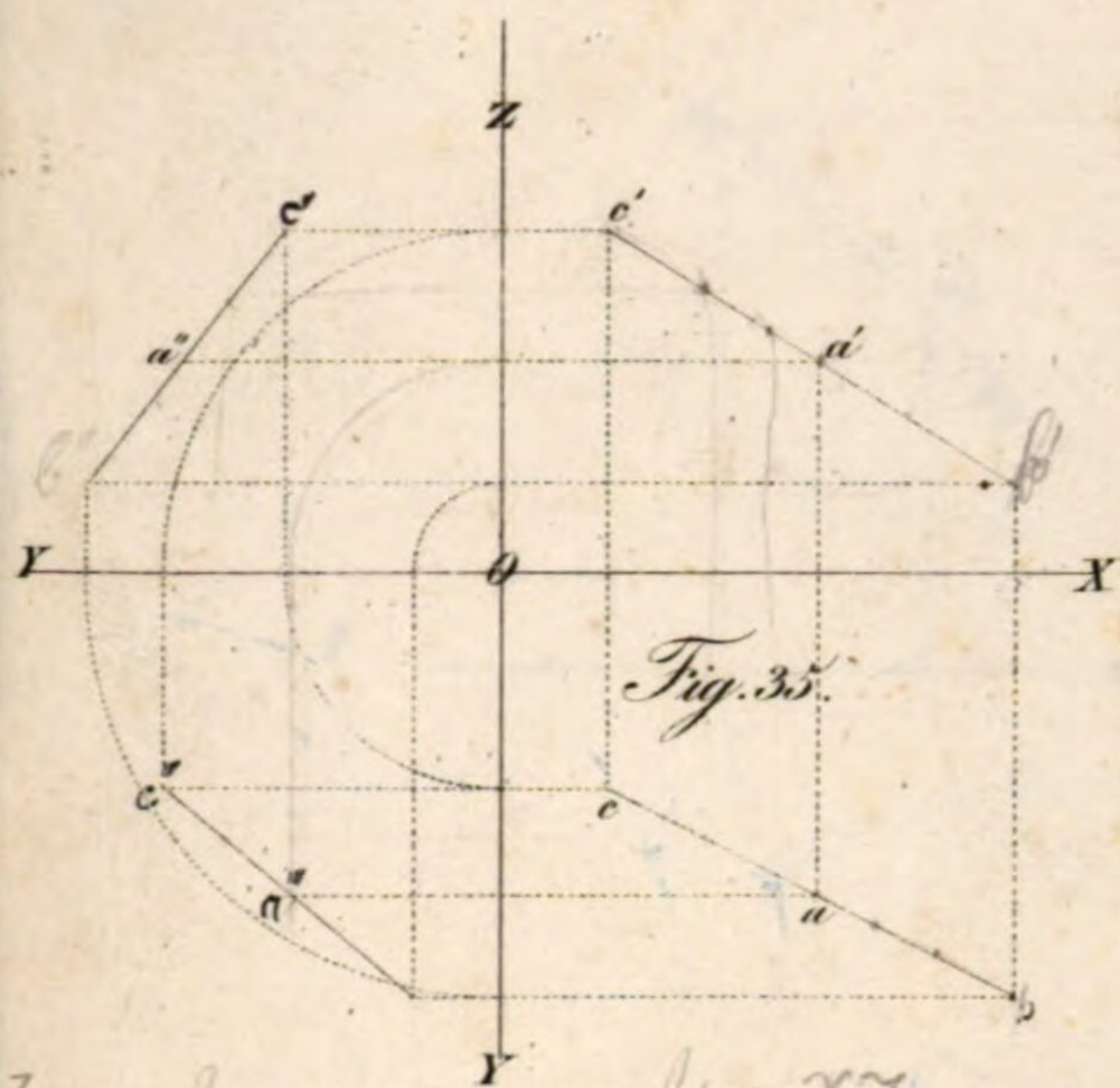




a₁ auf XY

b₁ auf XZ

b₂ auf XY

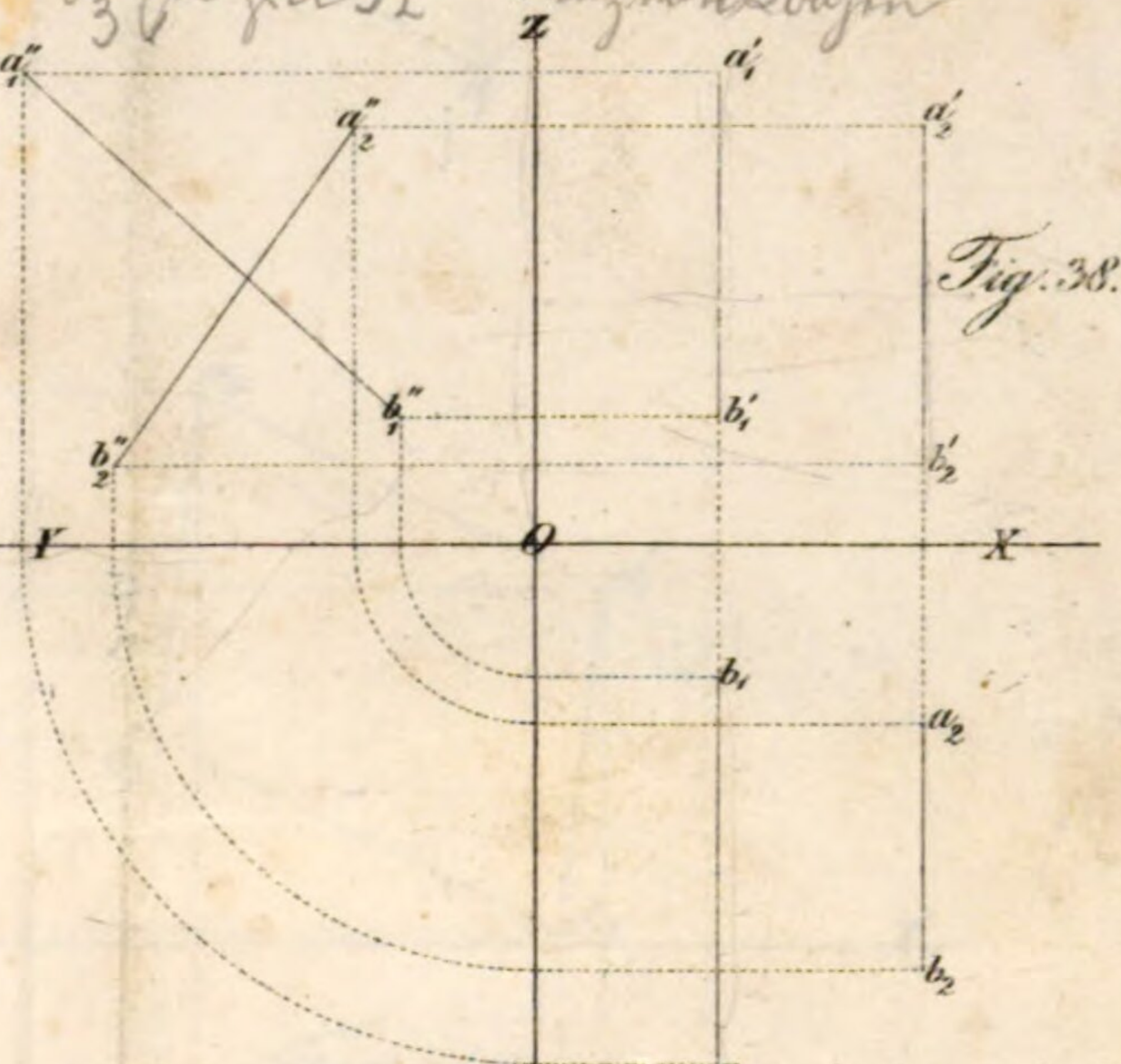
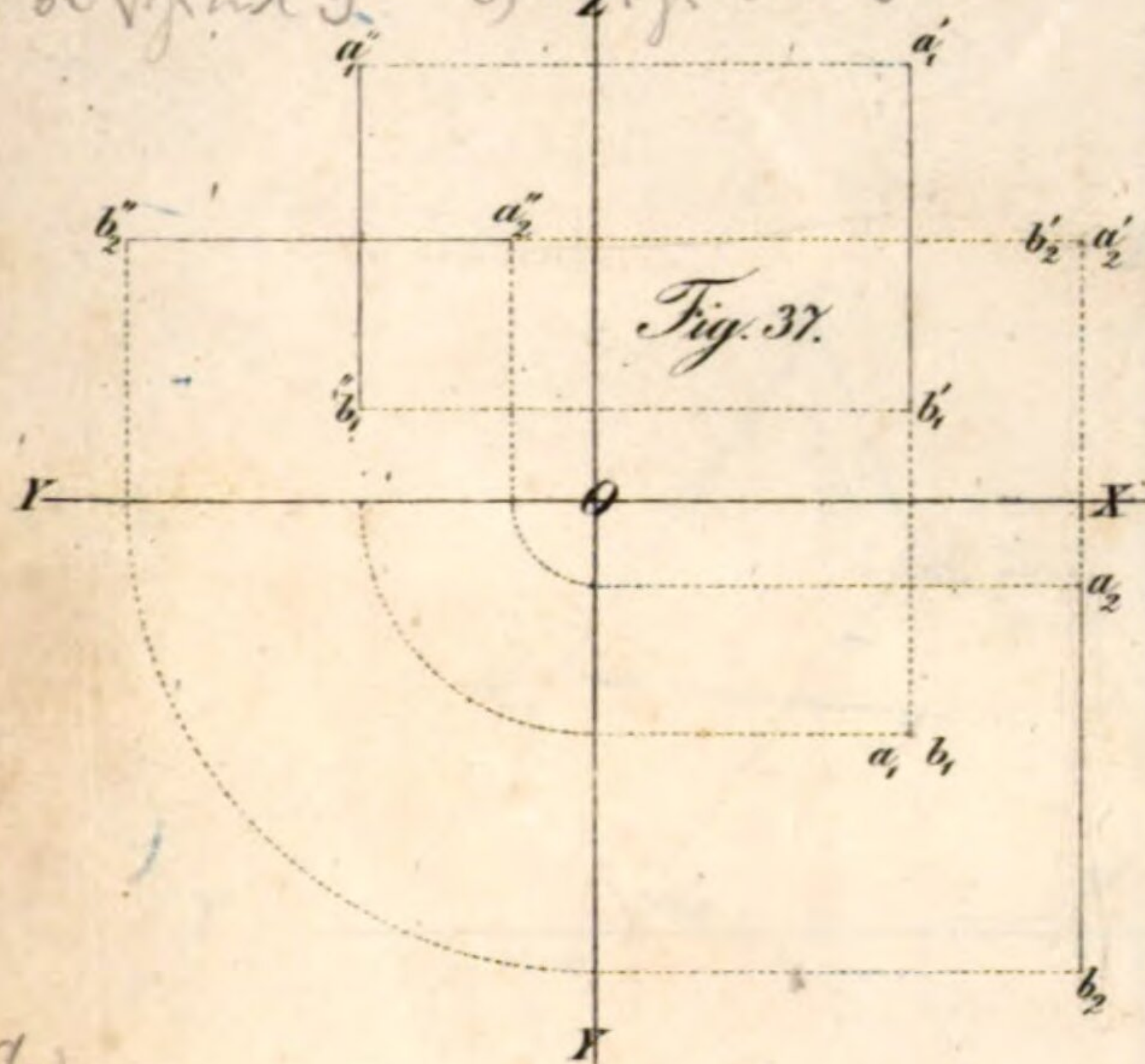


b₁ auf XYZ

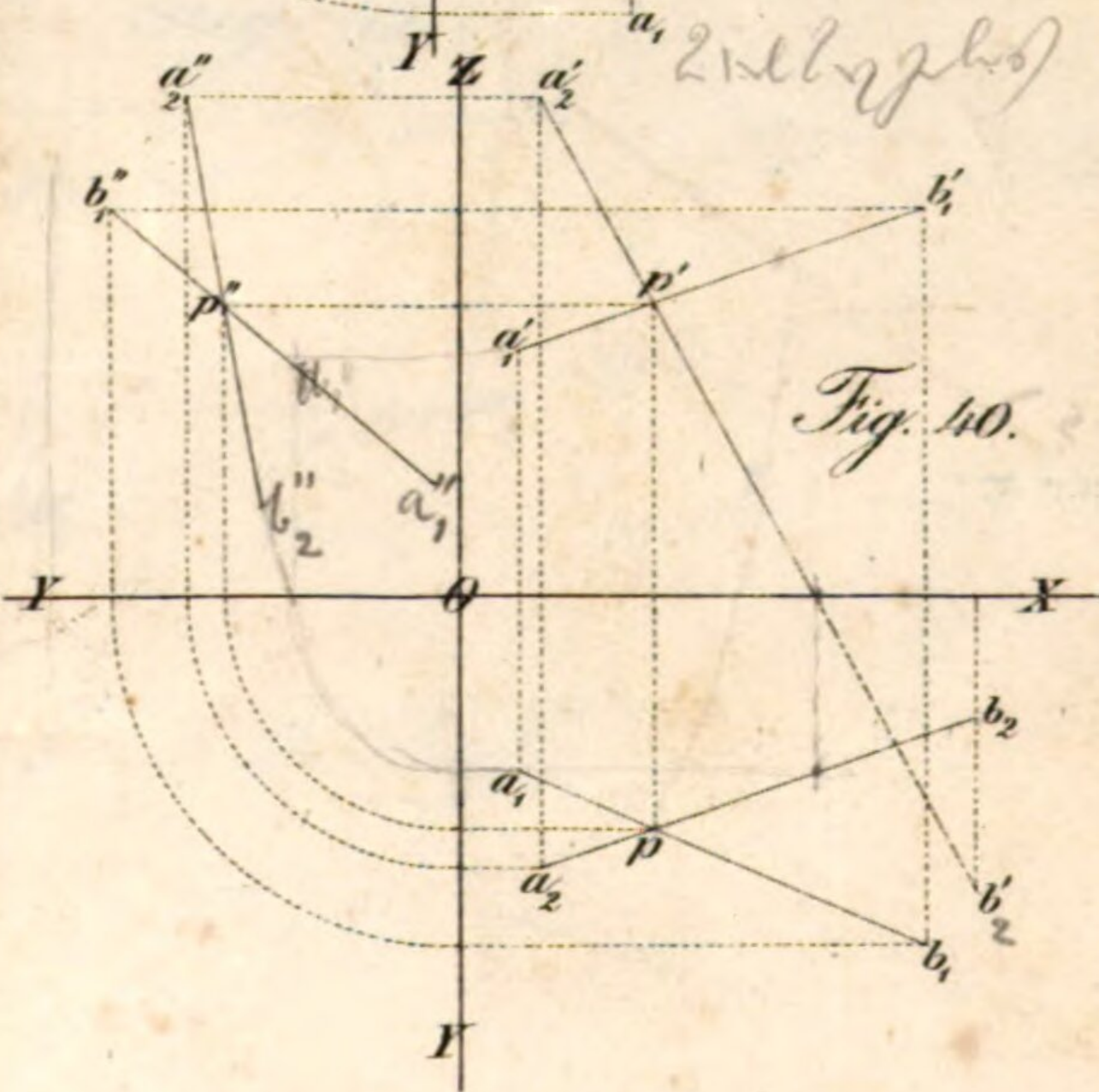
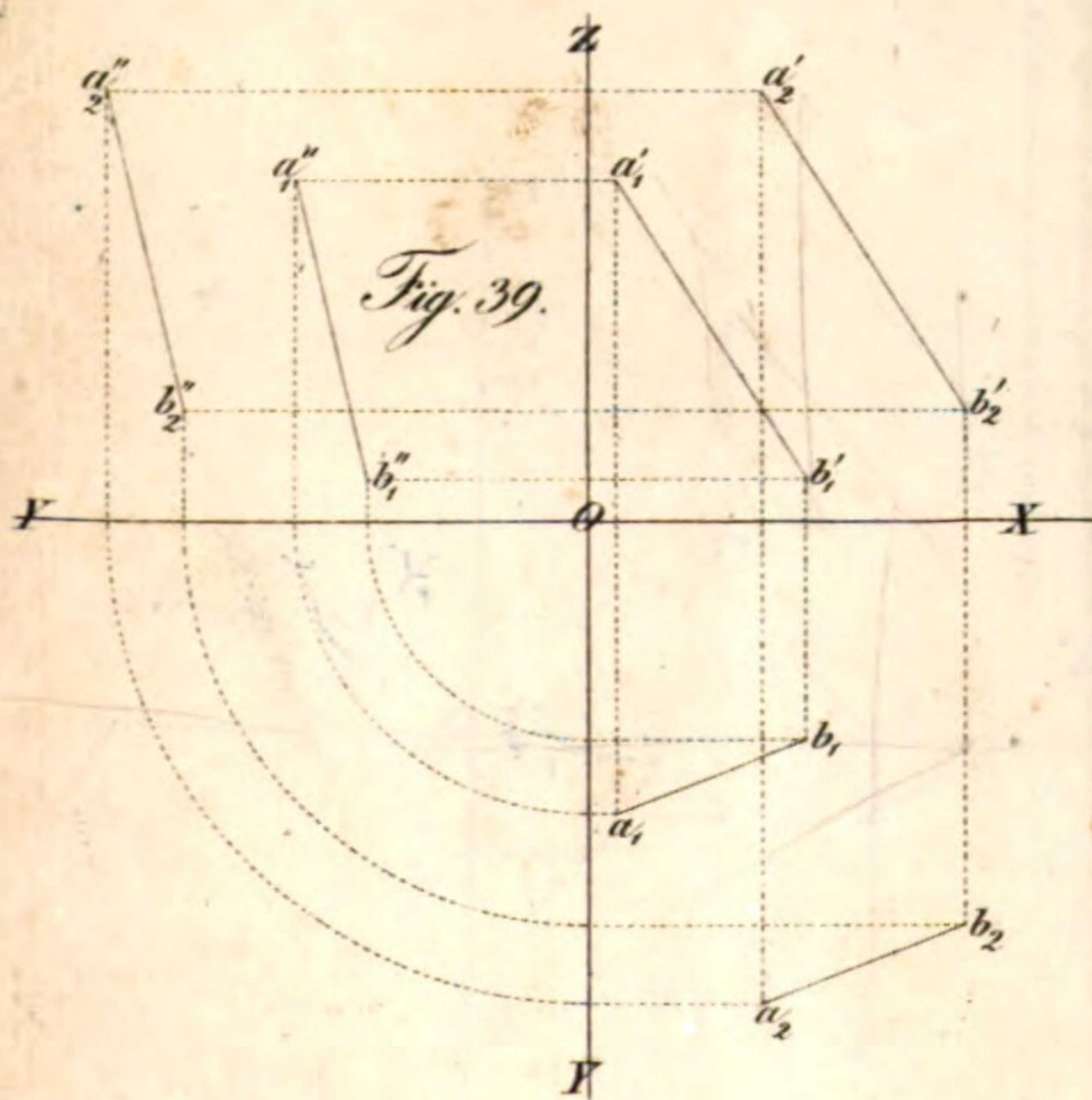
a₁ auf XZ

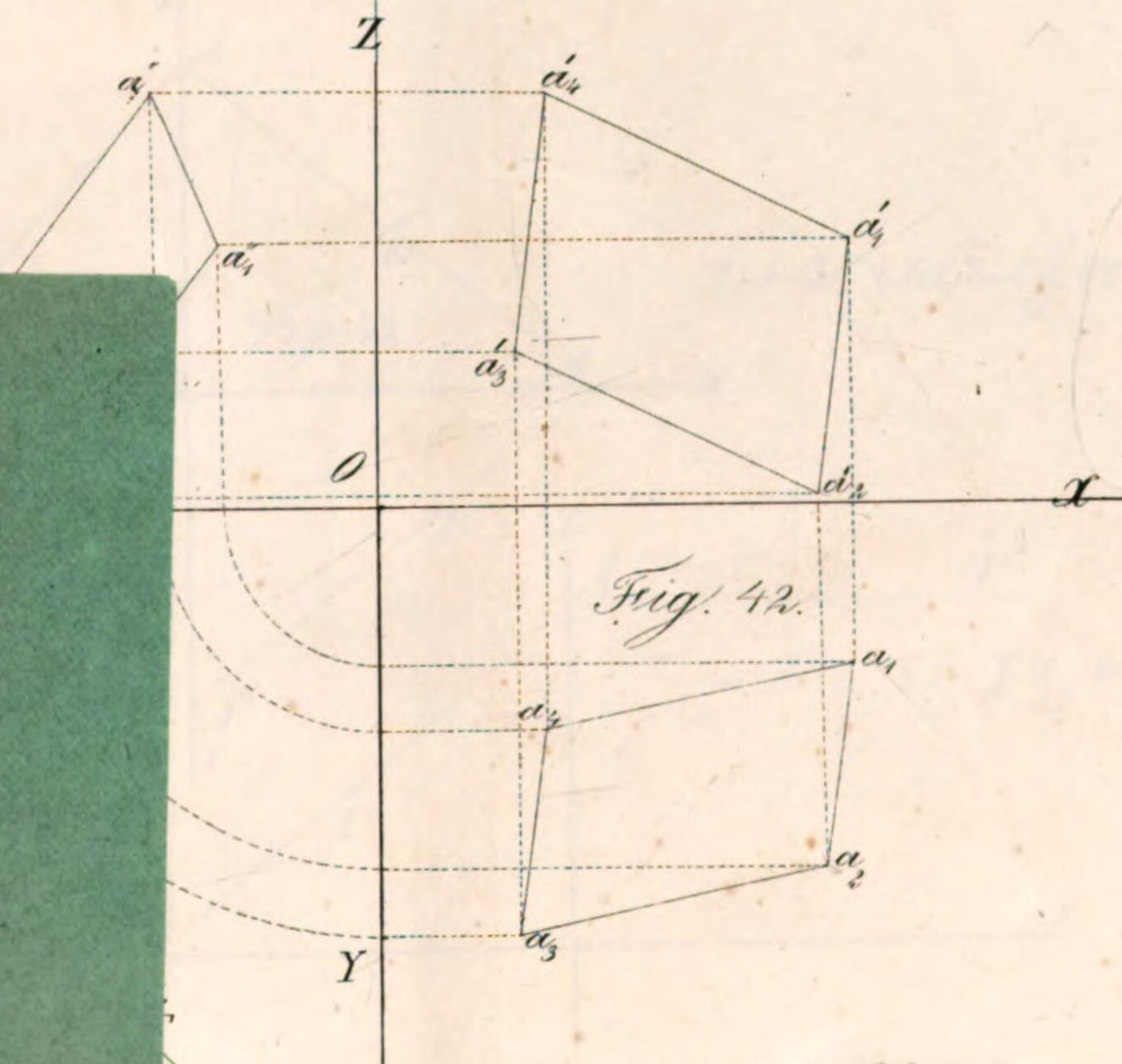
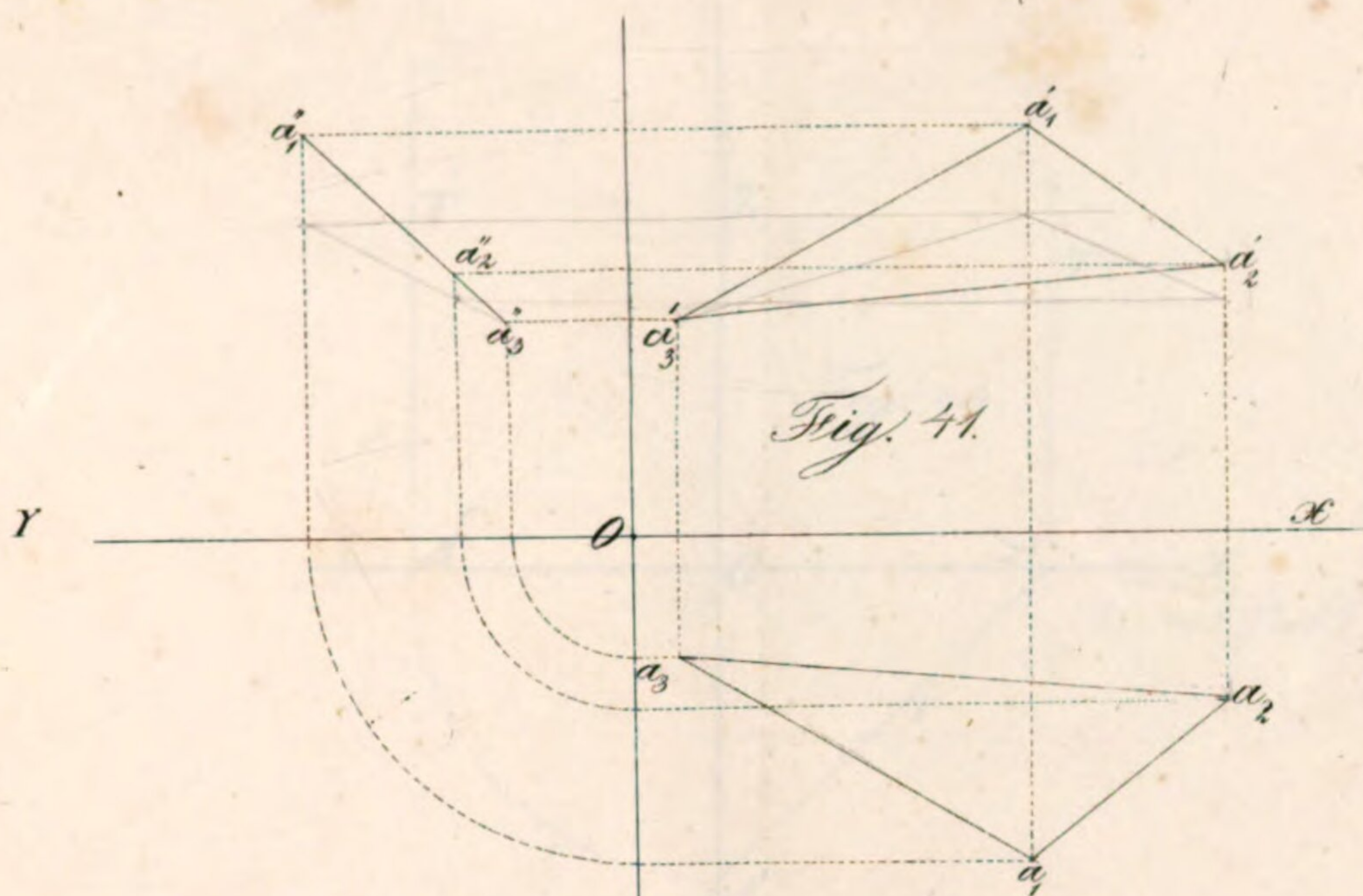
b₃ auf XYZ

Y invariabel



a₂





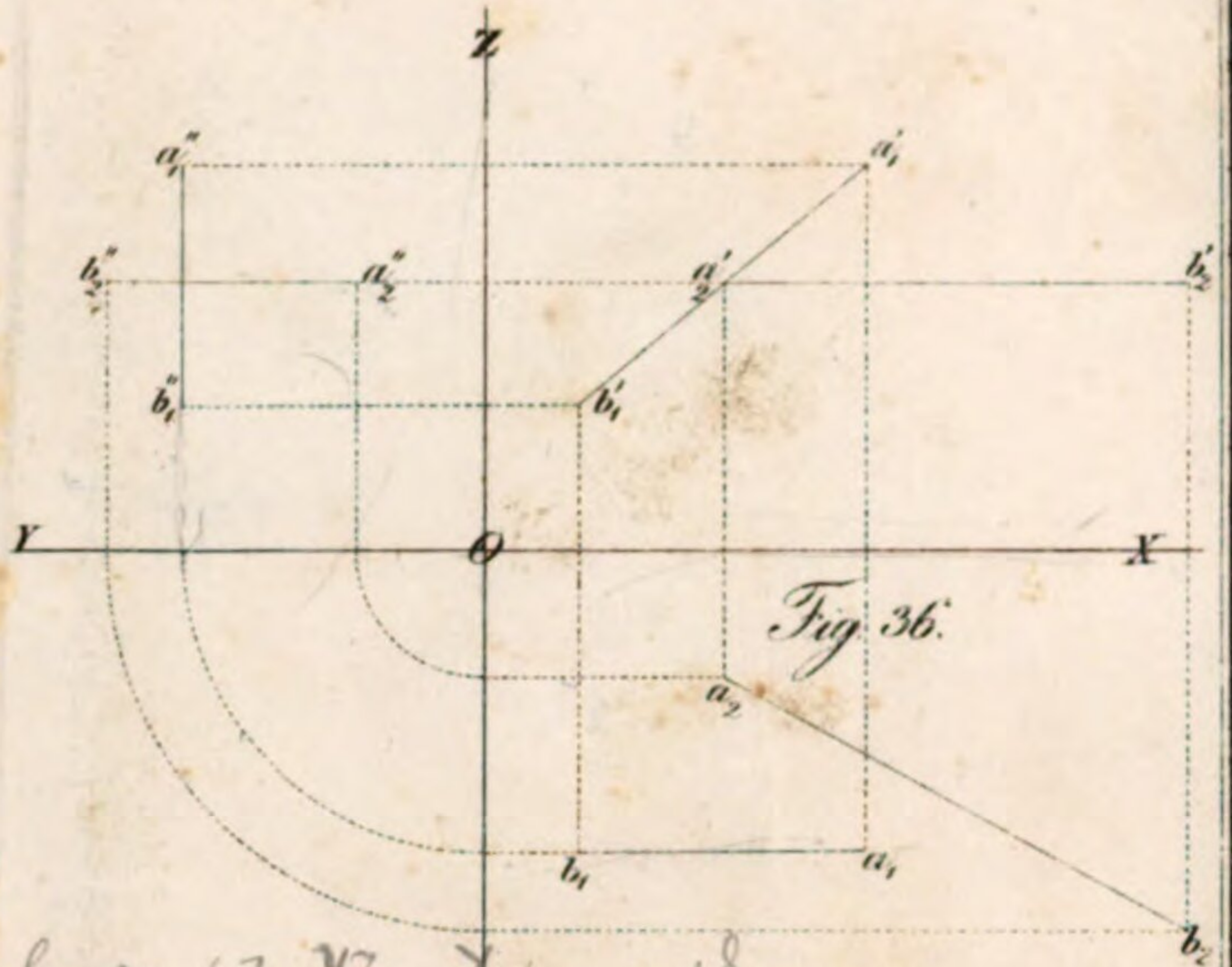
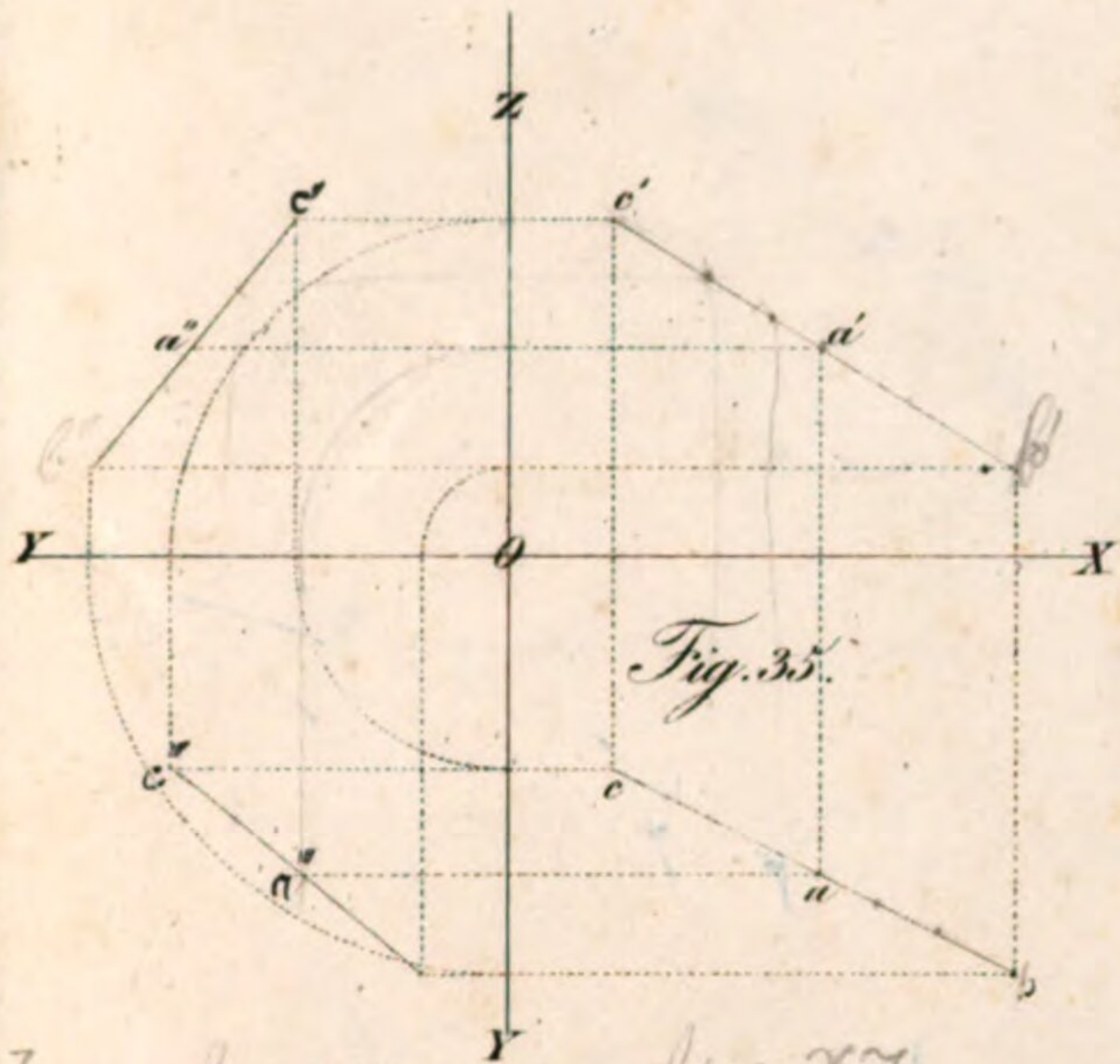
Typus Y, X, Y, Y, Z, Z

T

a) f. r. u.

b) f. r. u. z

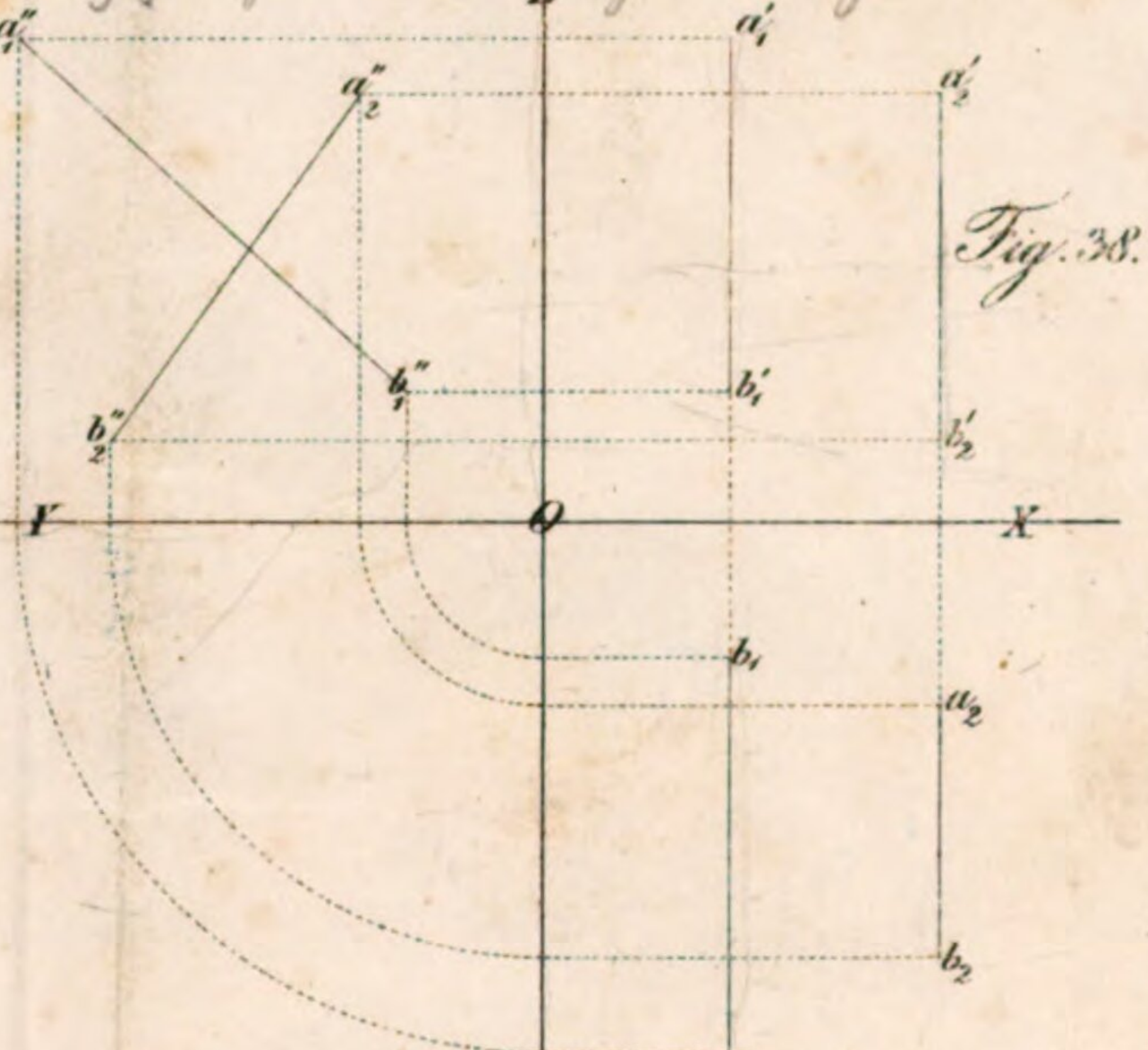
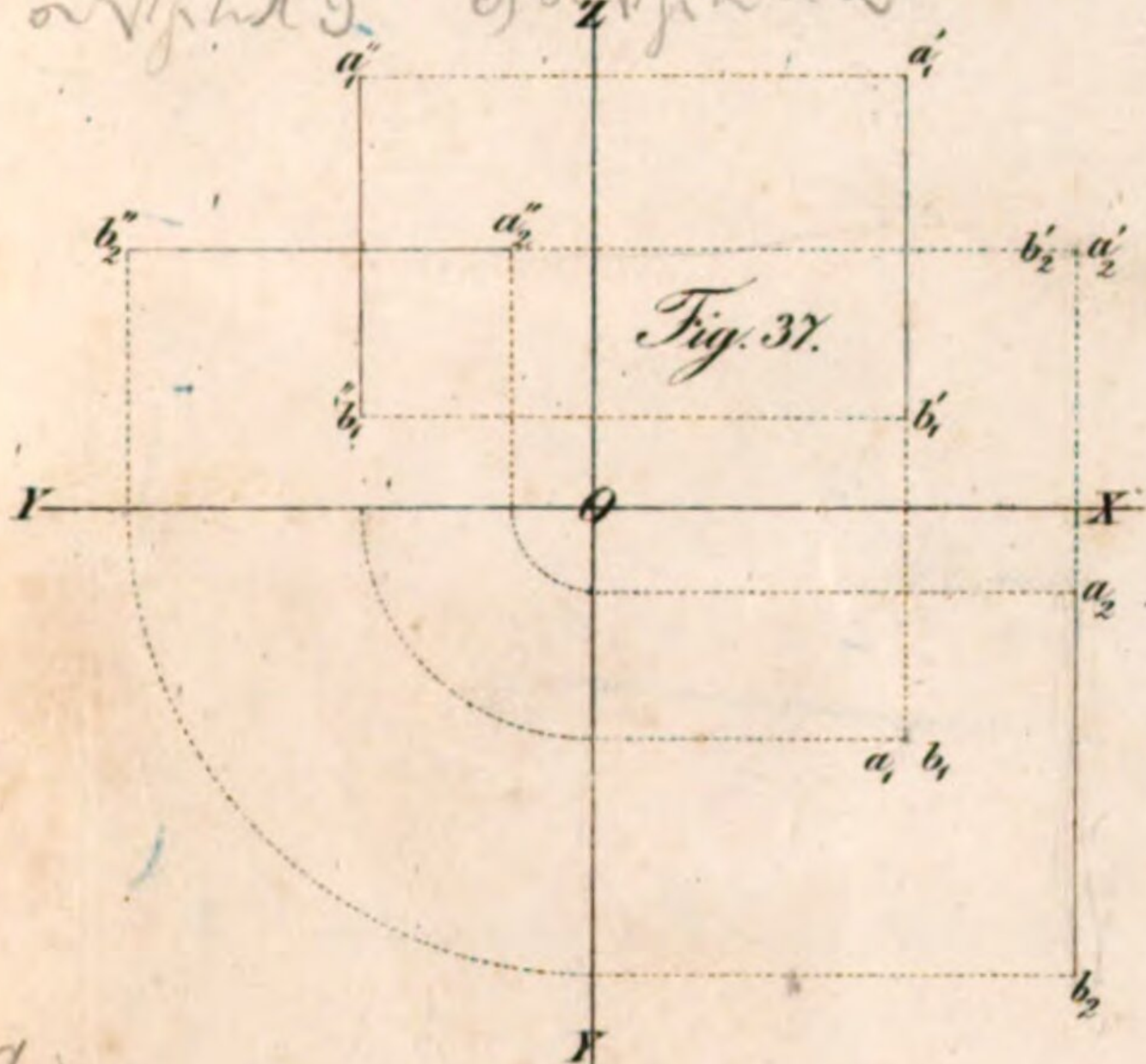
b) f. r. u. xy



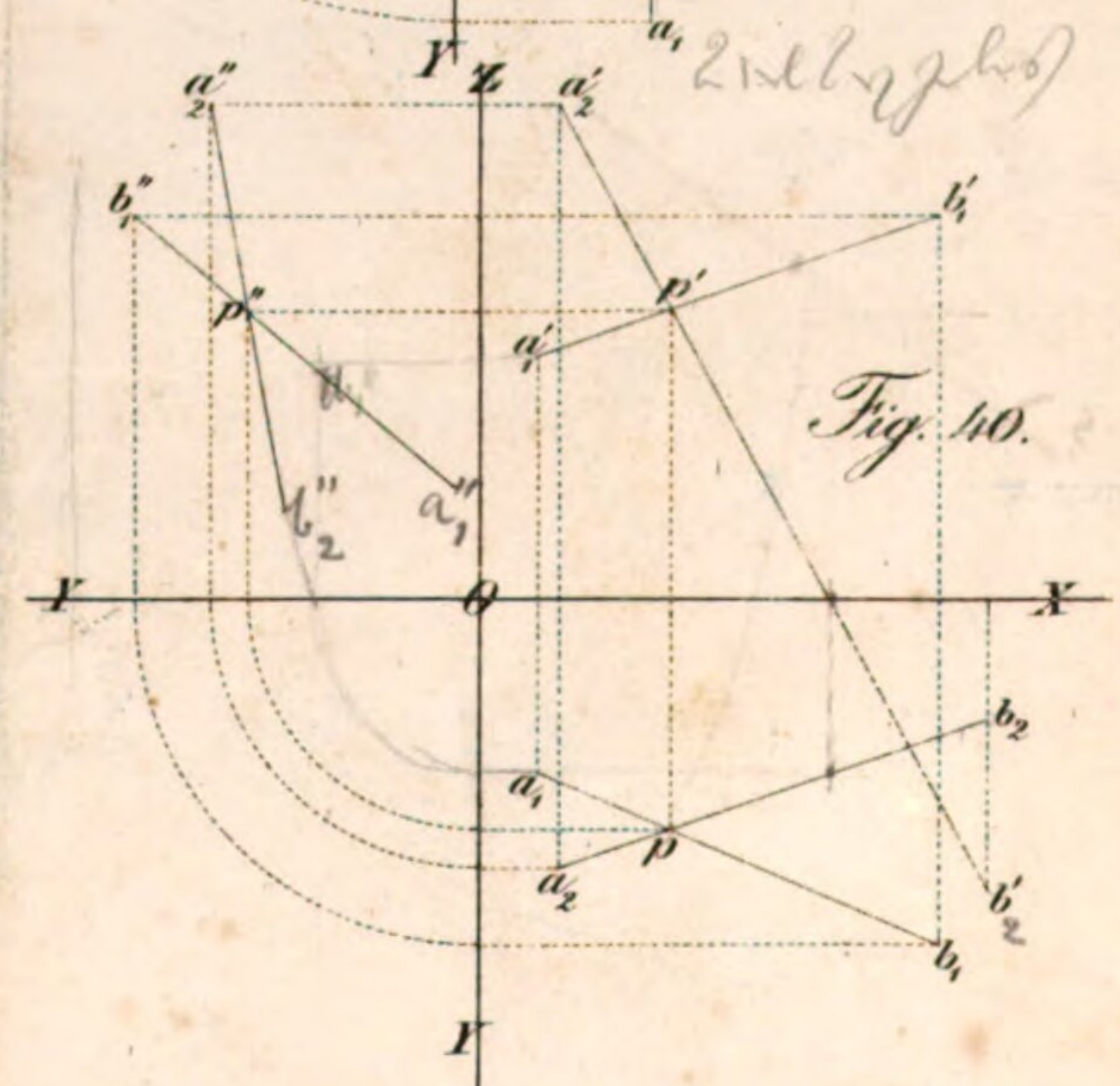
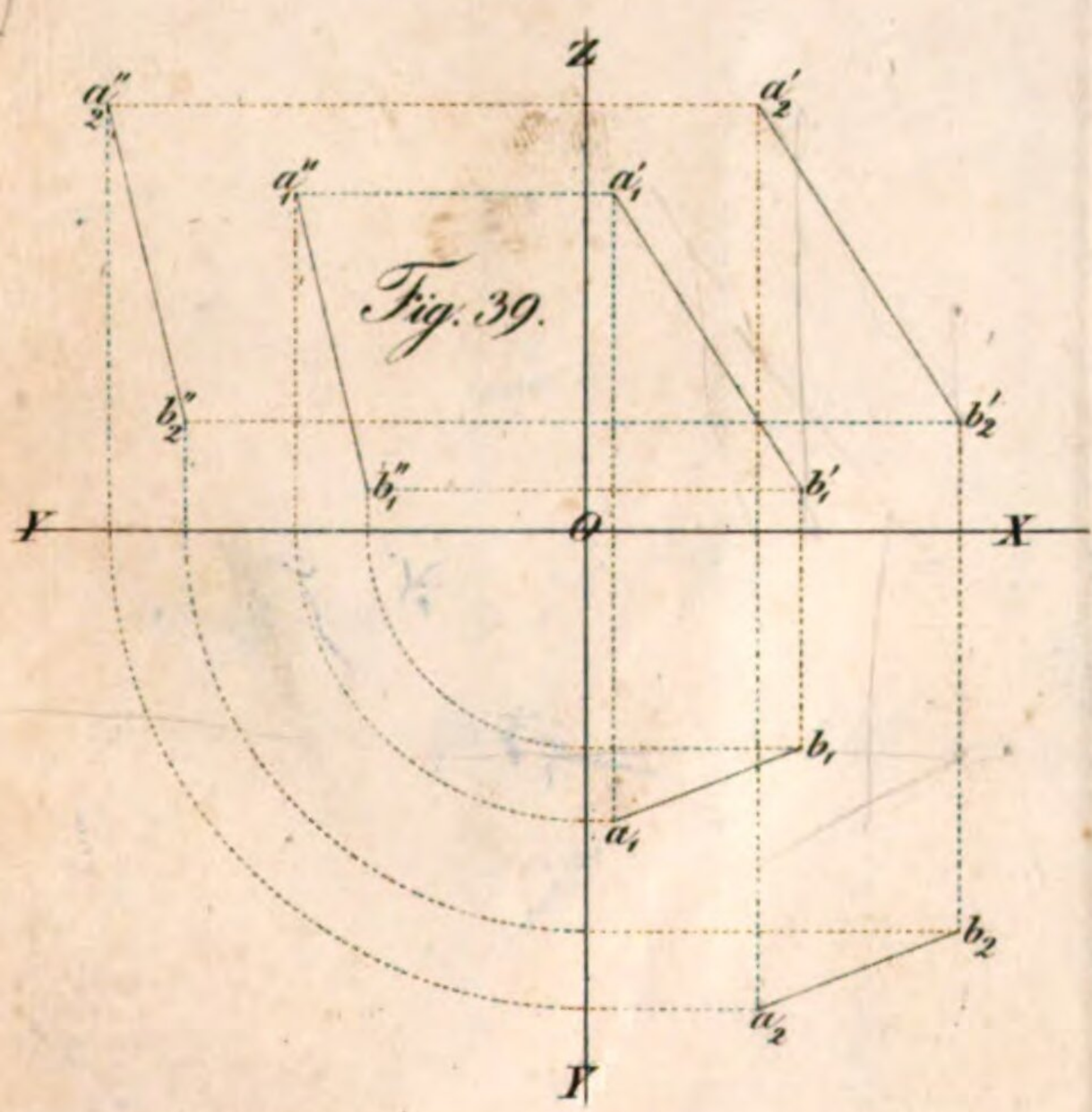
d) f. r. u. xy

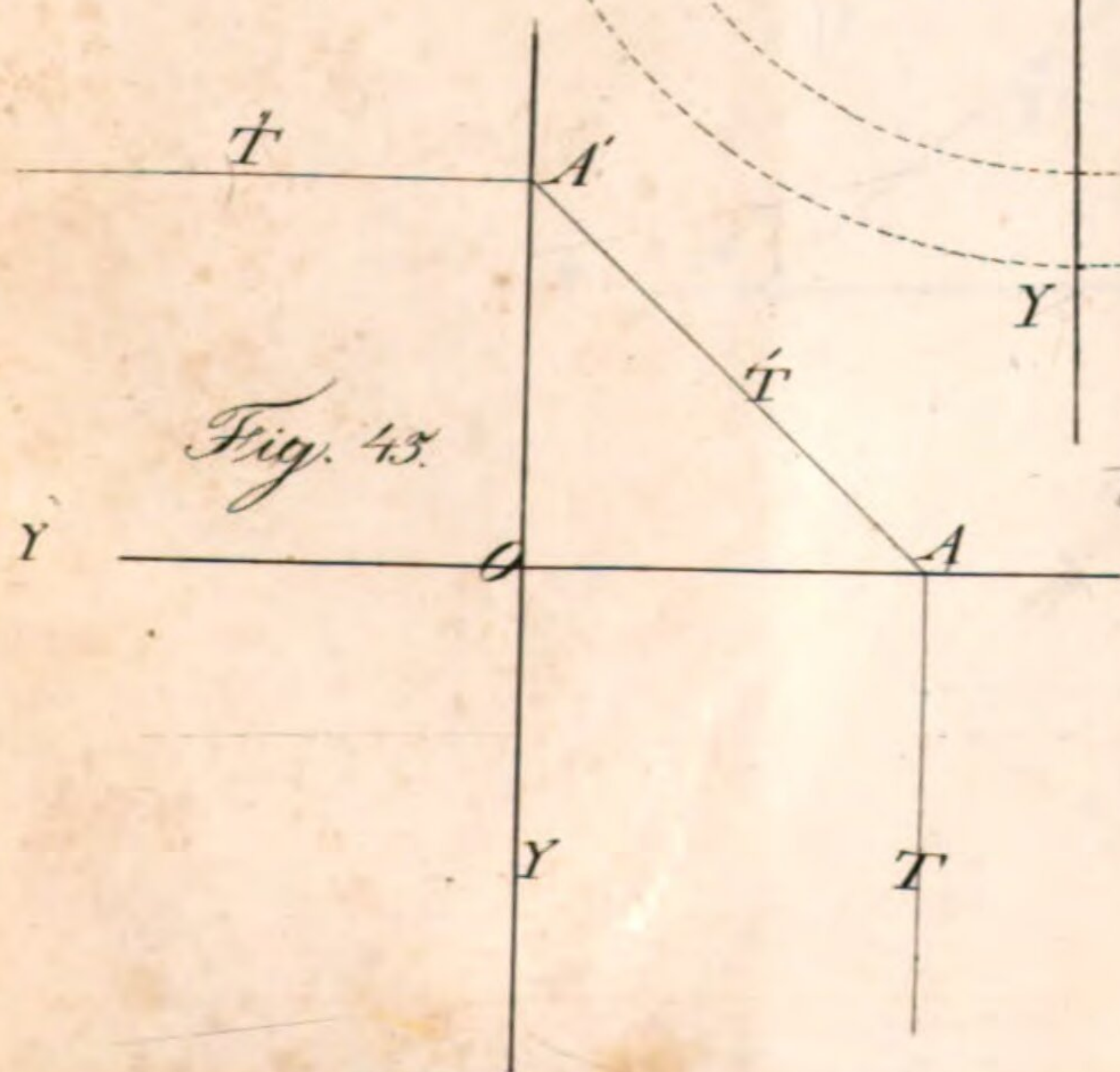
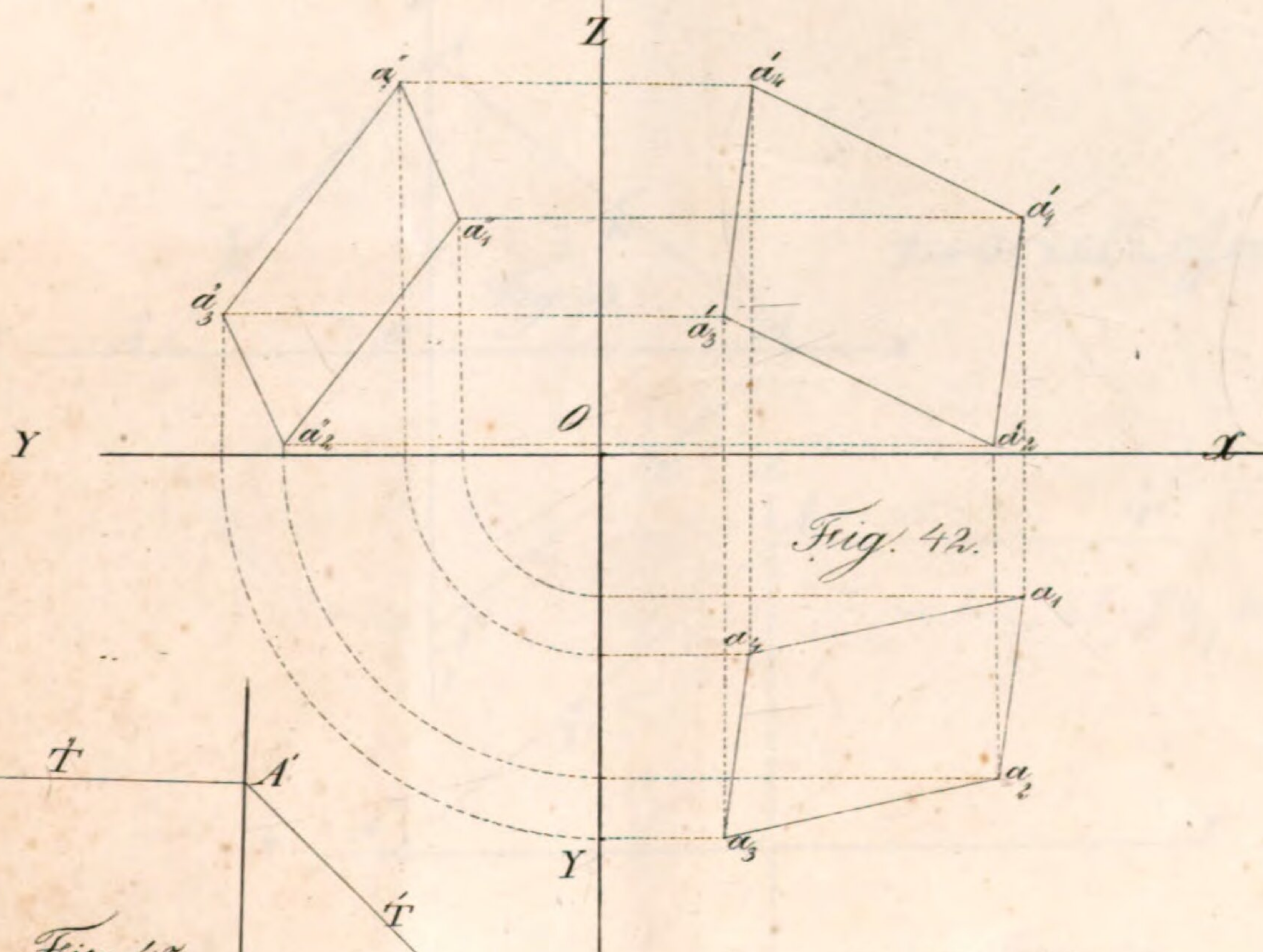
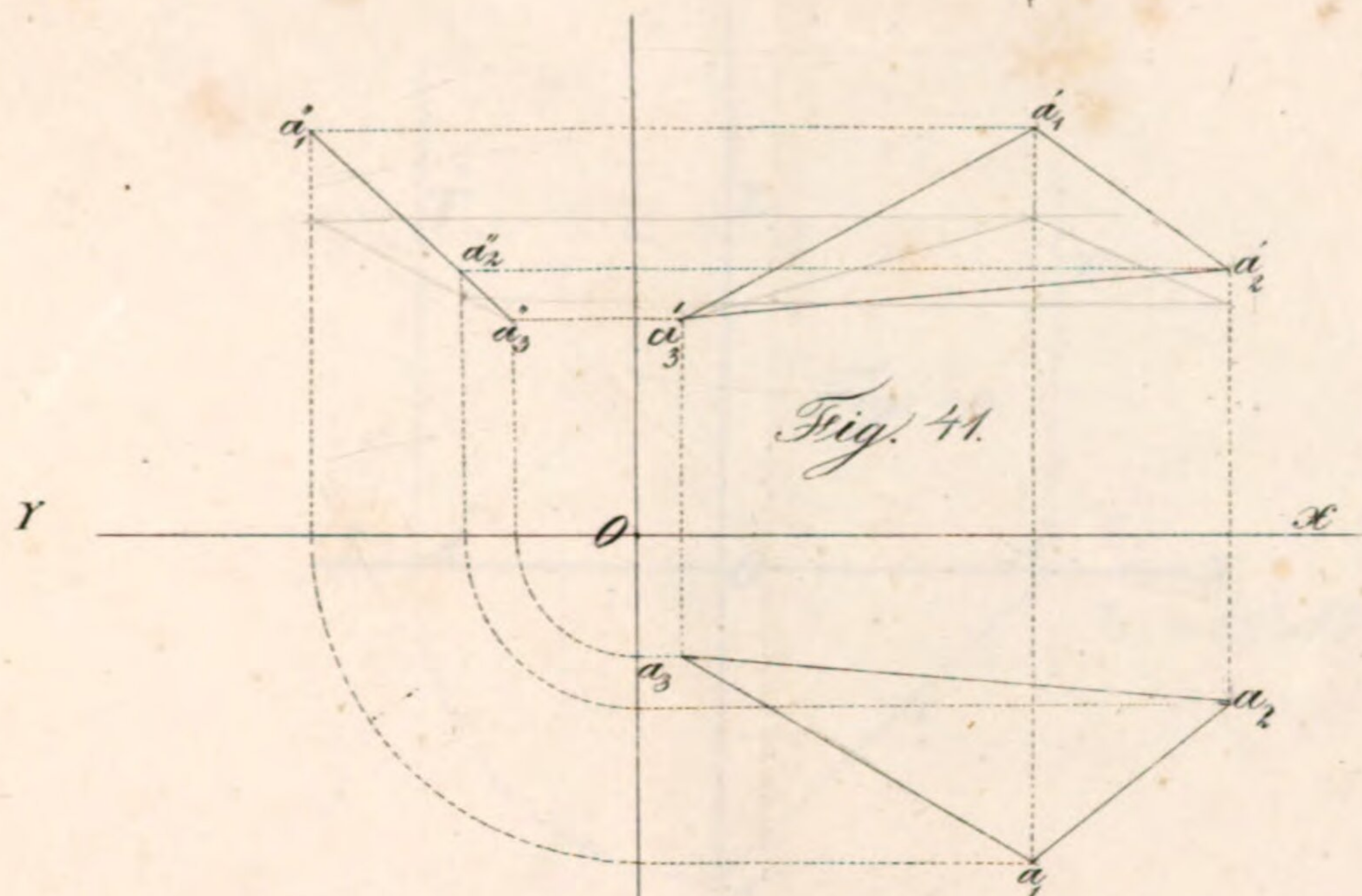
b) f. r. u. z

z. f. r. u. xy

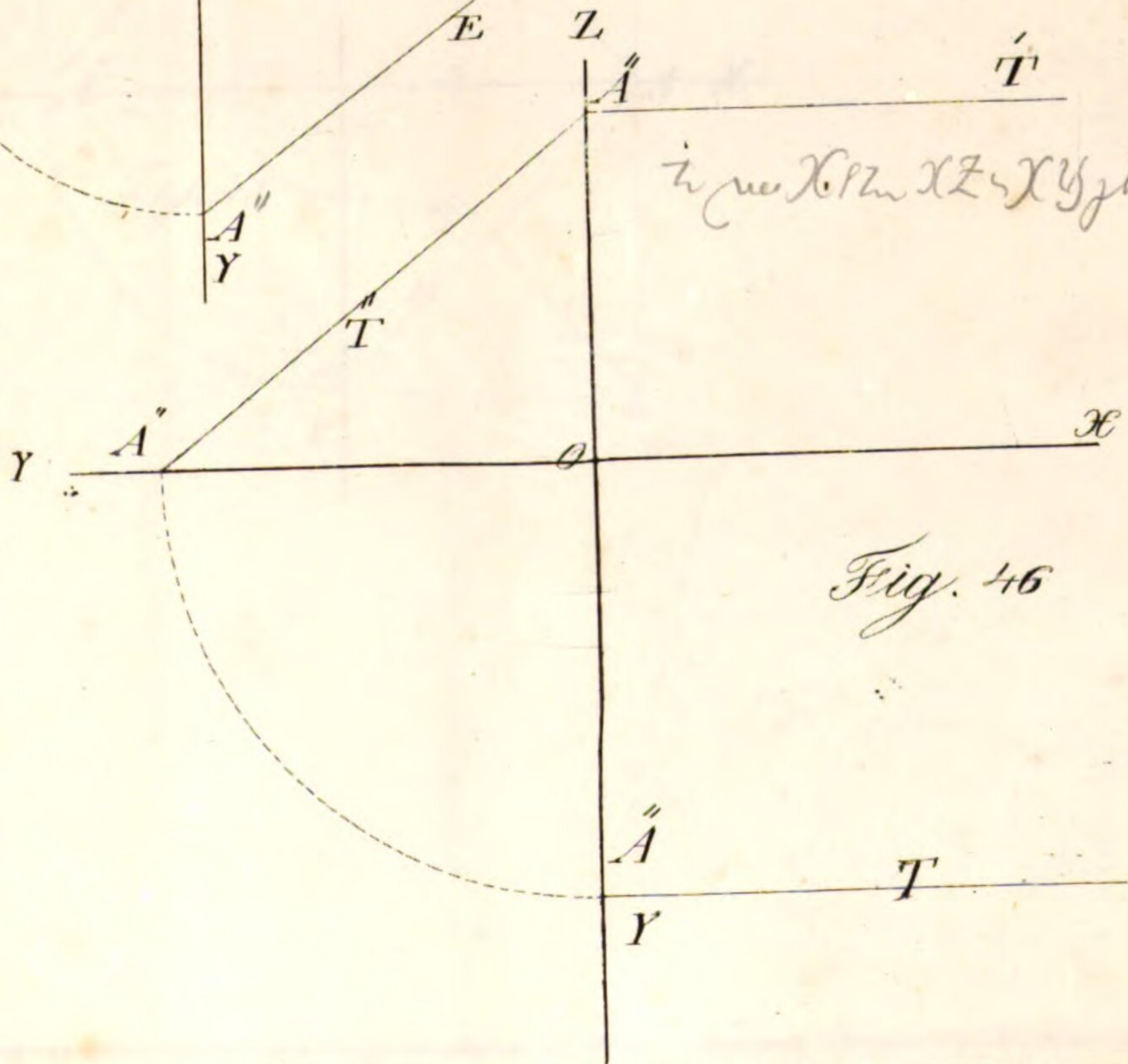
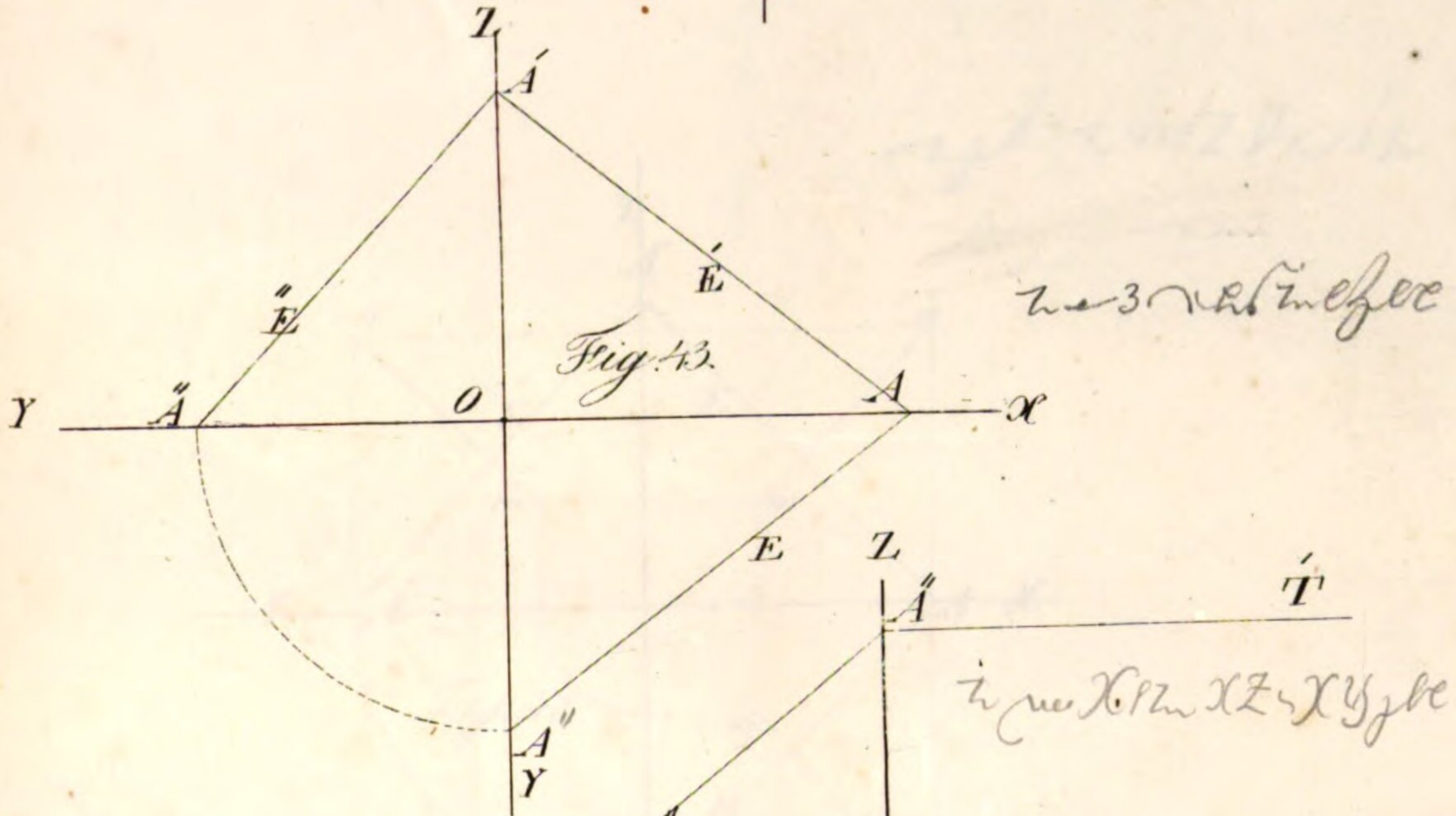
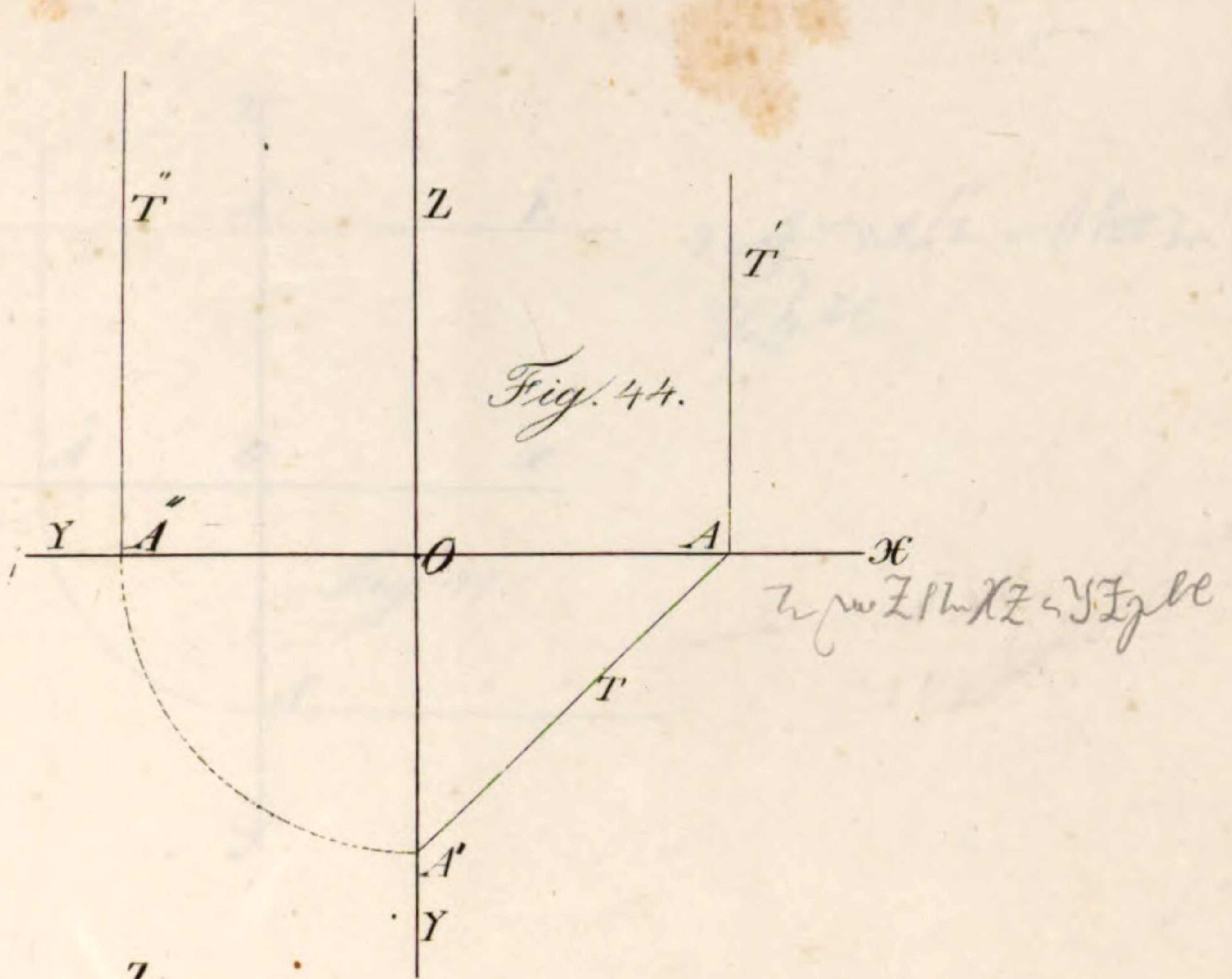


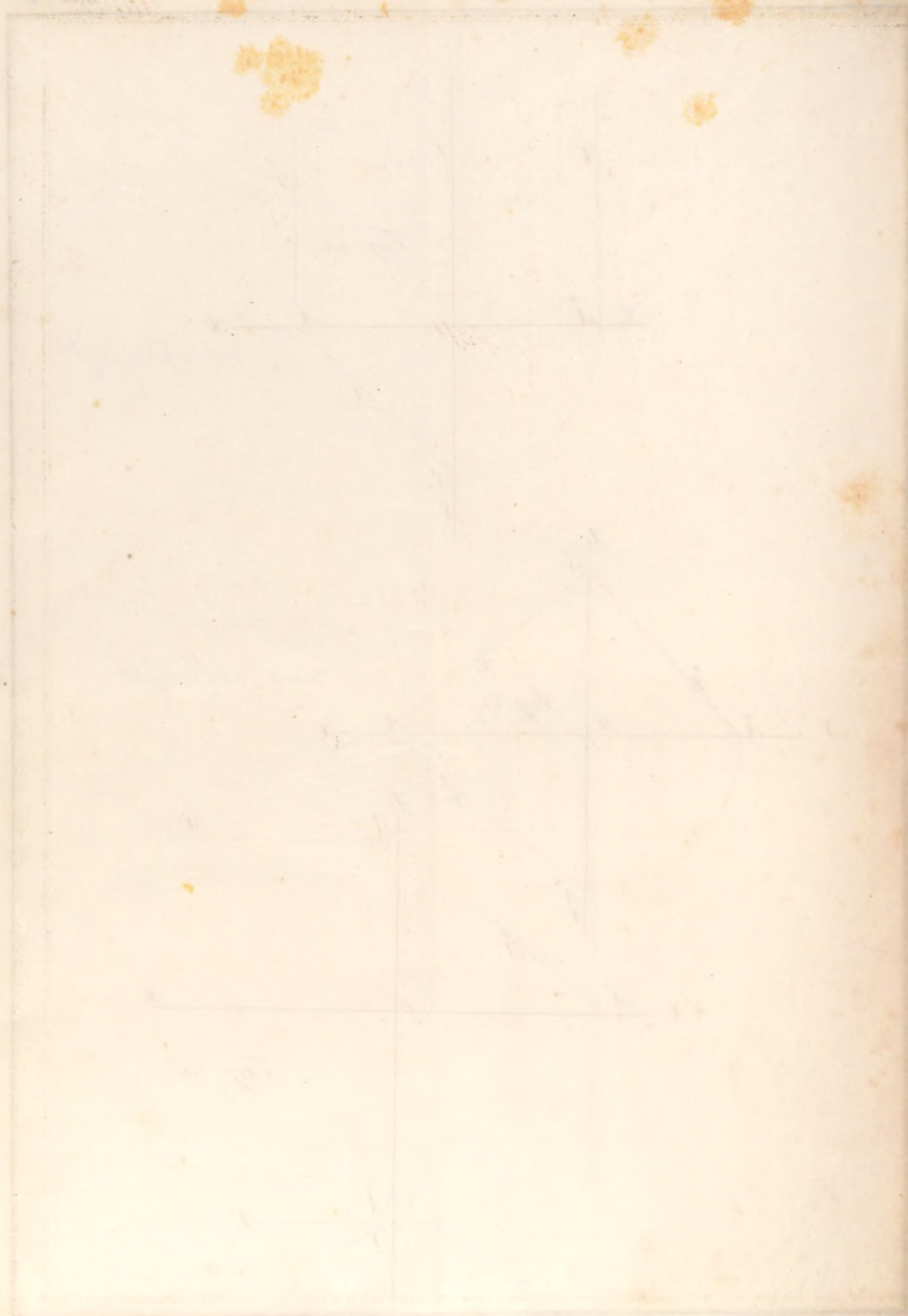
a) 2)

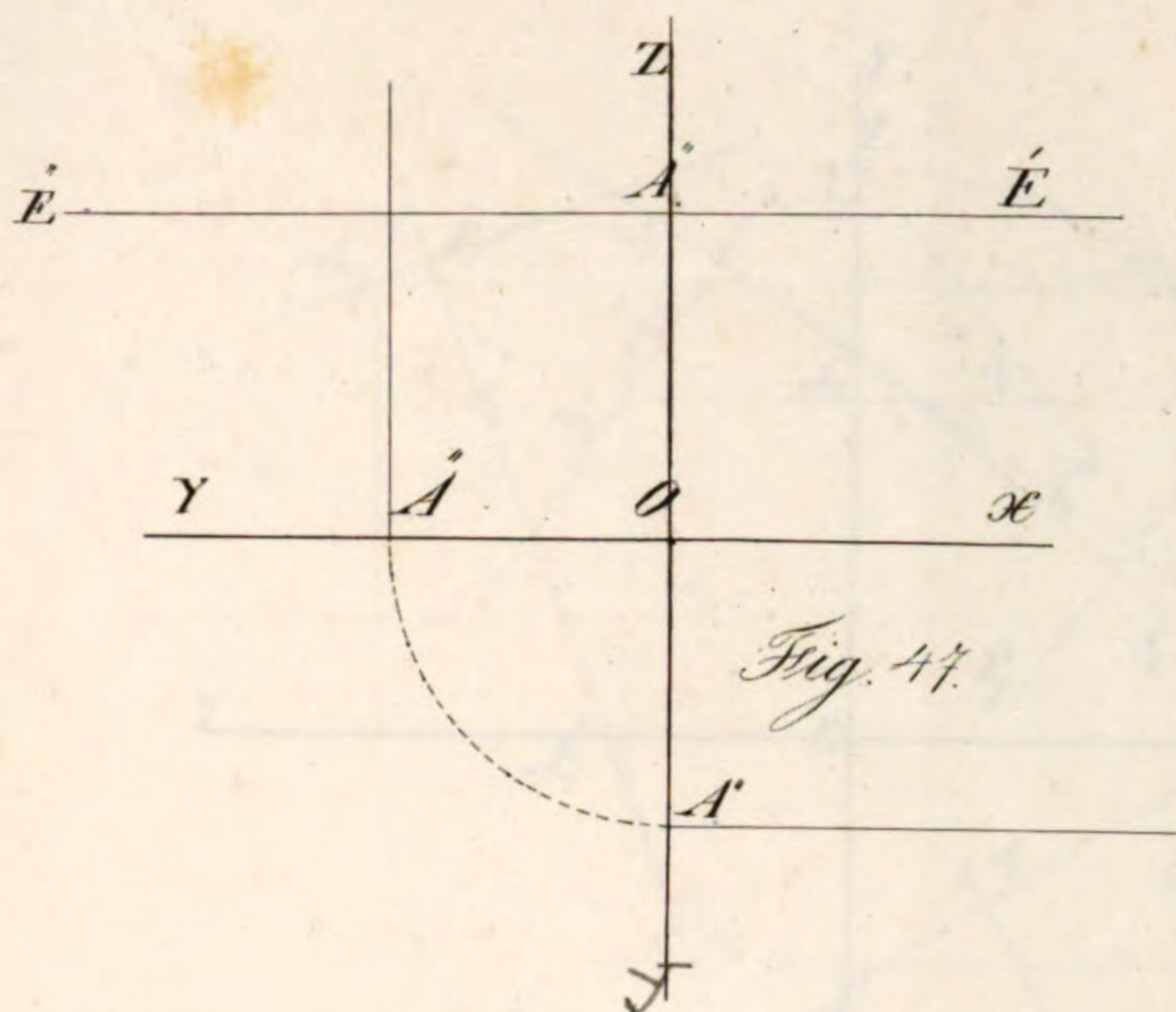




Wegen Y, Z, X, Y, Z, X

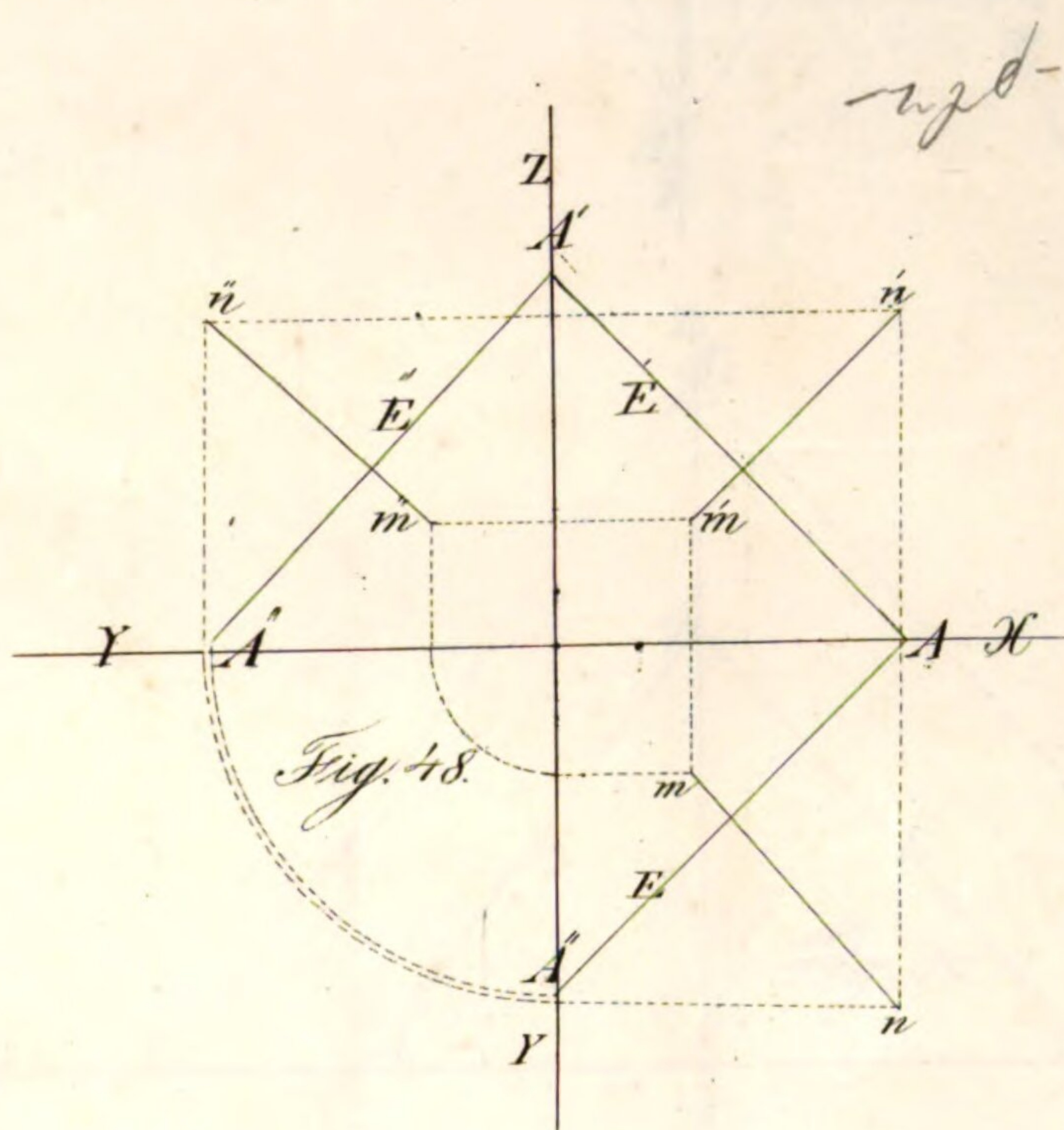






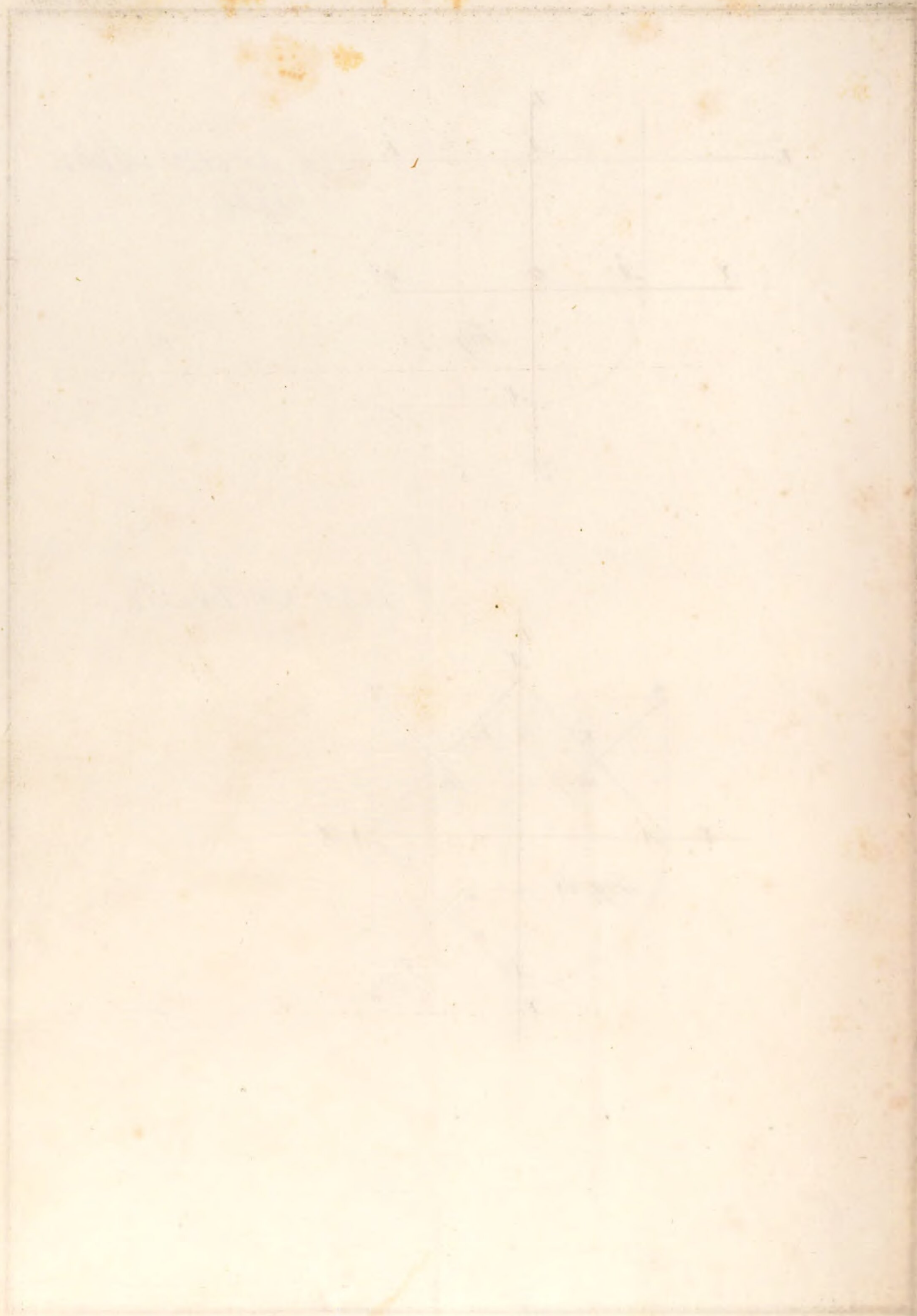
24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

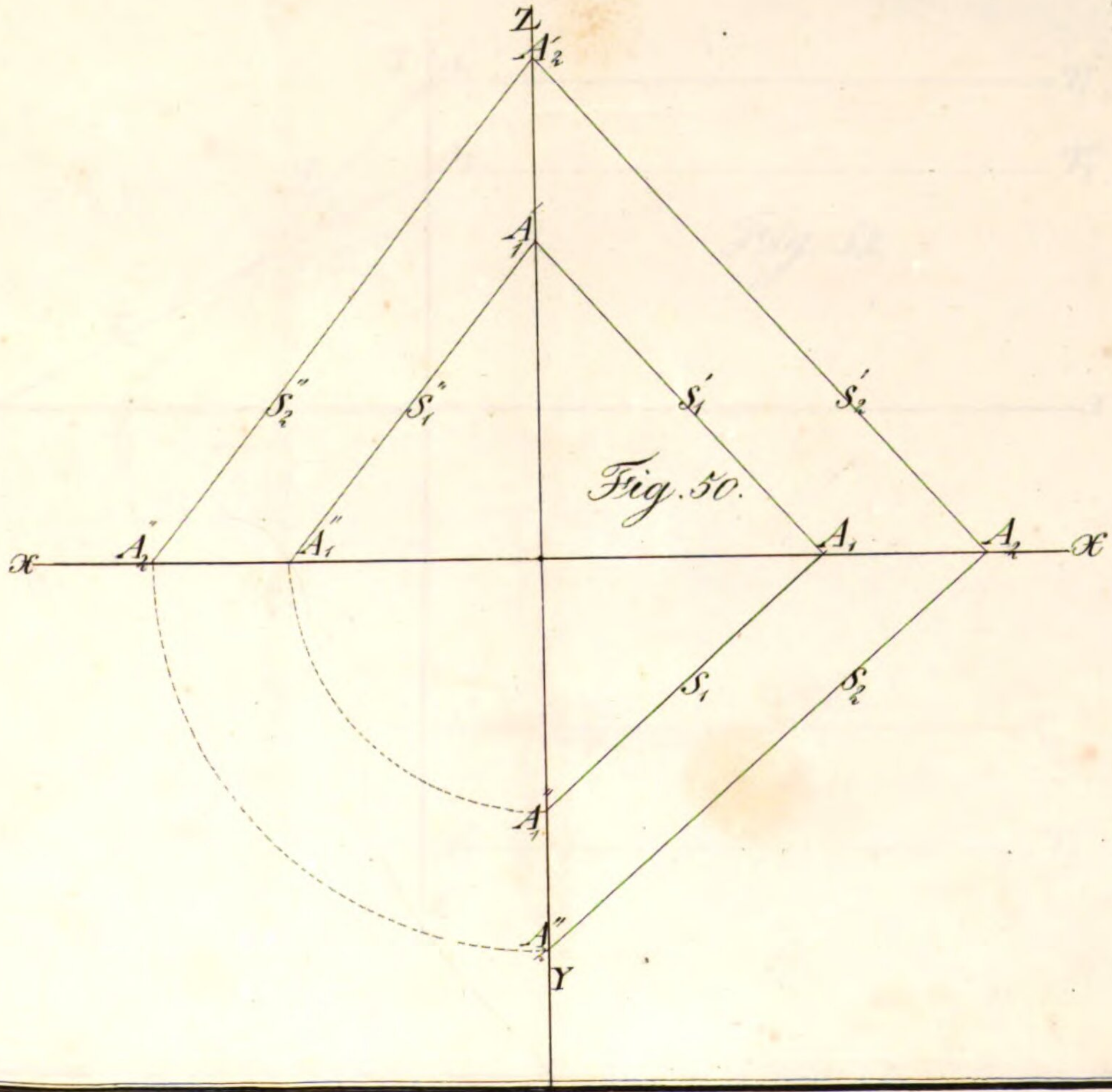
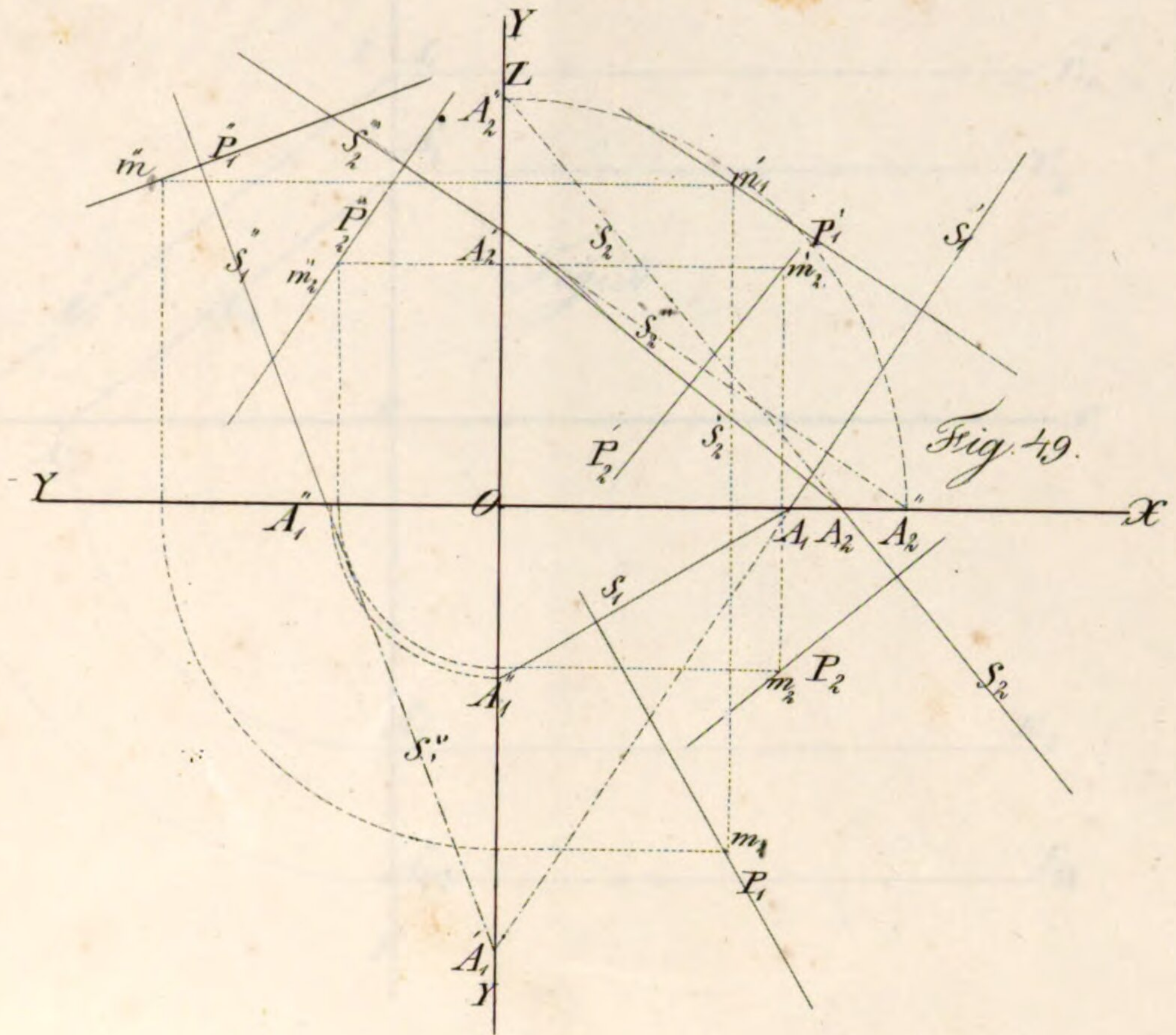
Fig. 47.

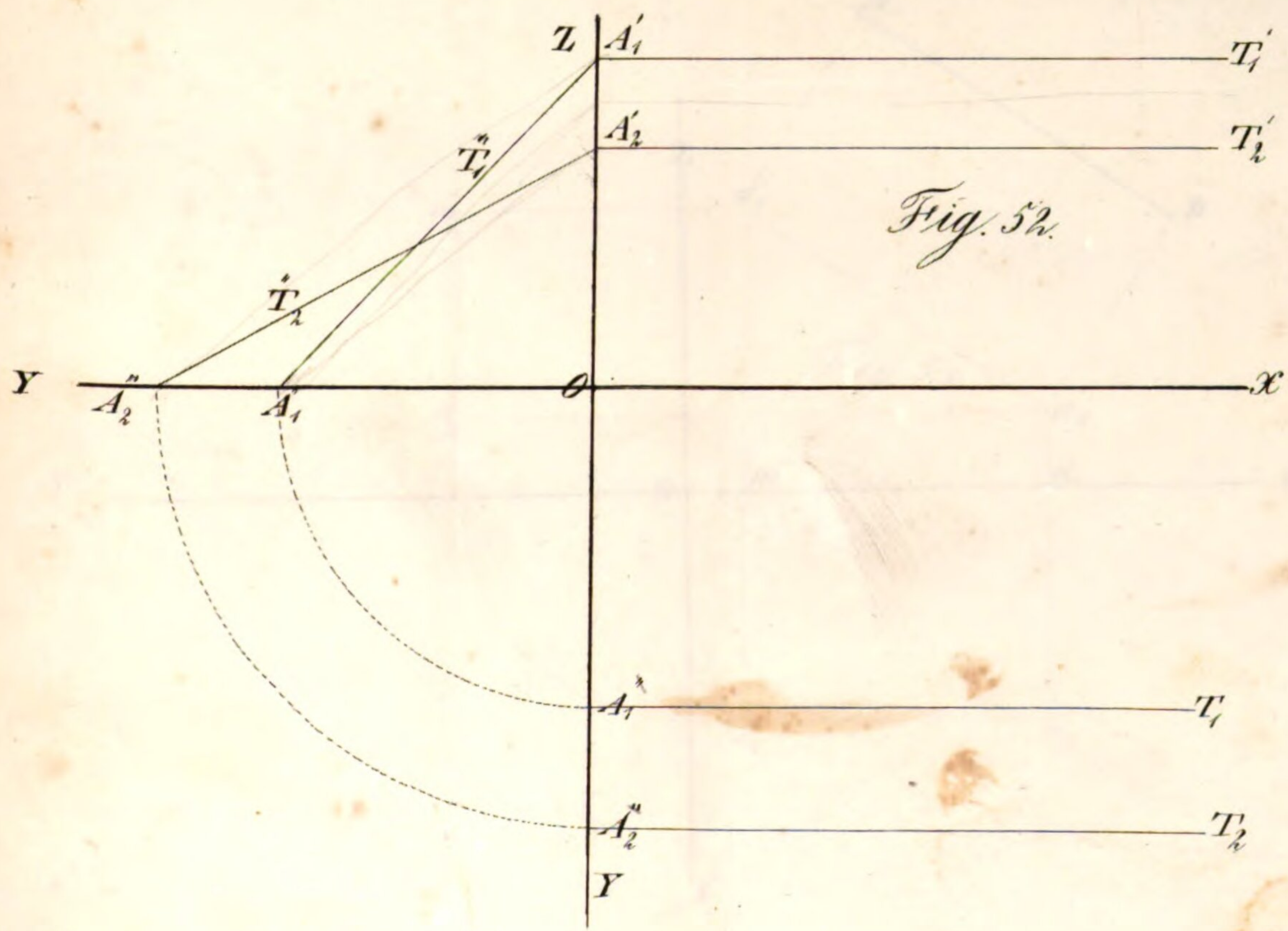
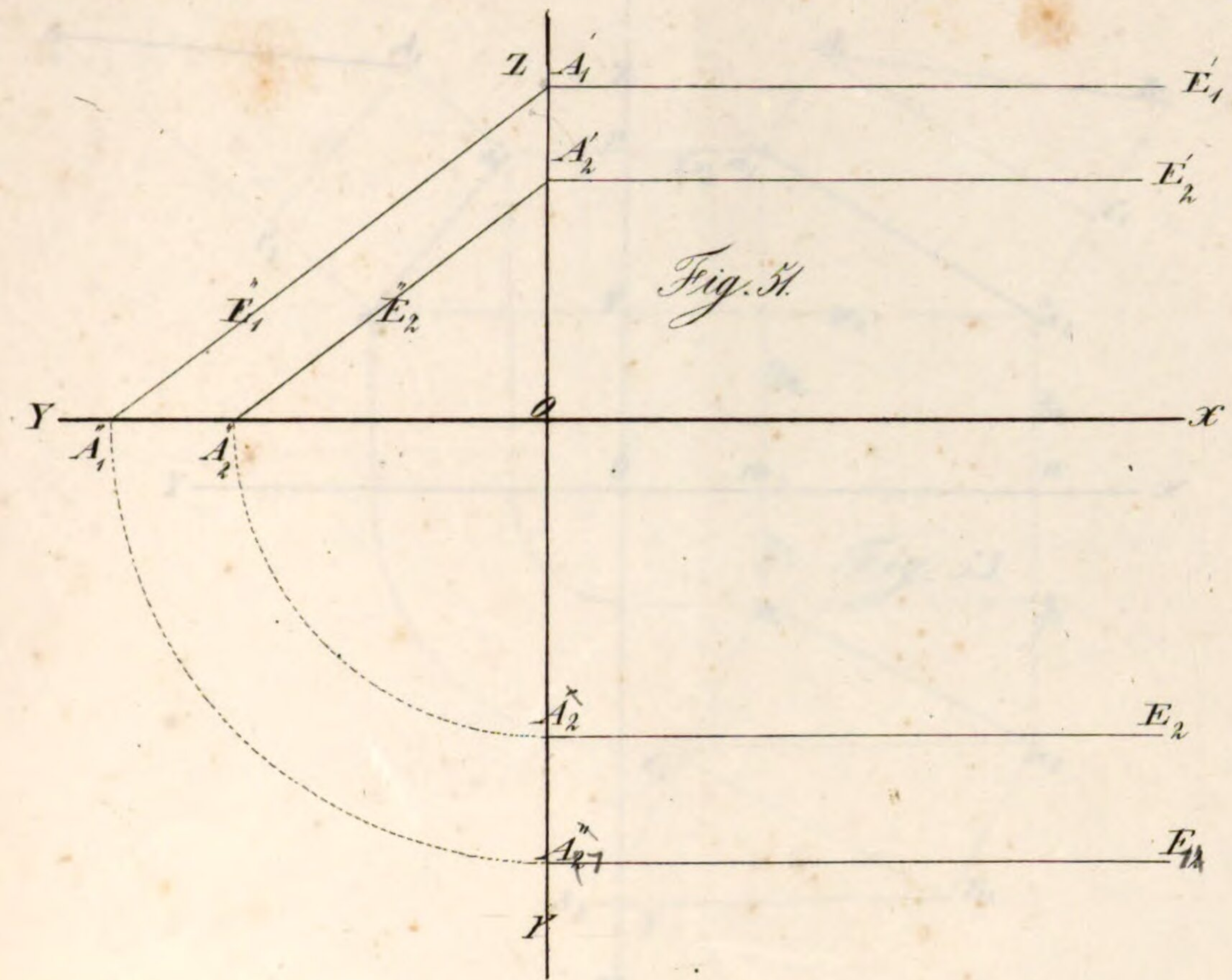


24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

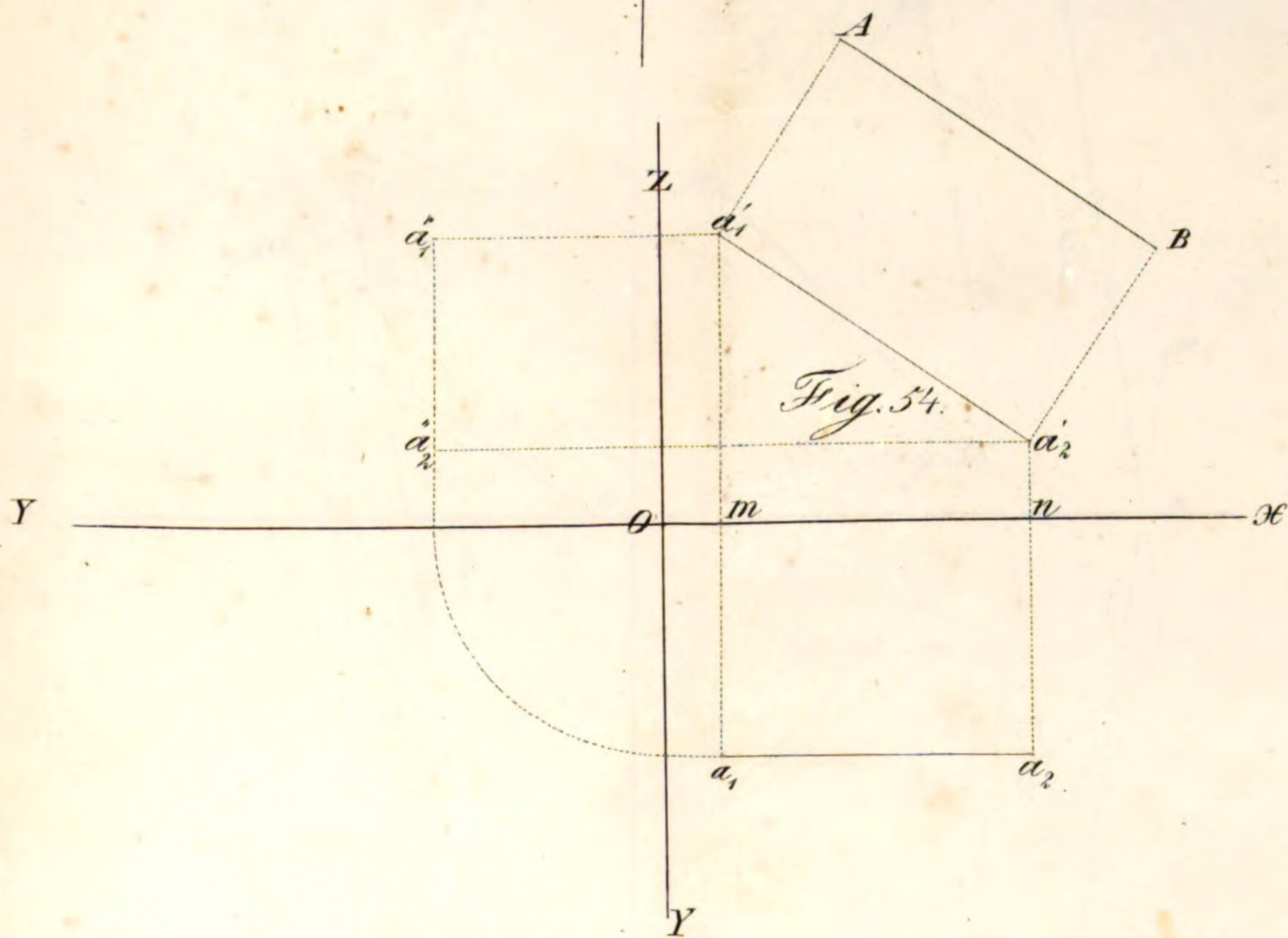
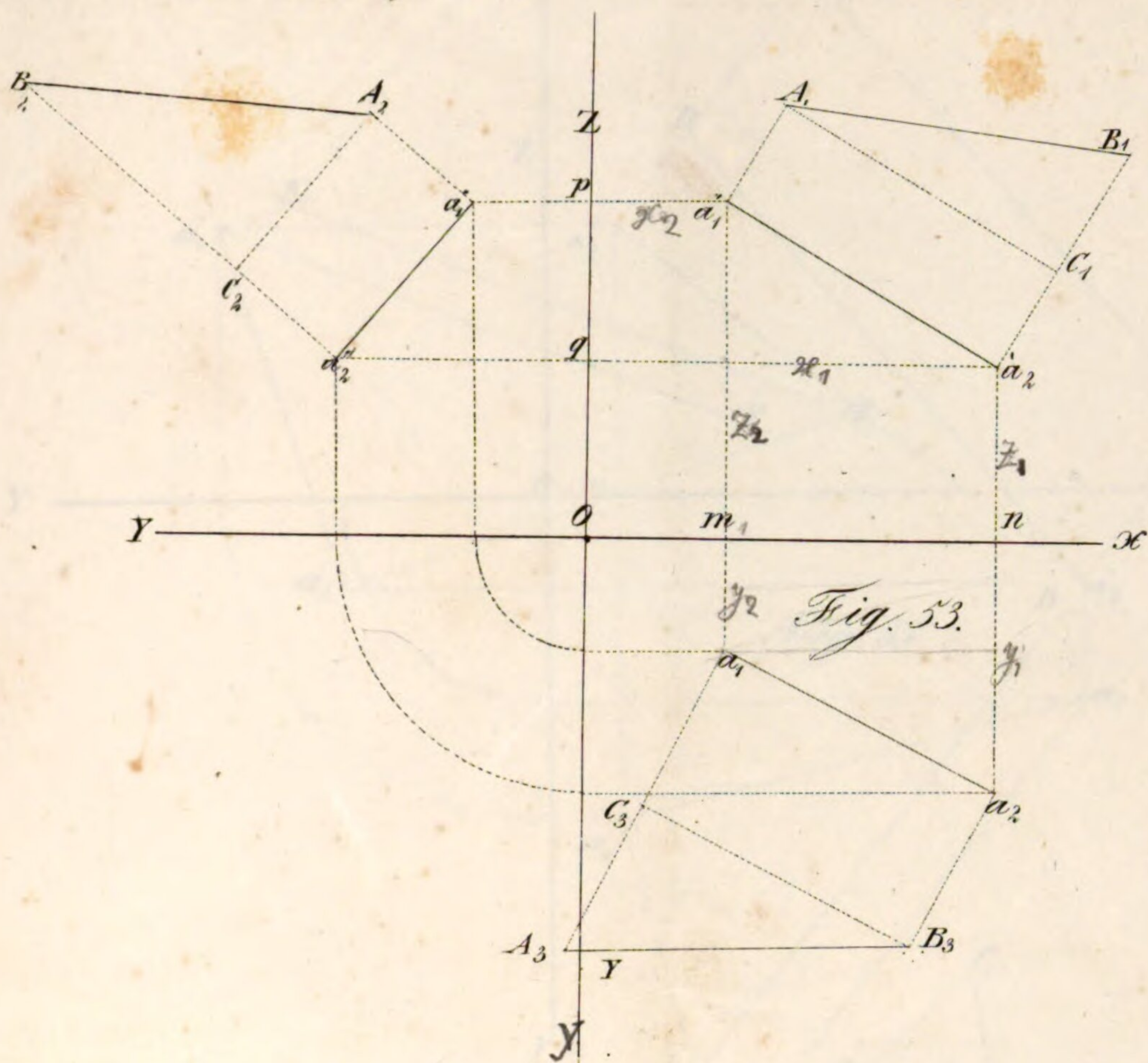
Fig. 48.

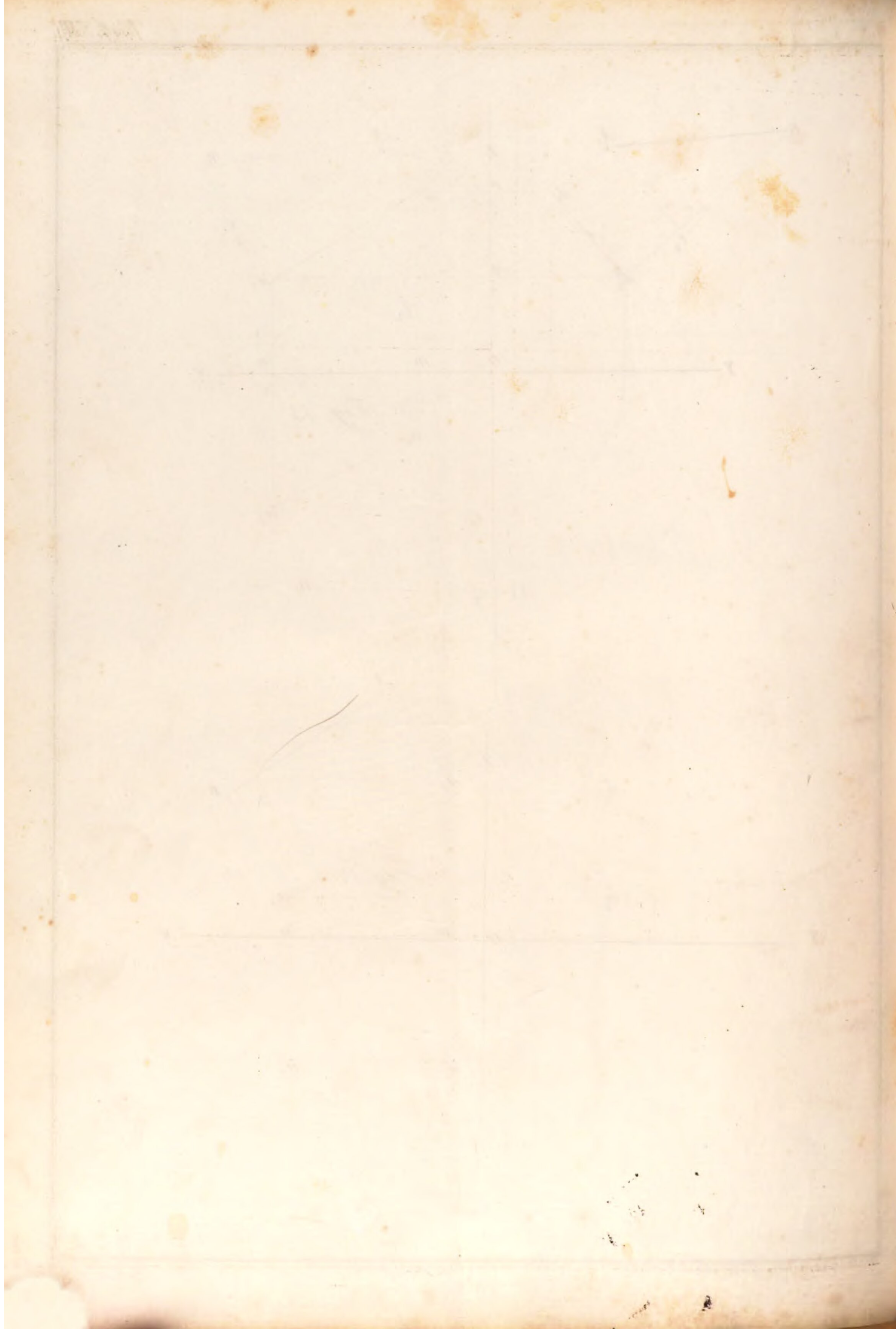


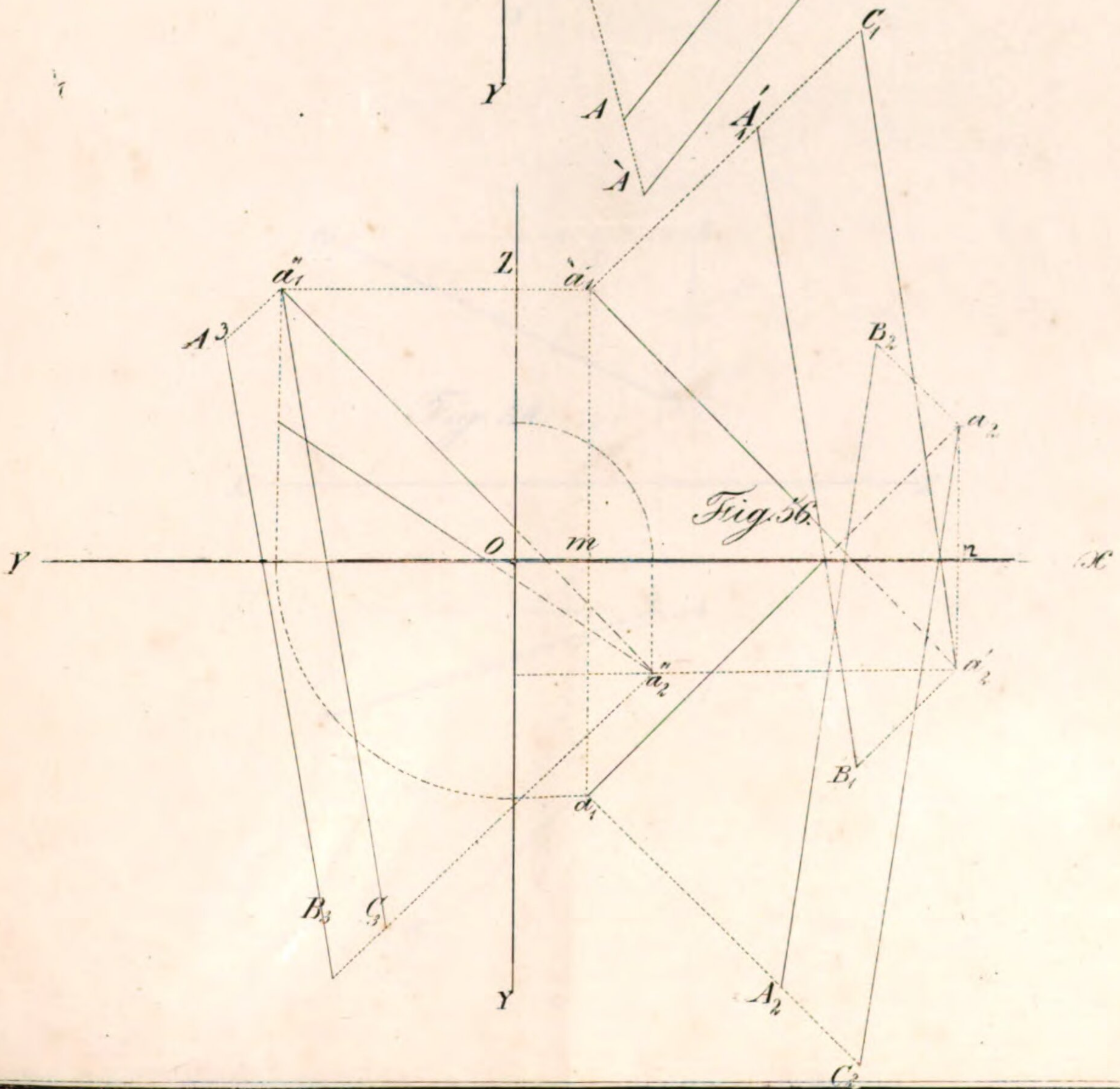
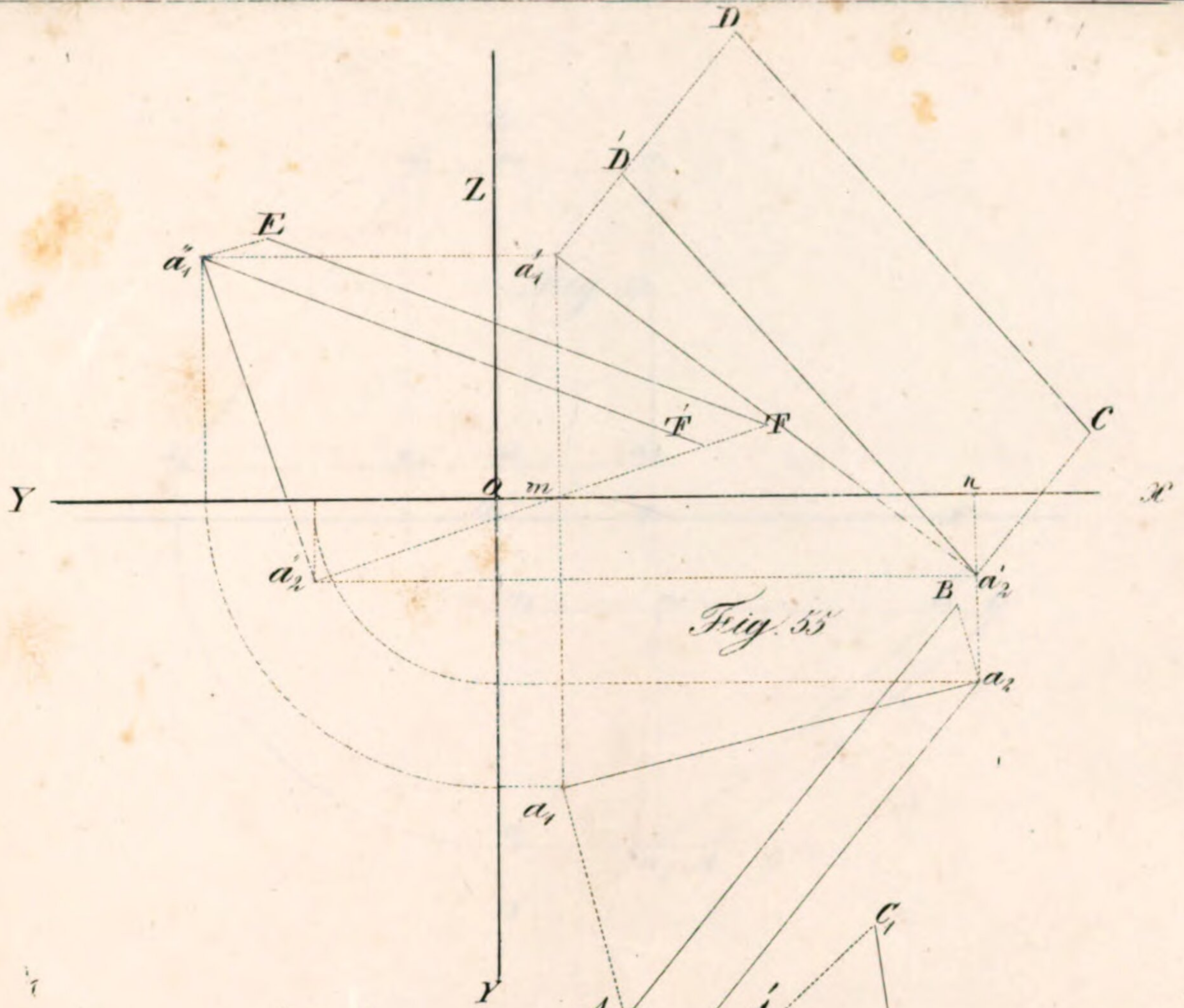


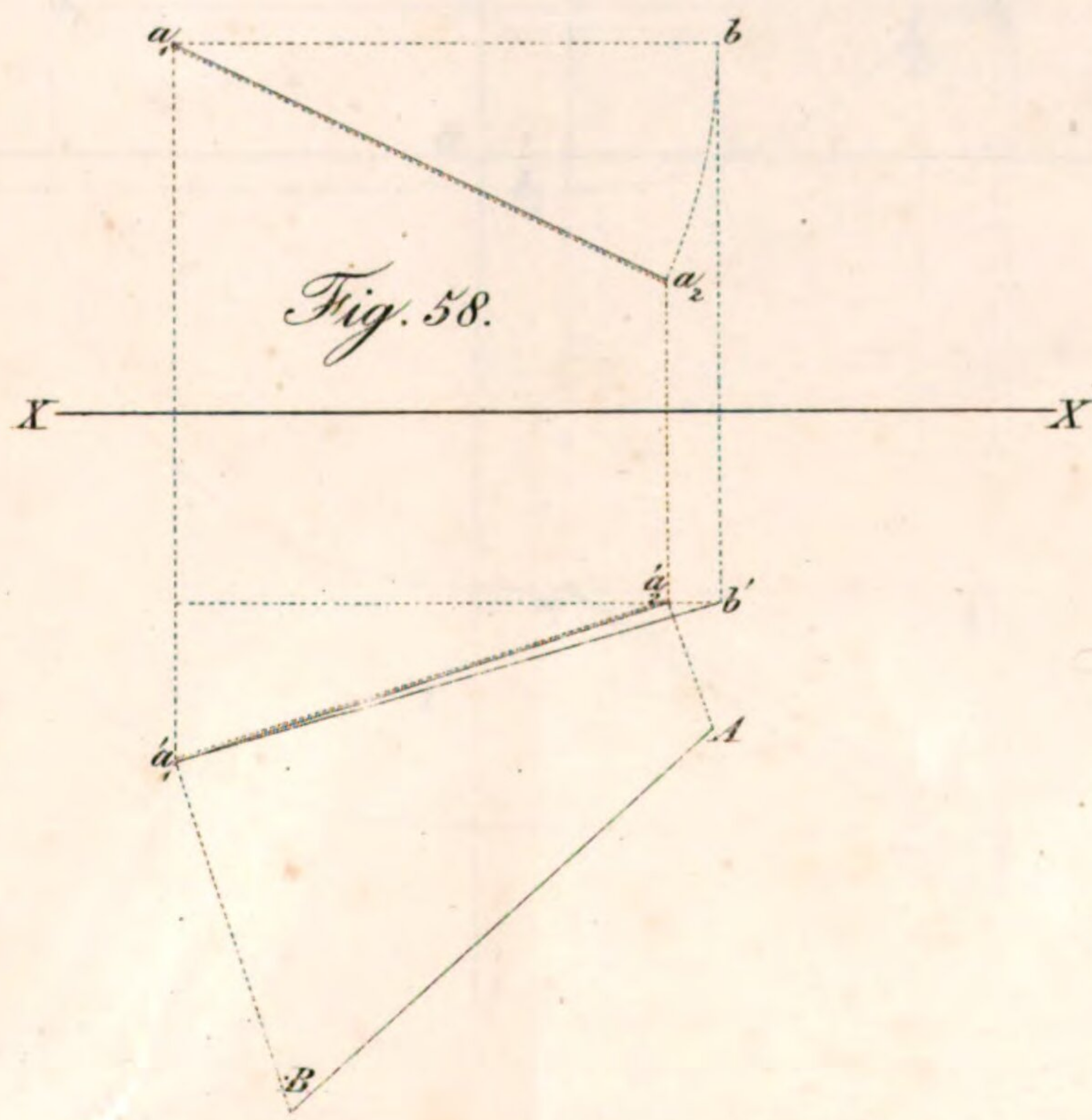
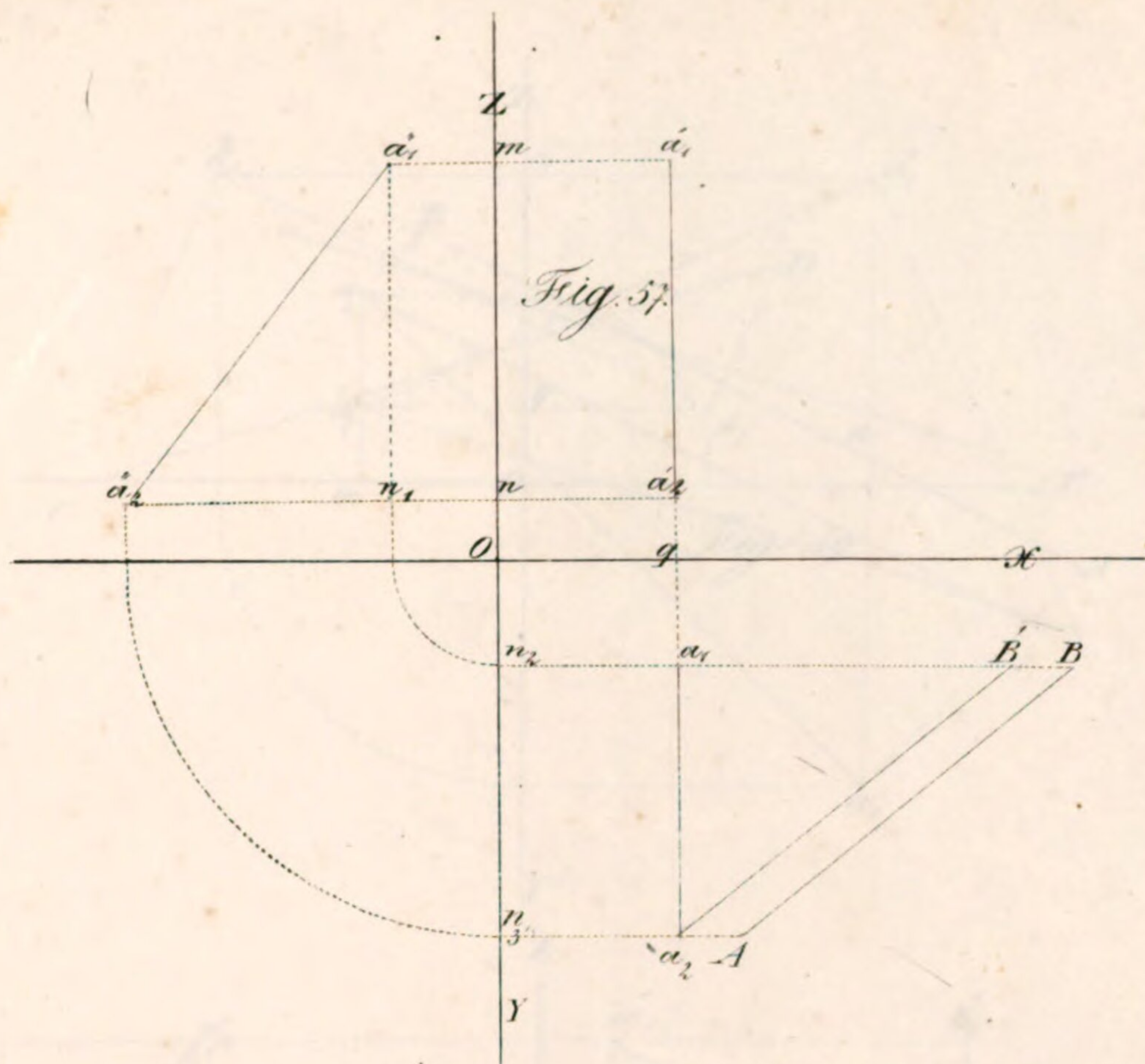




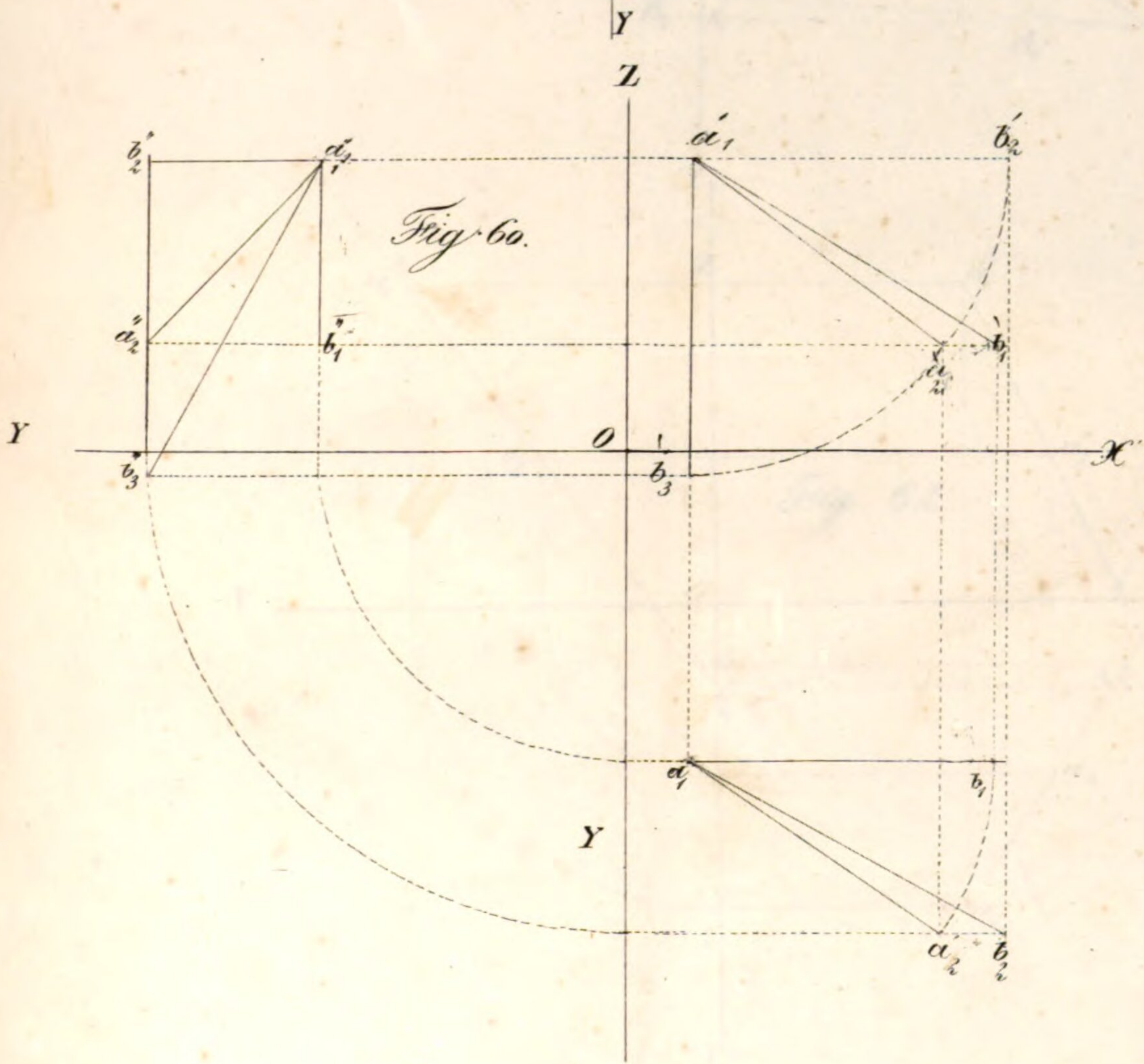
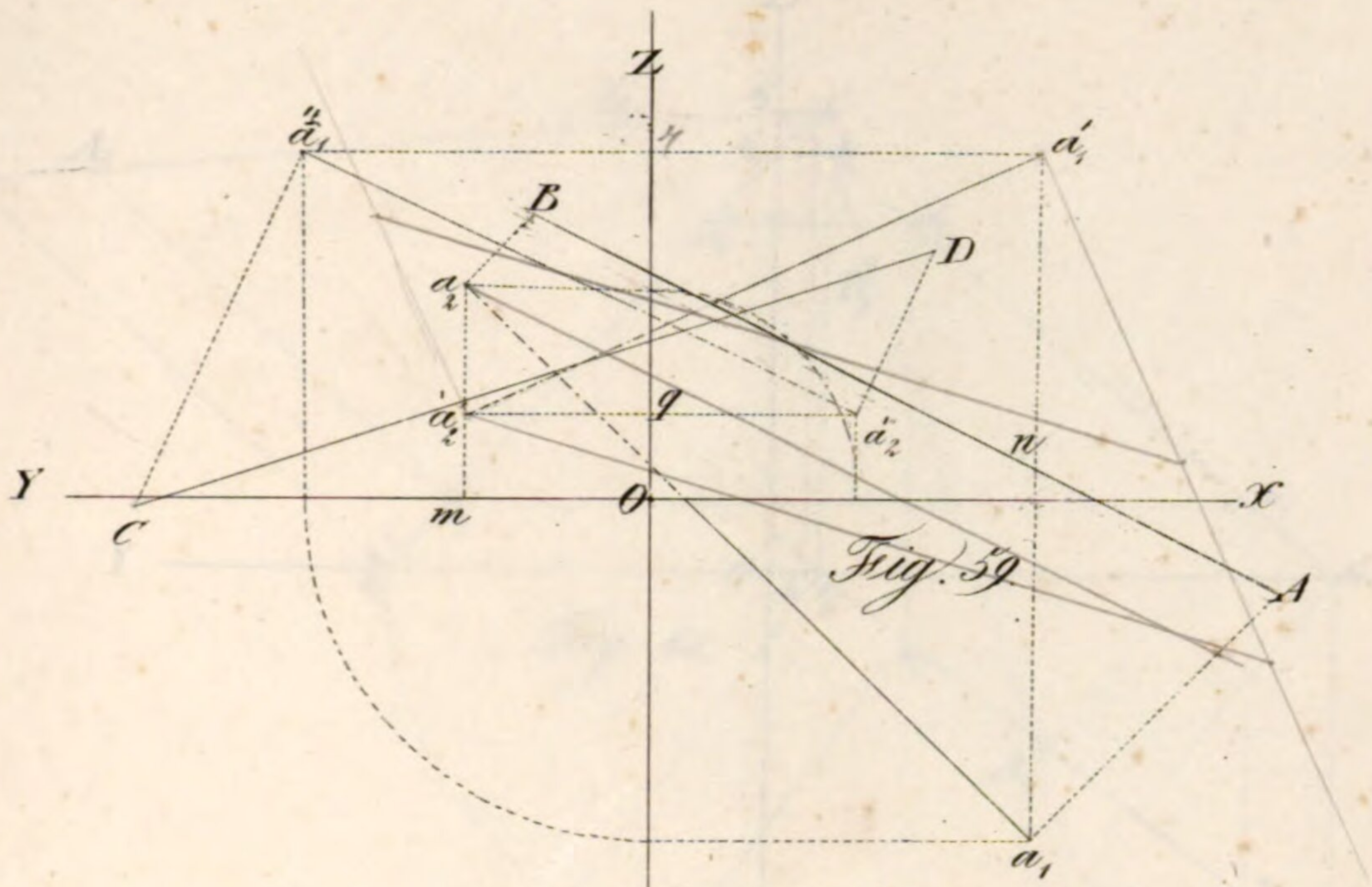


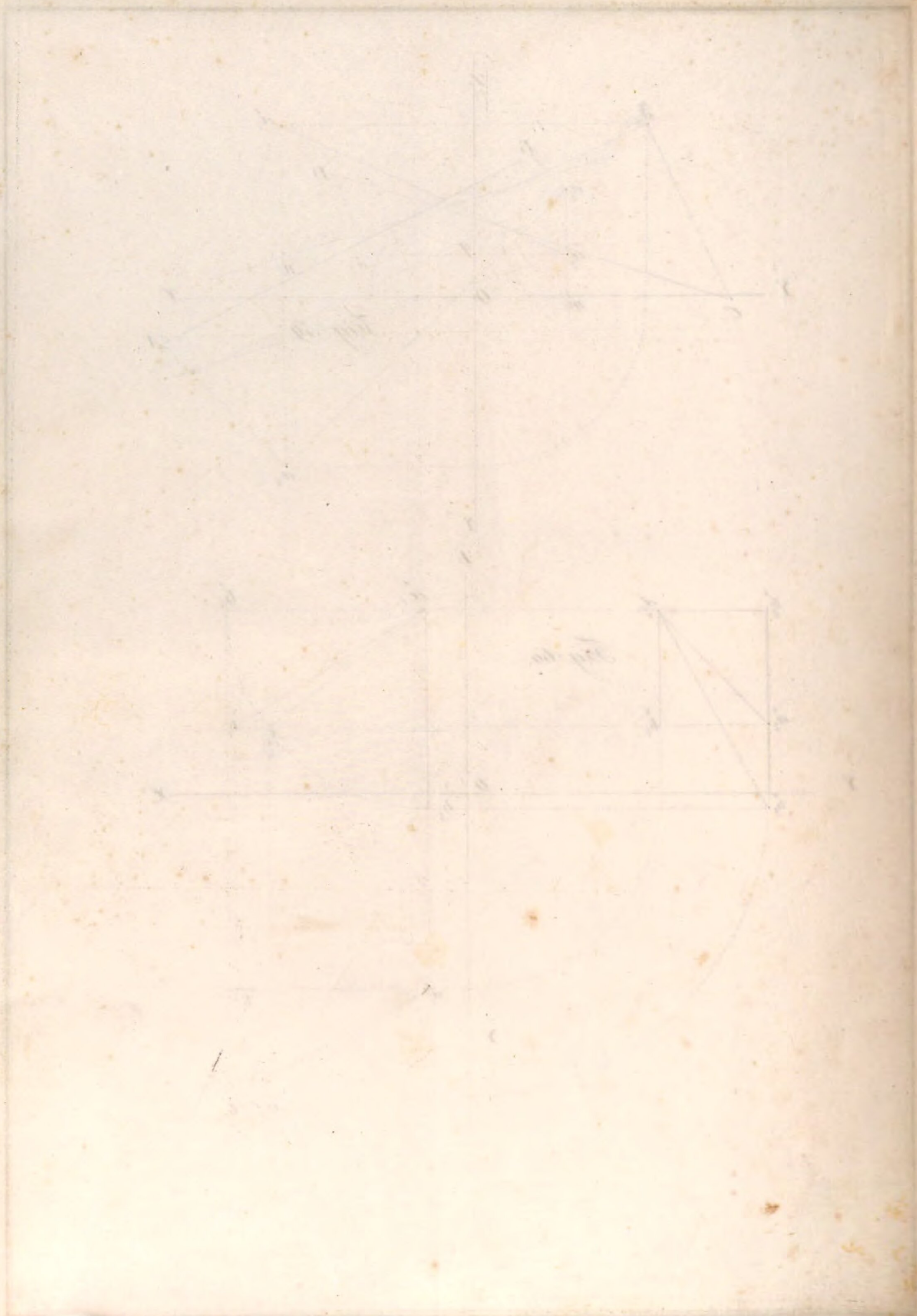


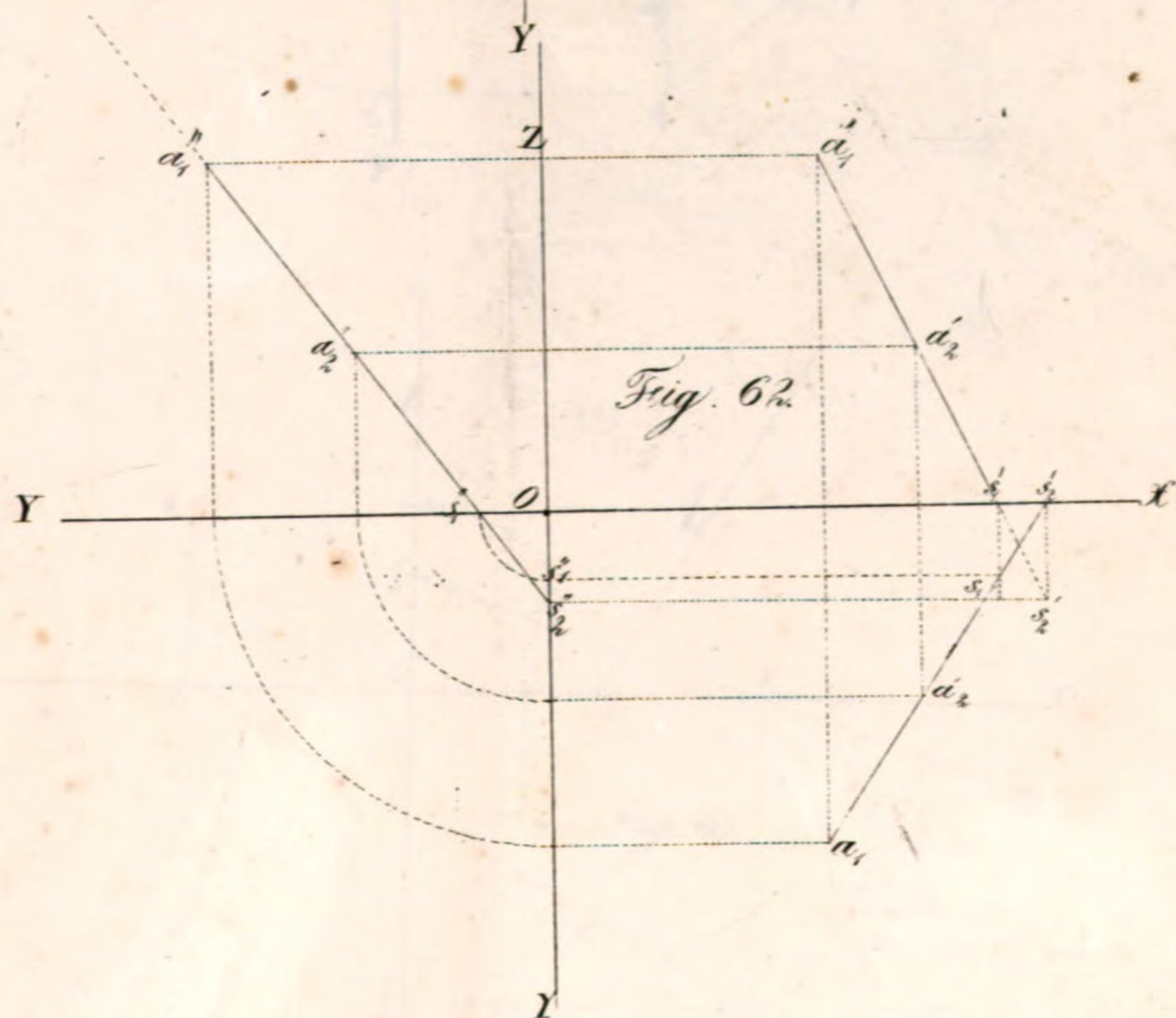
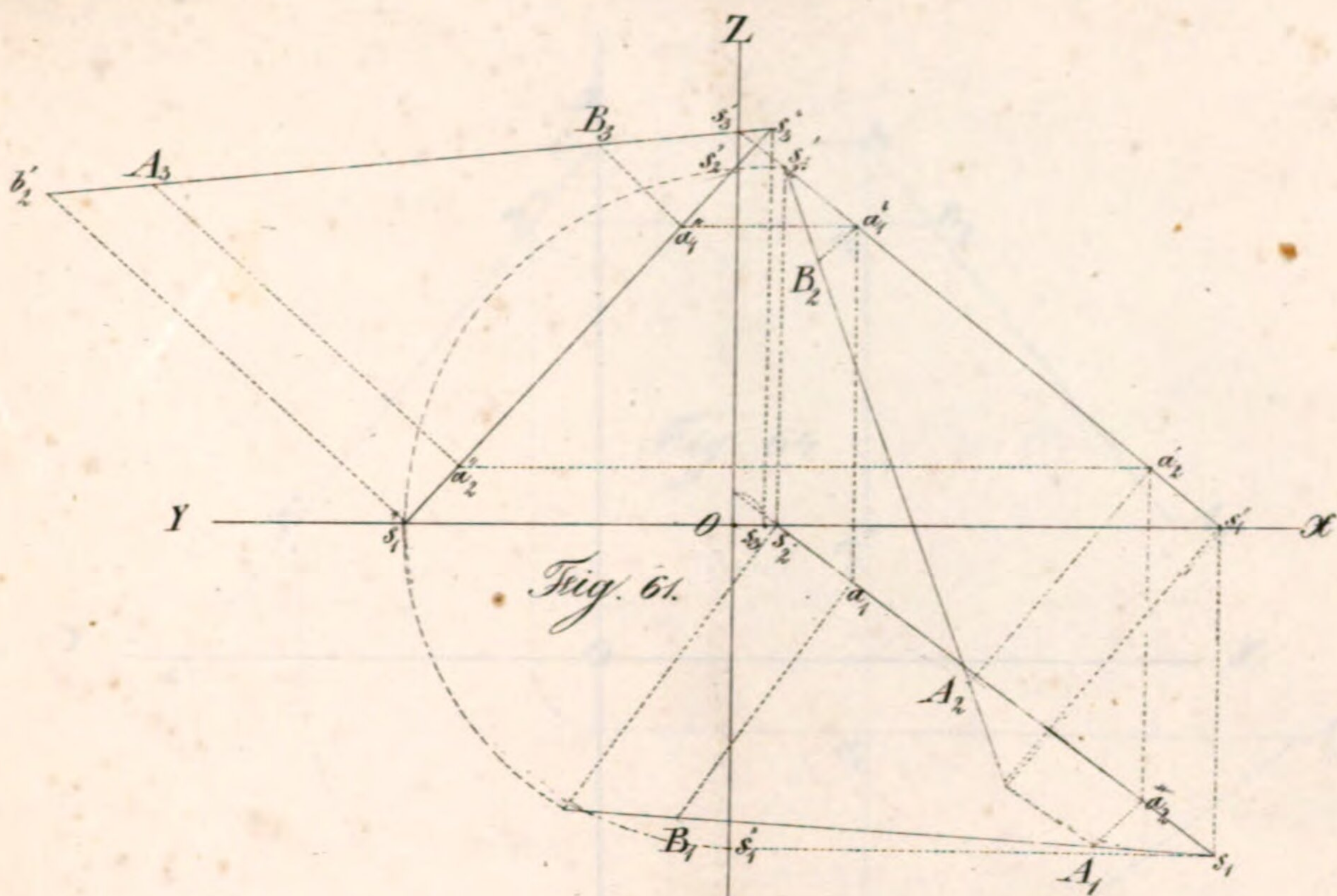


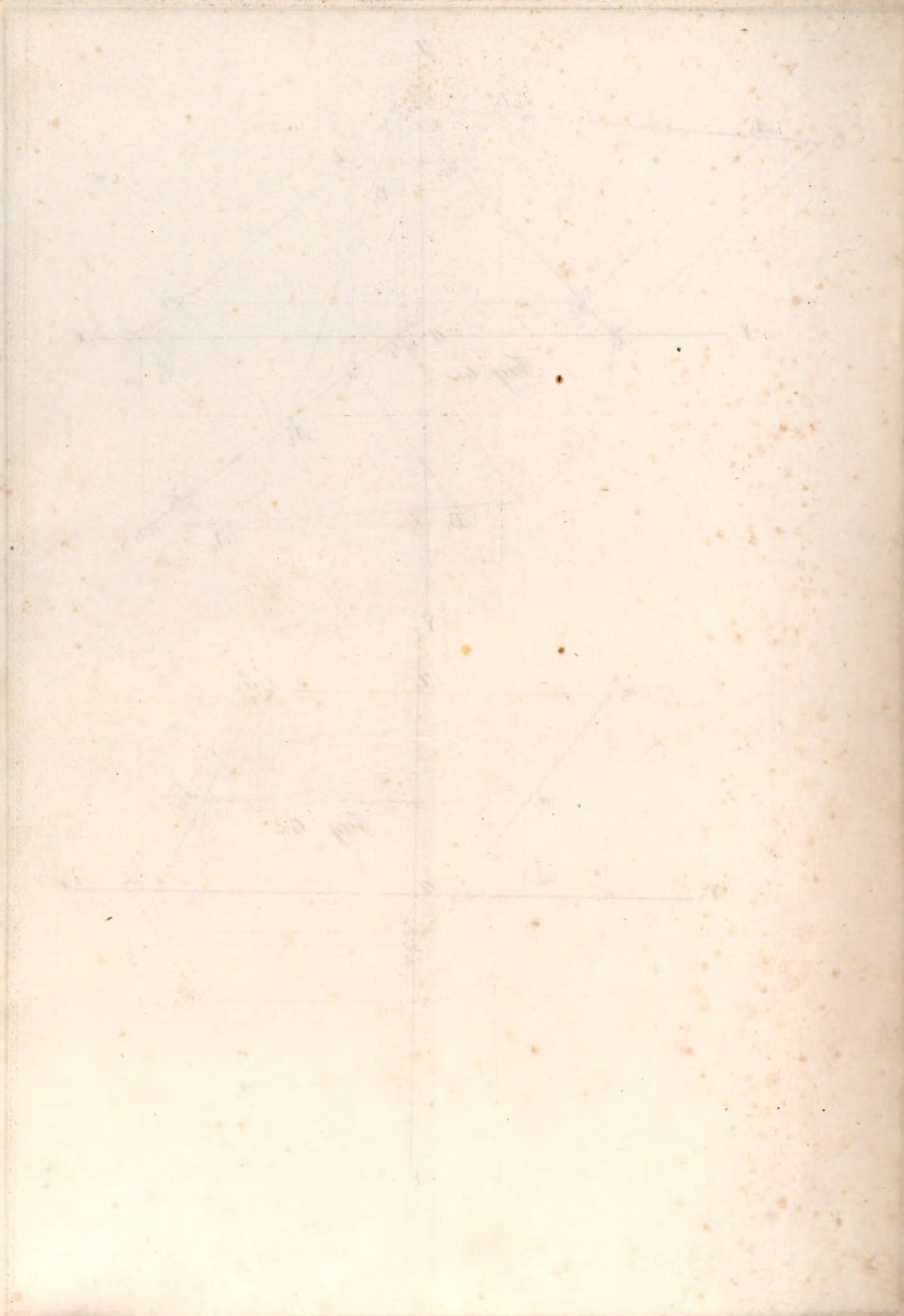


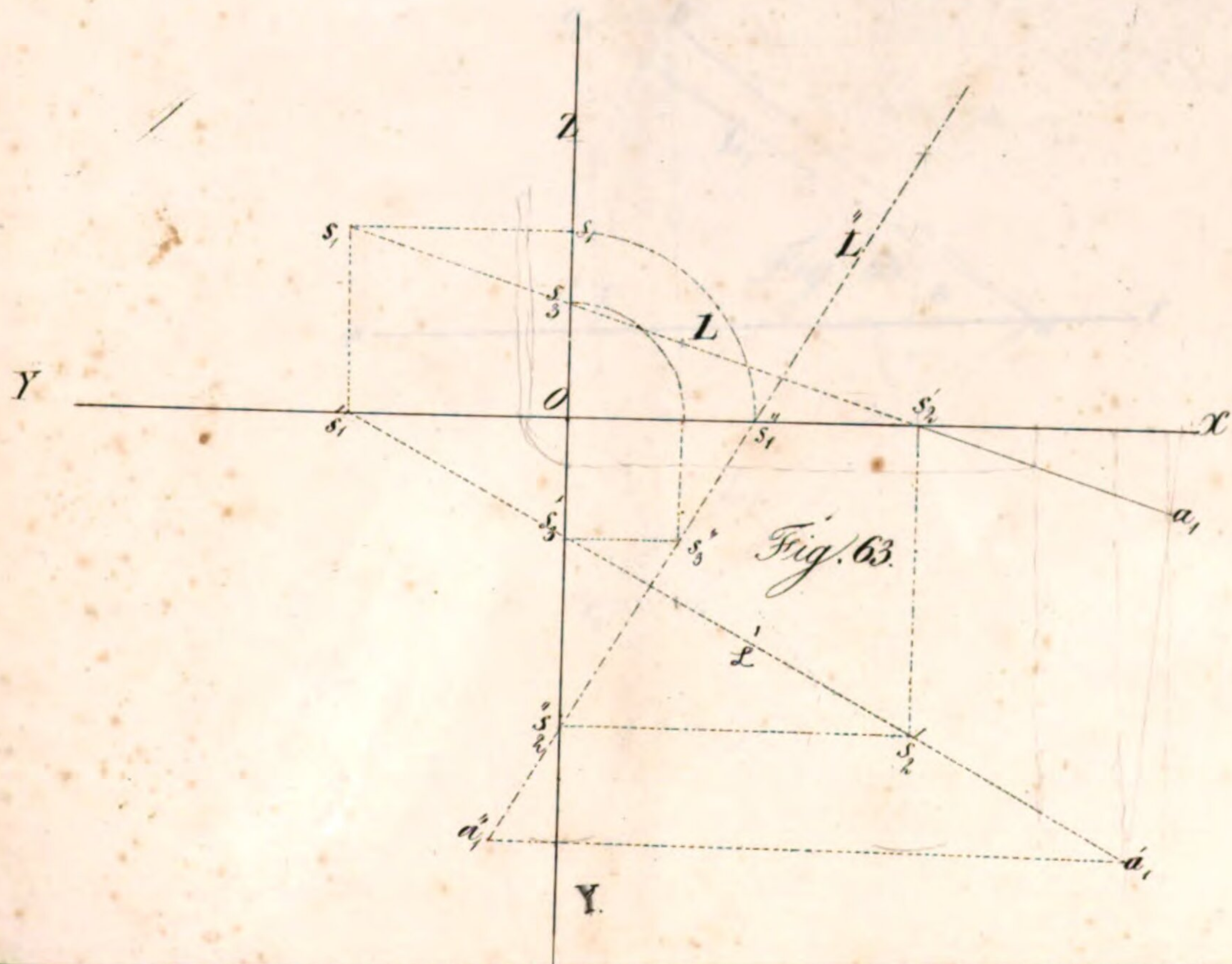
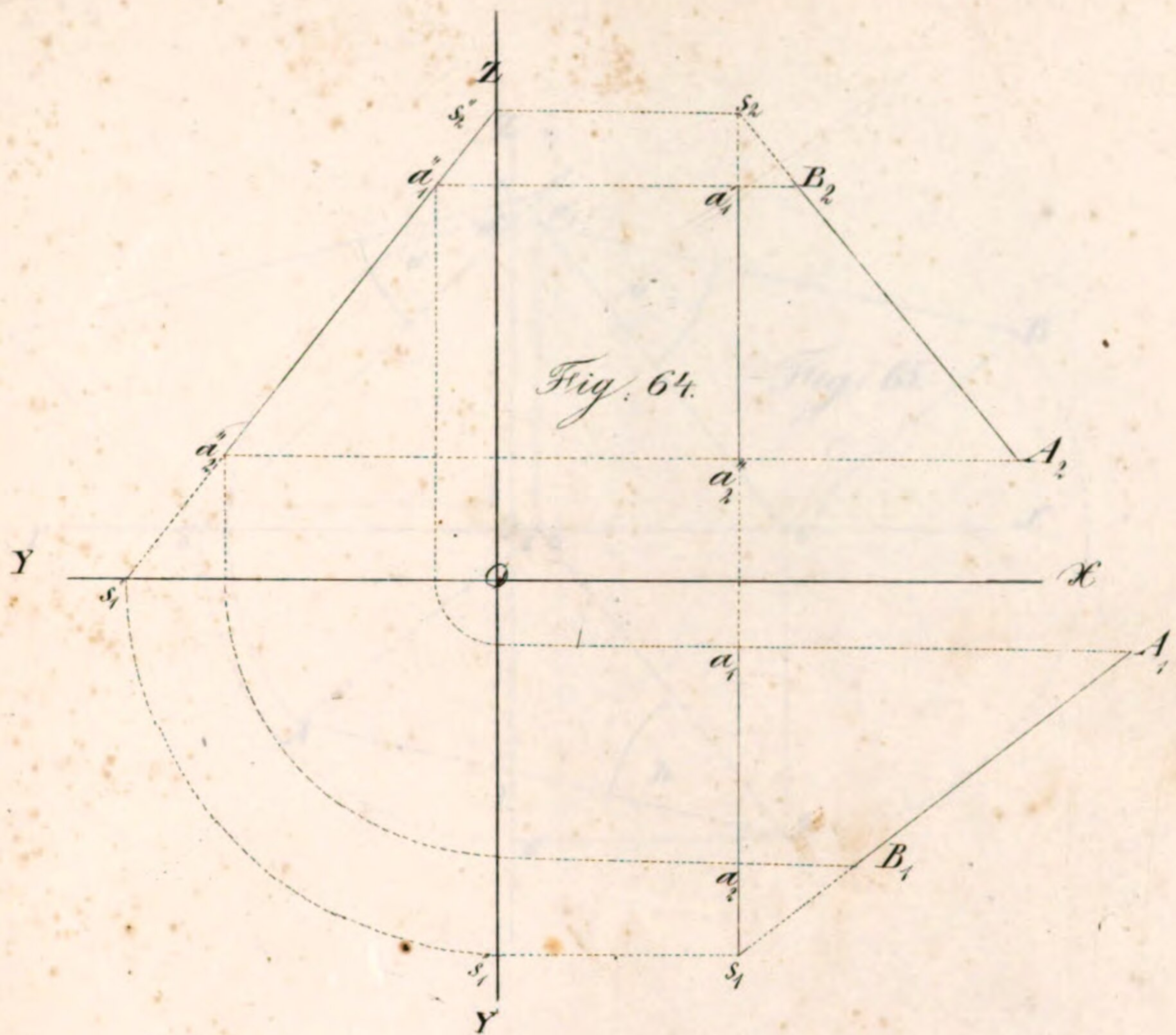


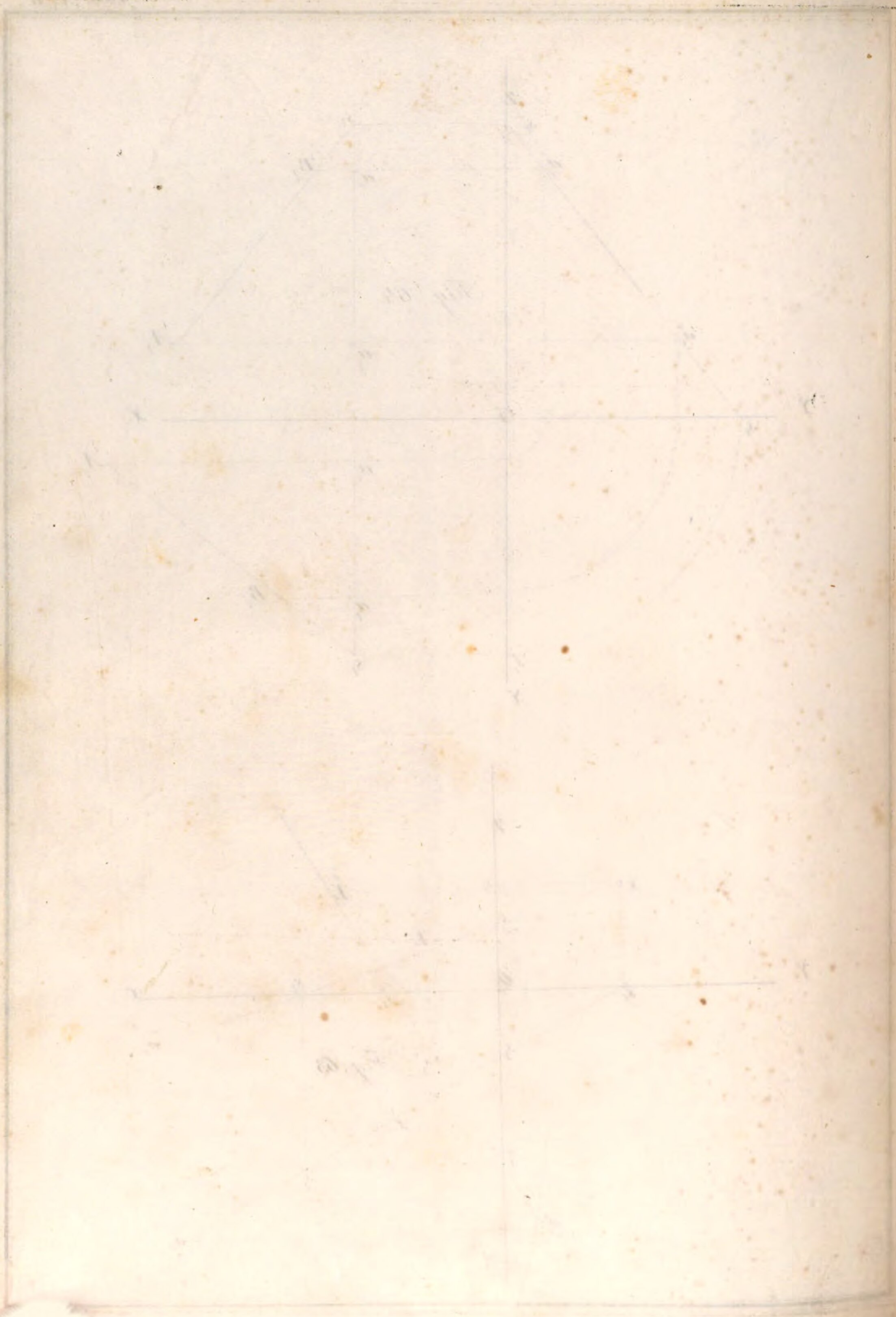


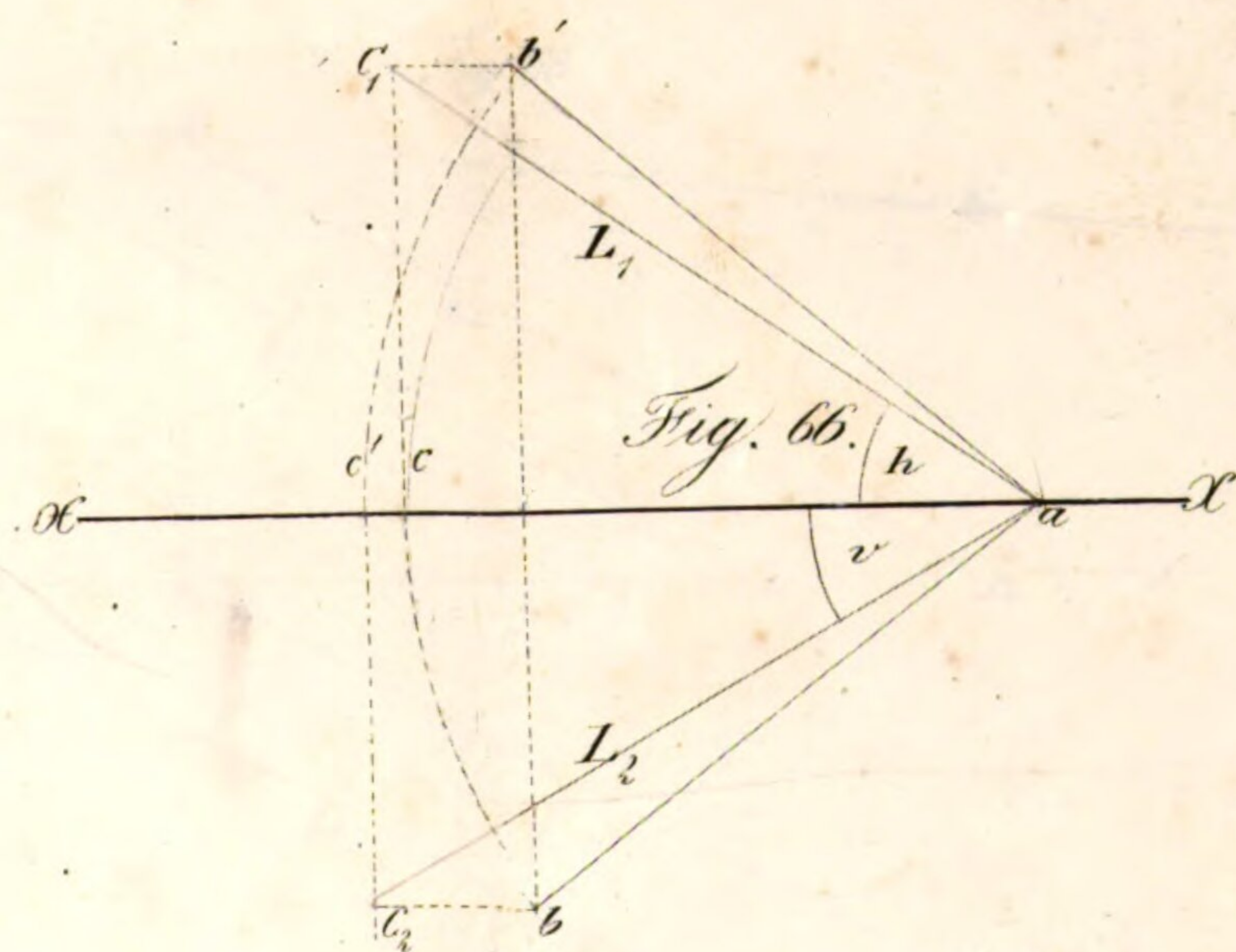
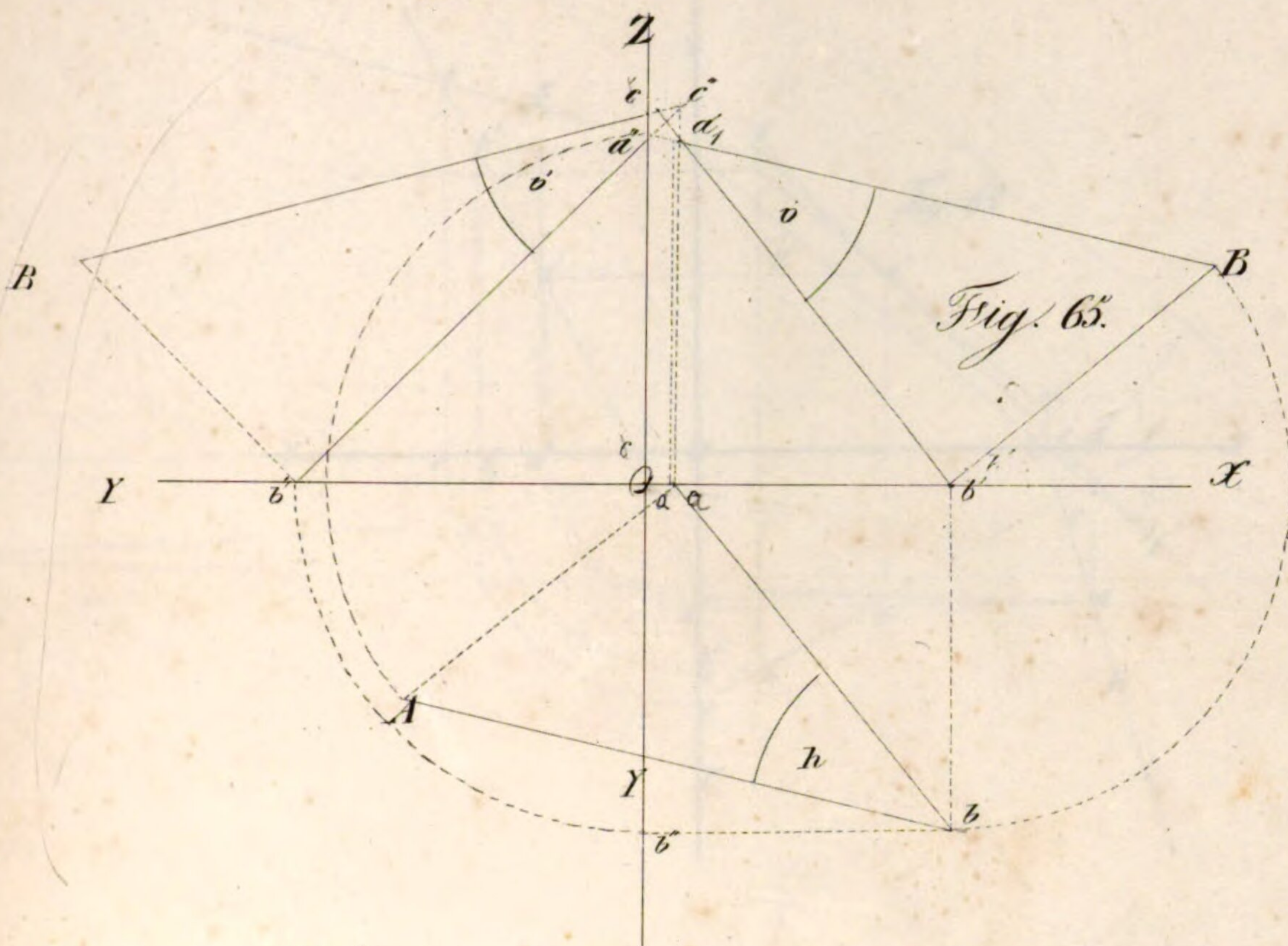


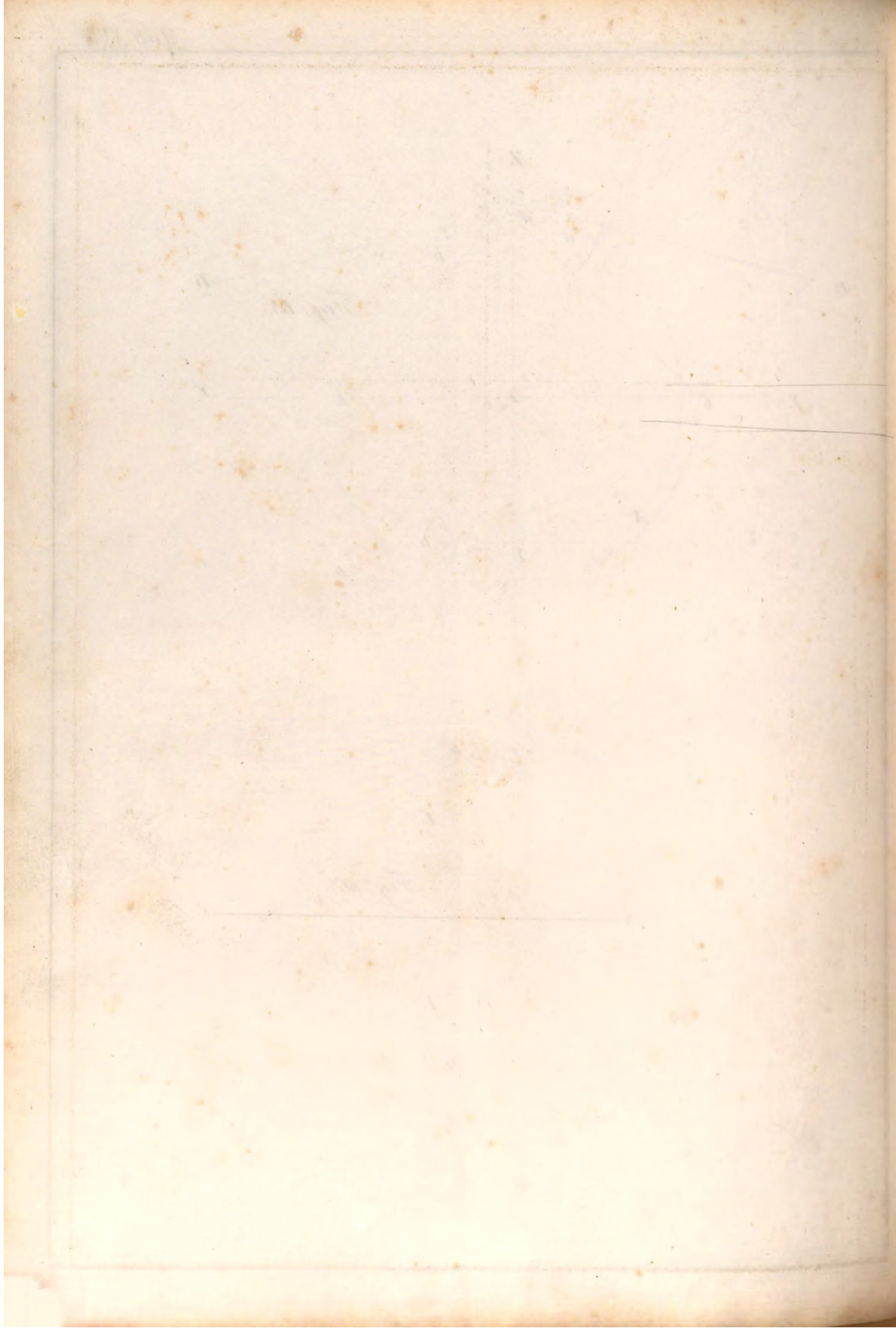


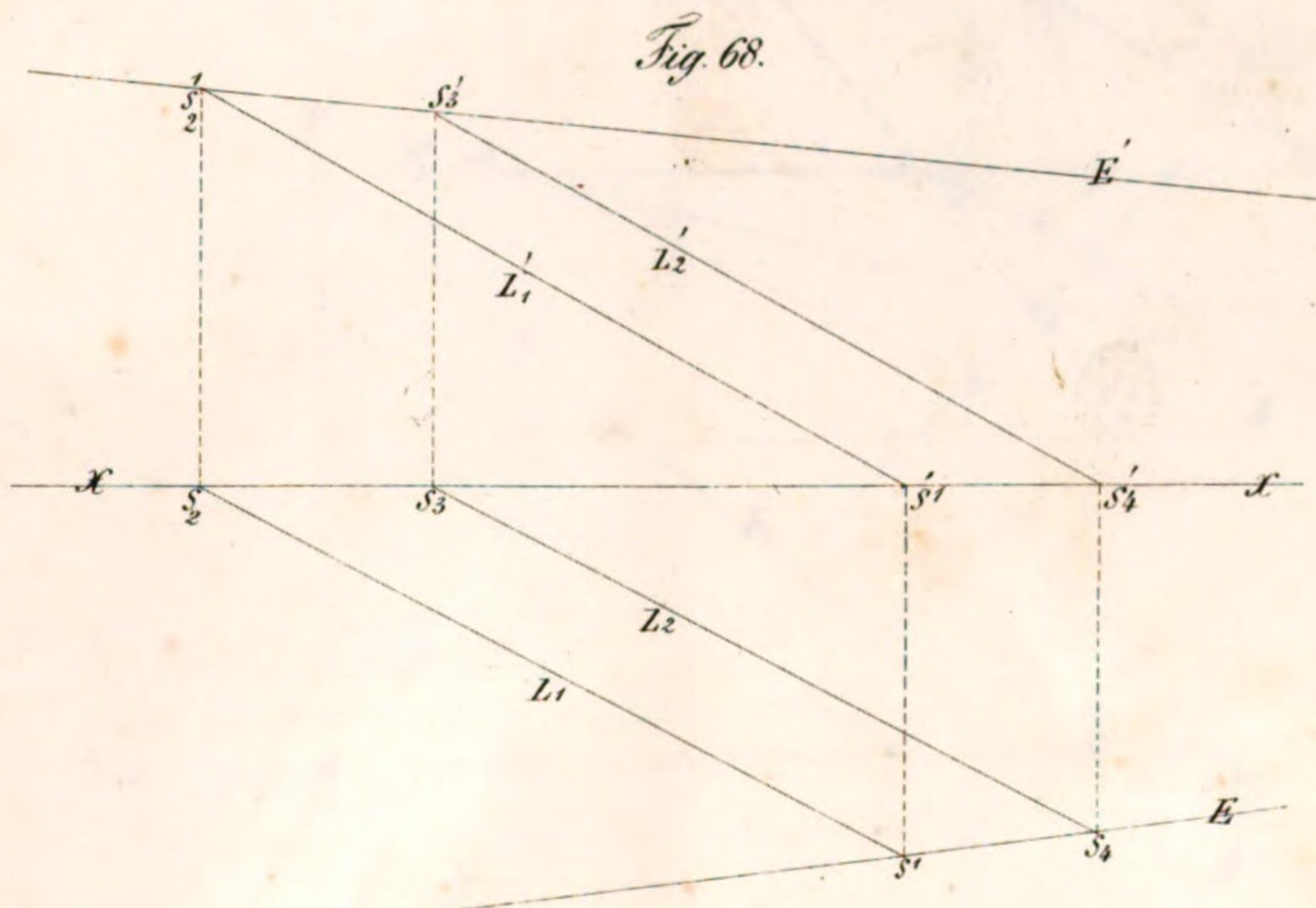
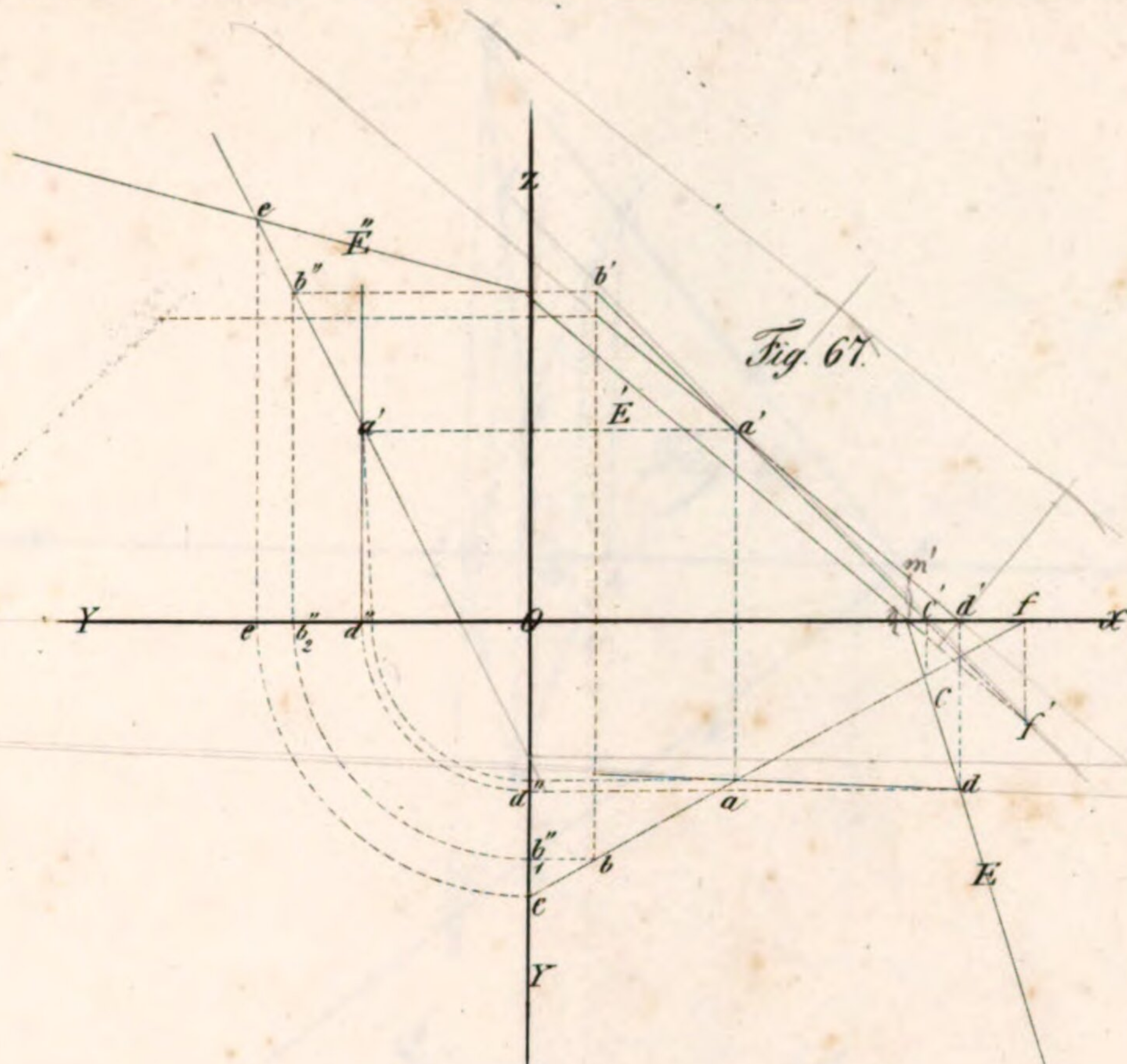














171

171

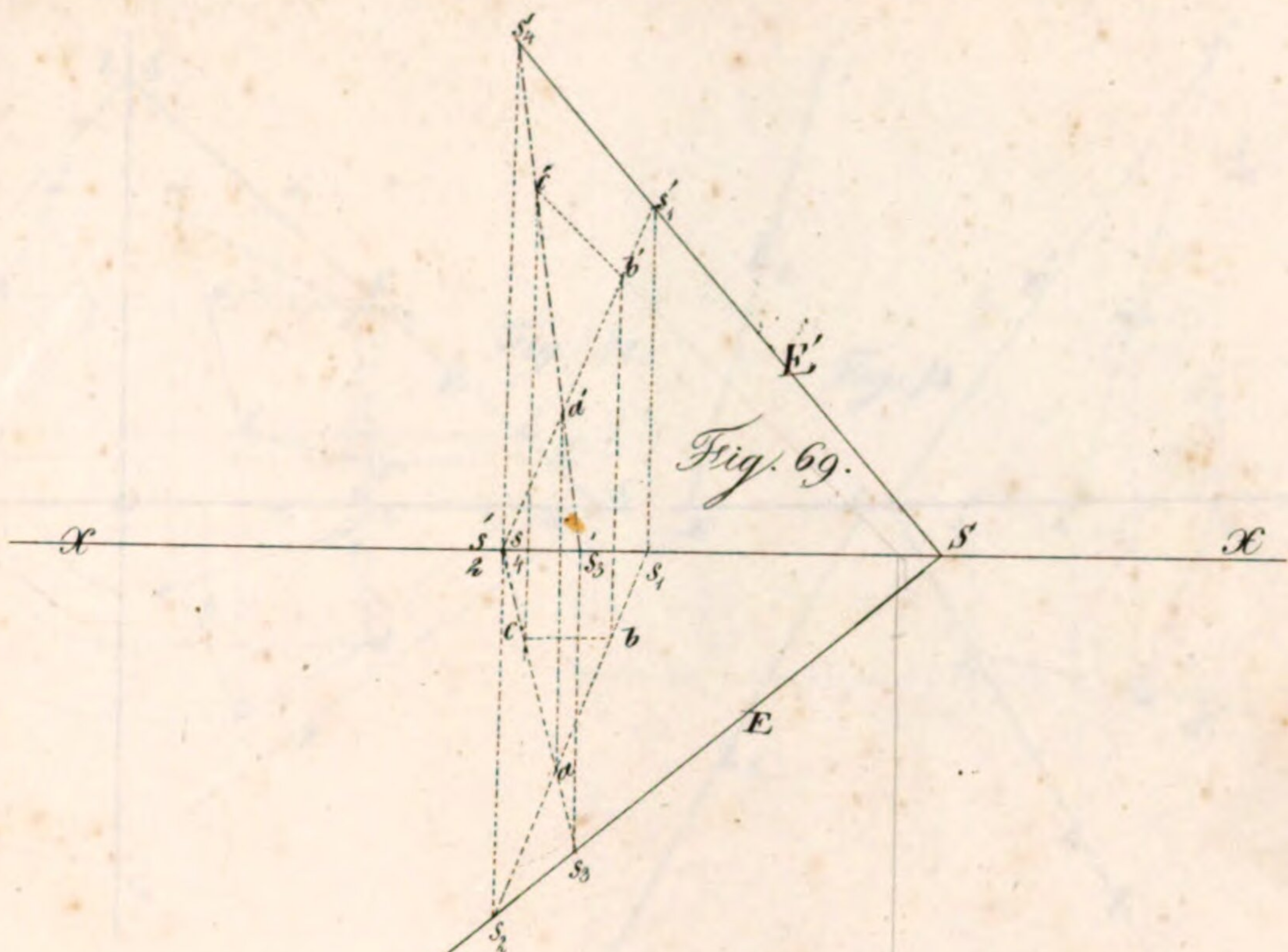


Fig. 69.

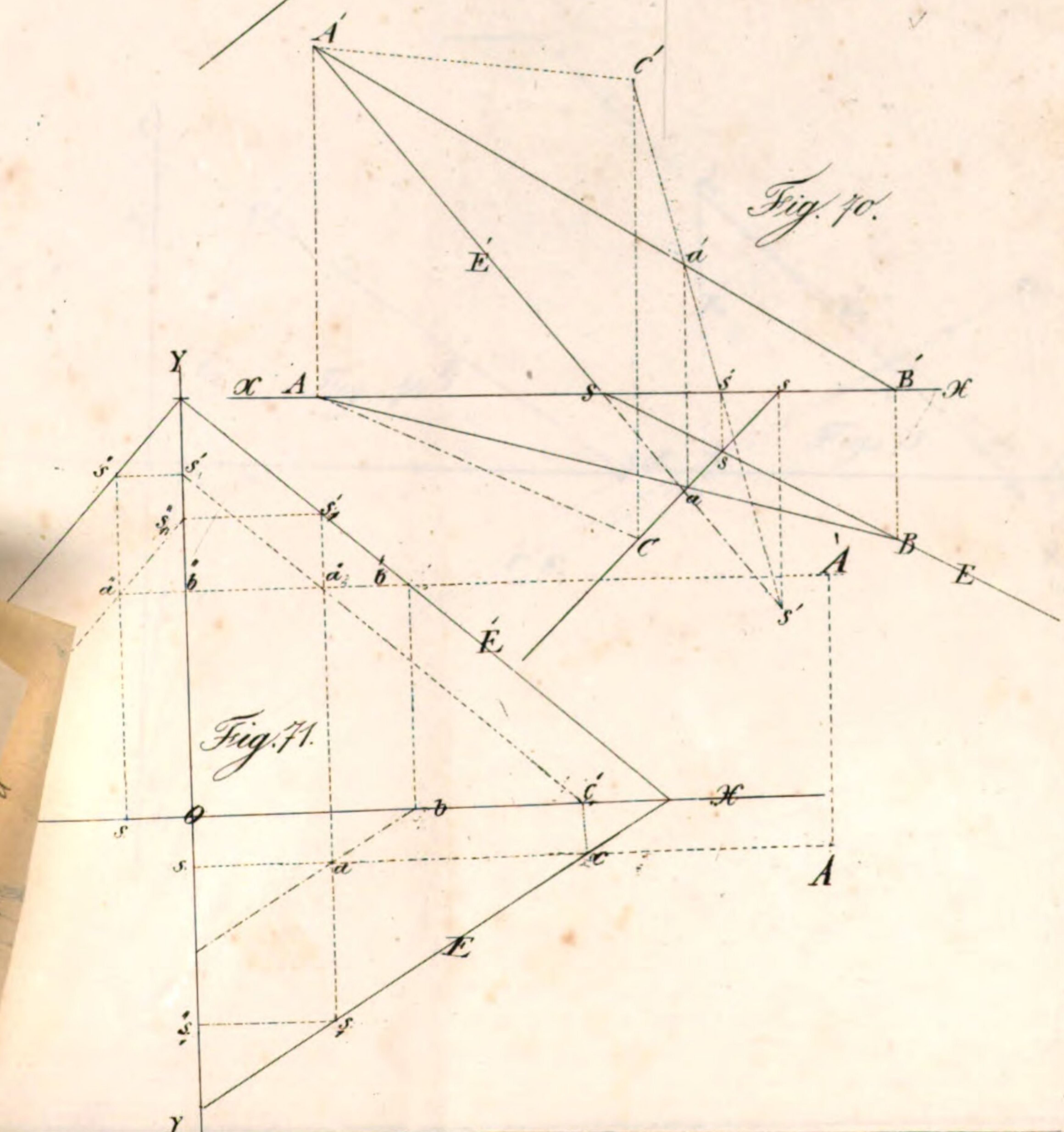
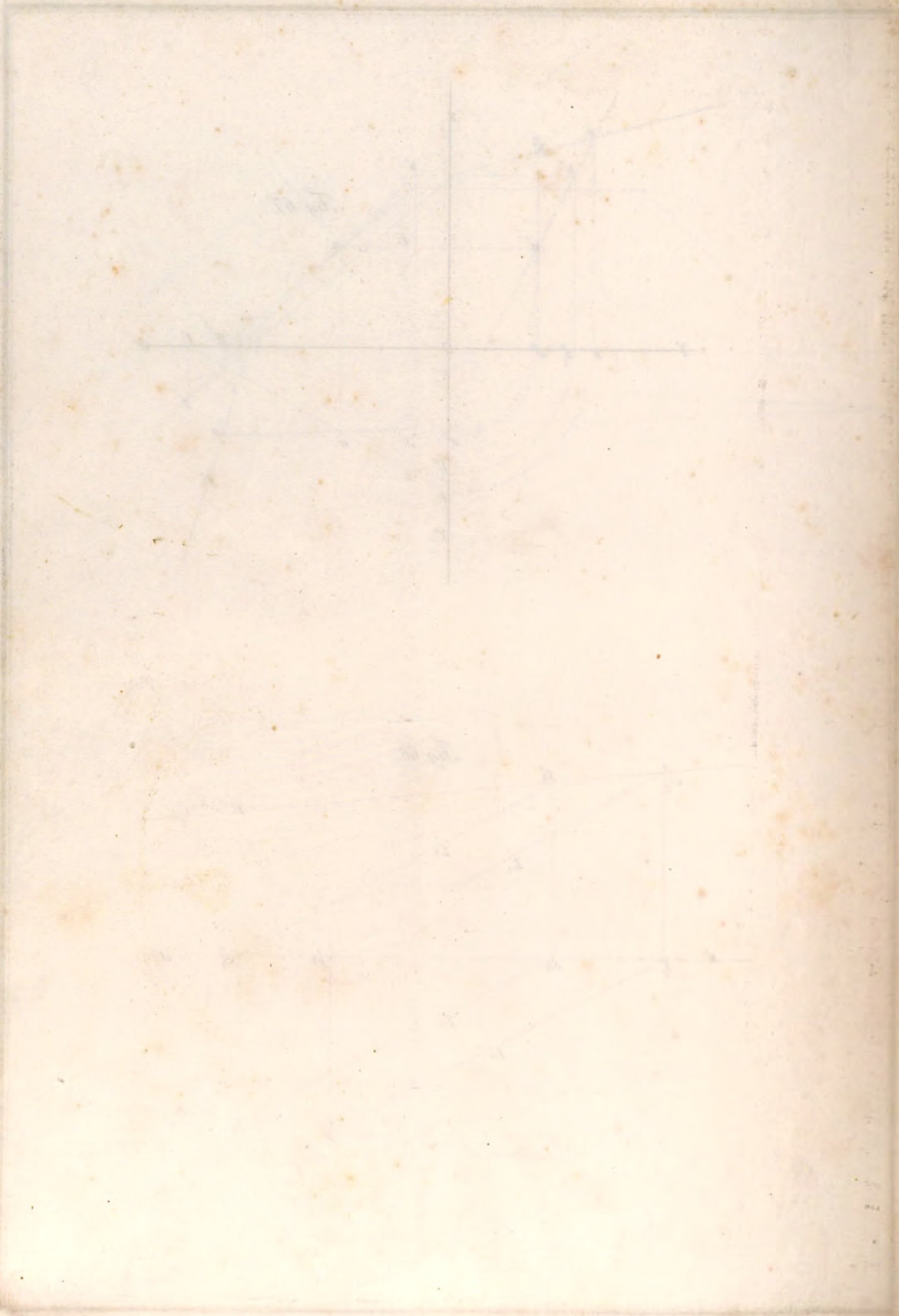
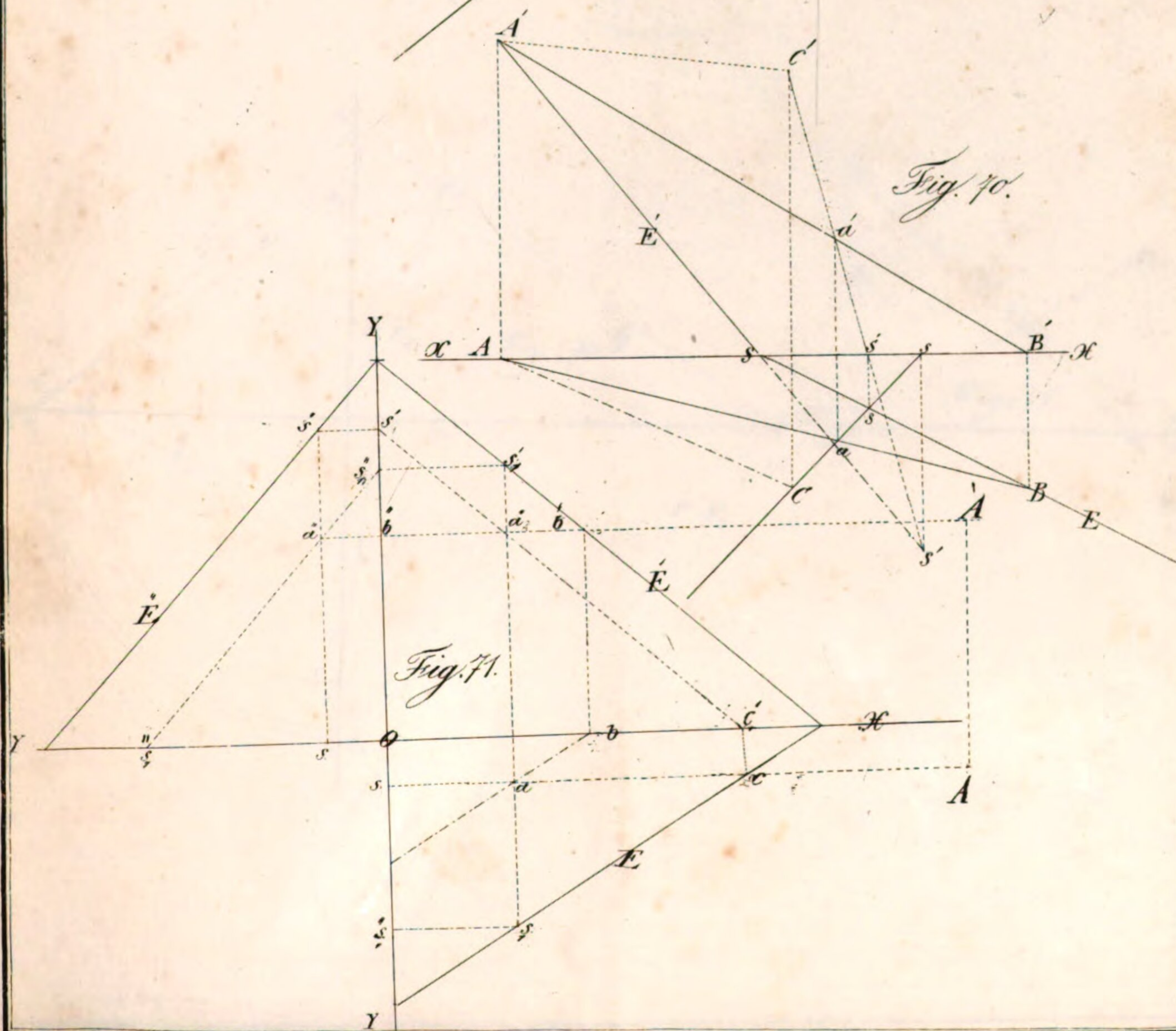
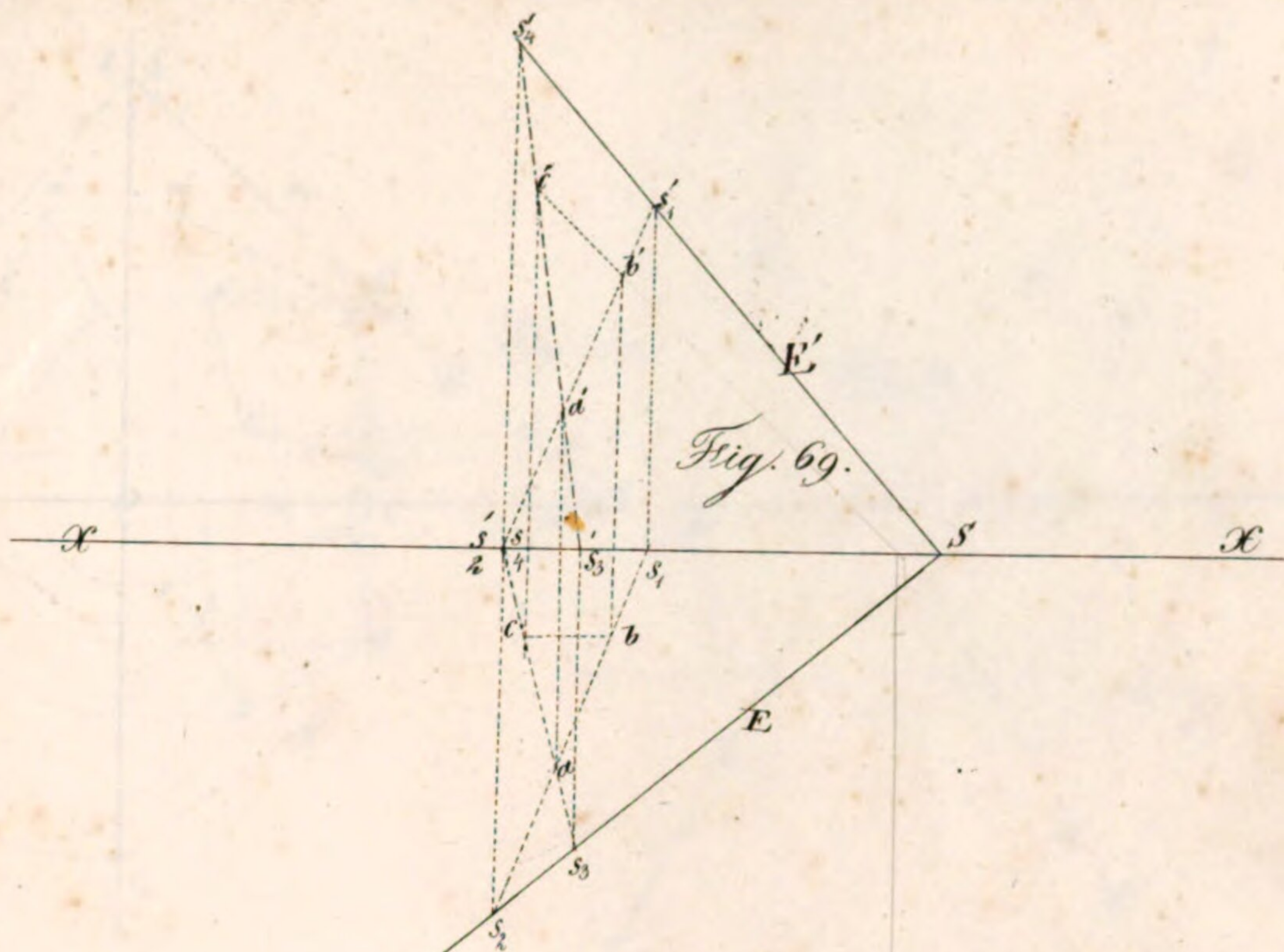
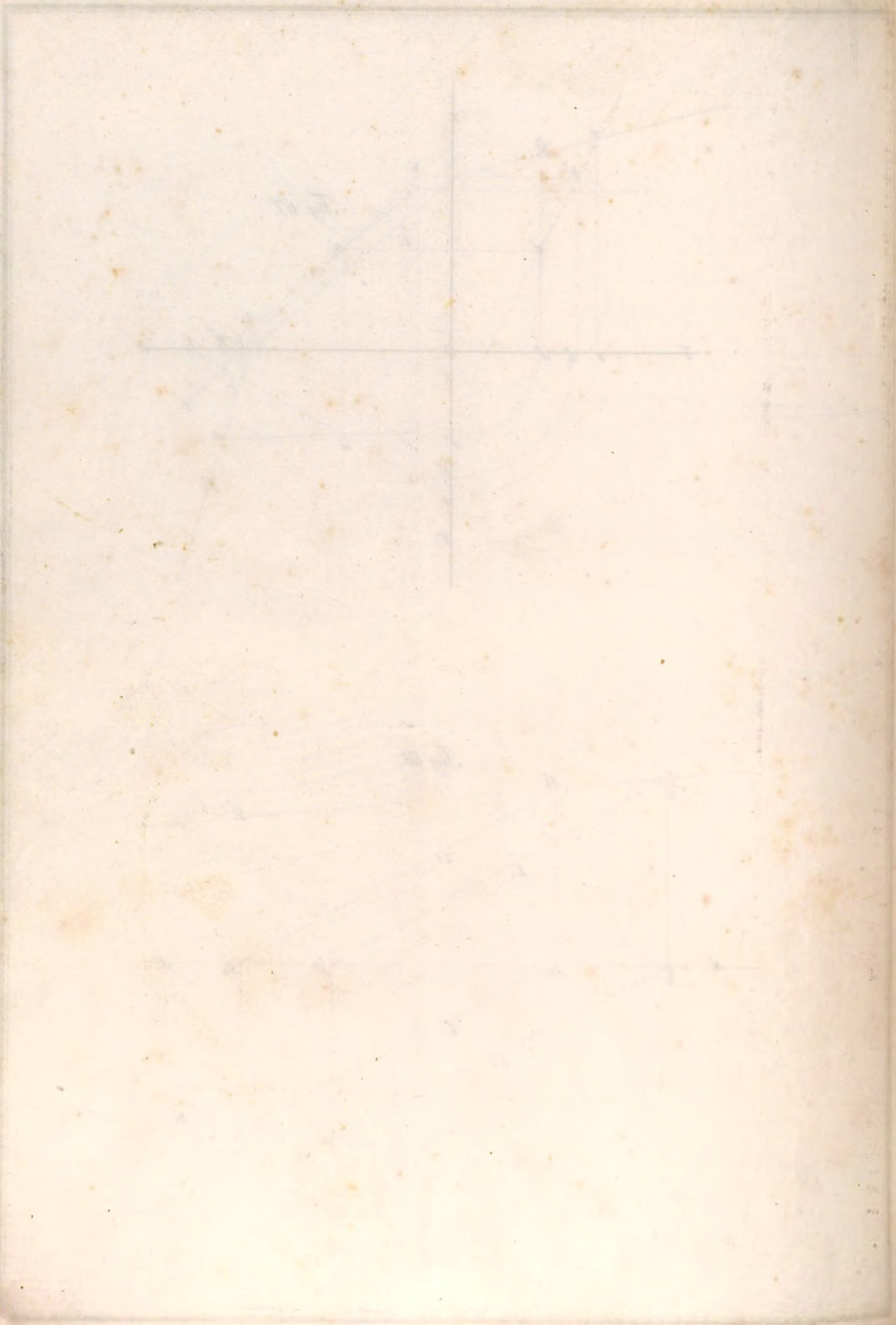


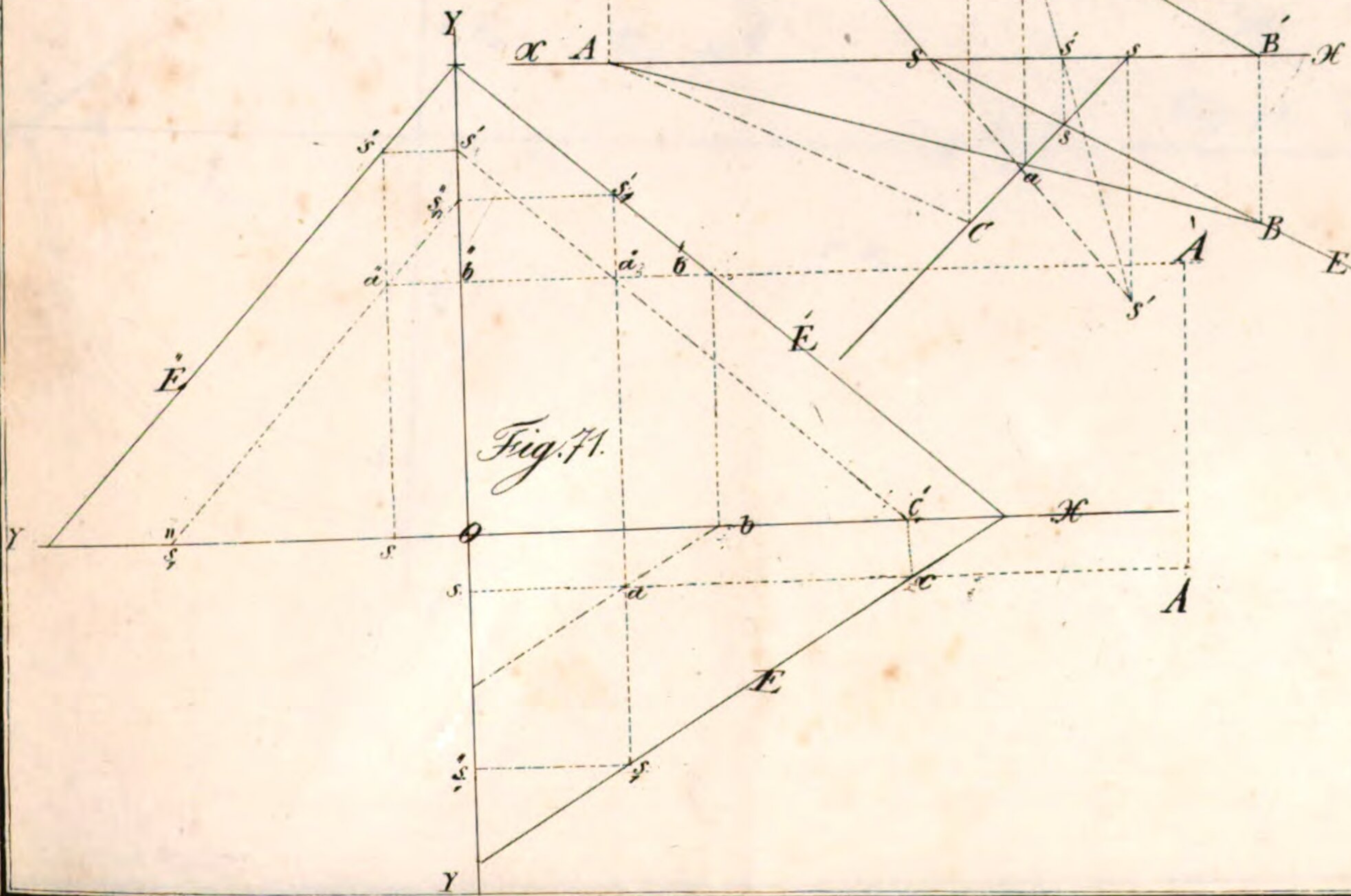
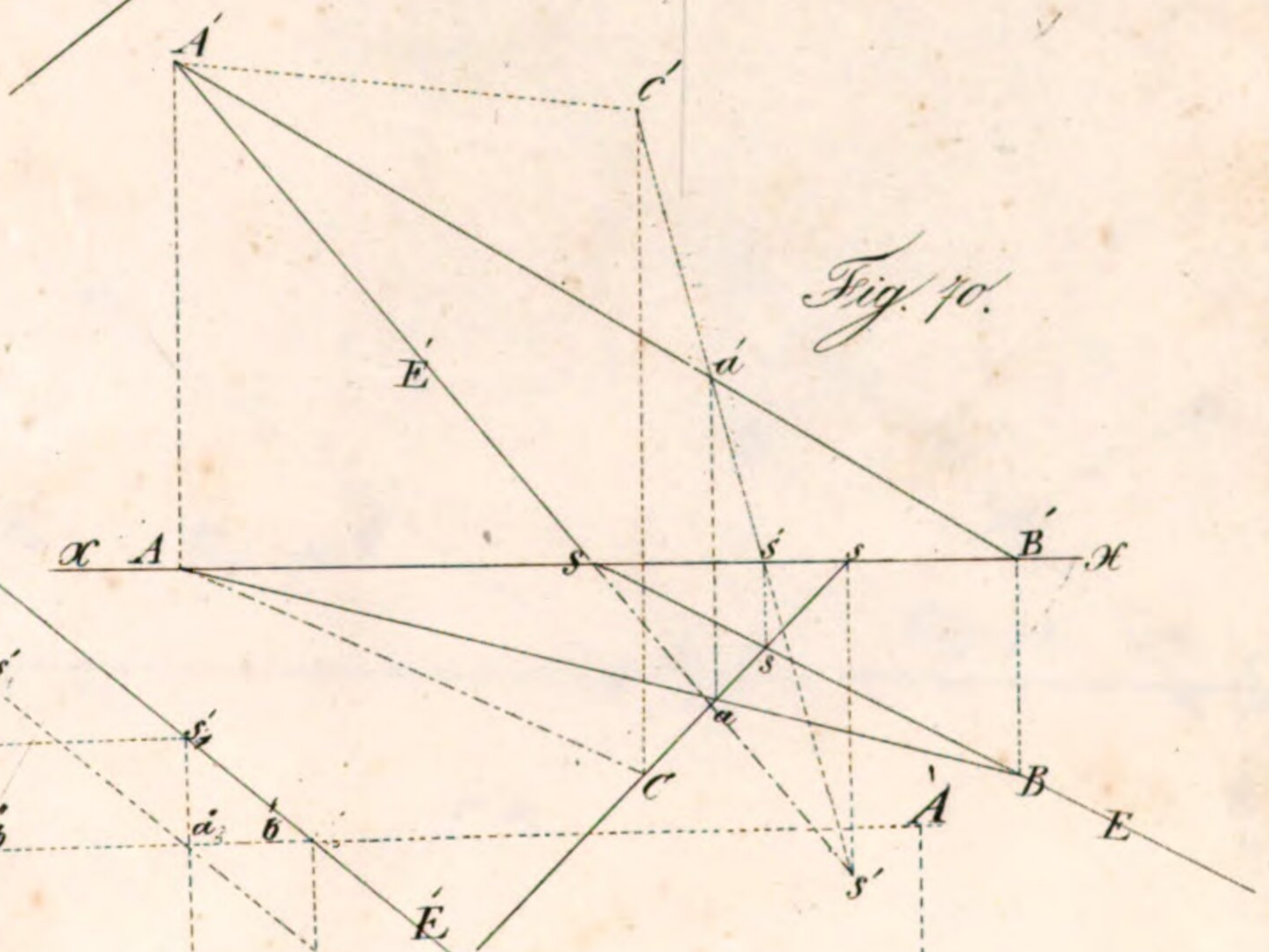
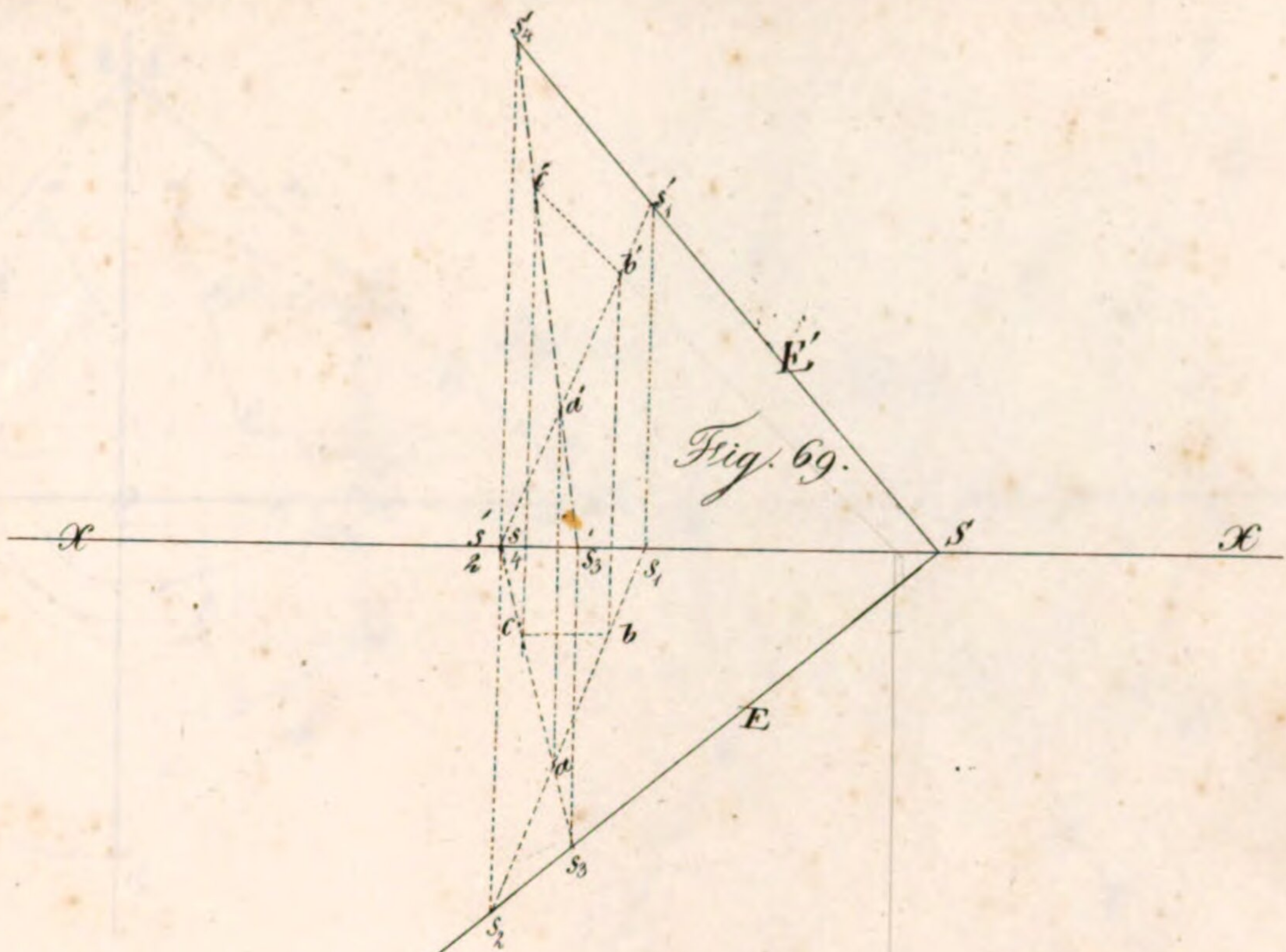
Fig. 70.

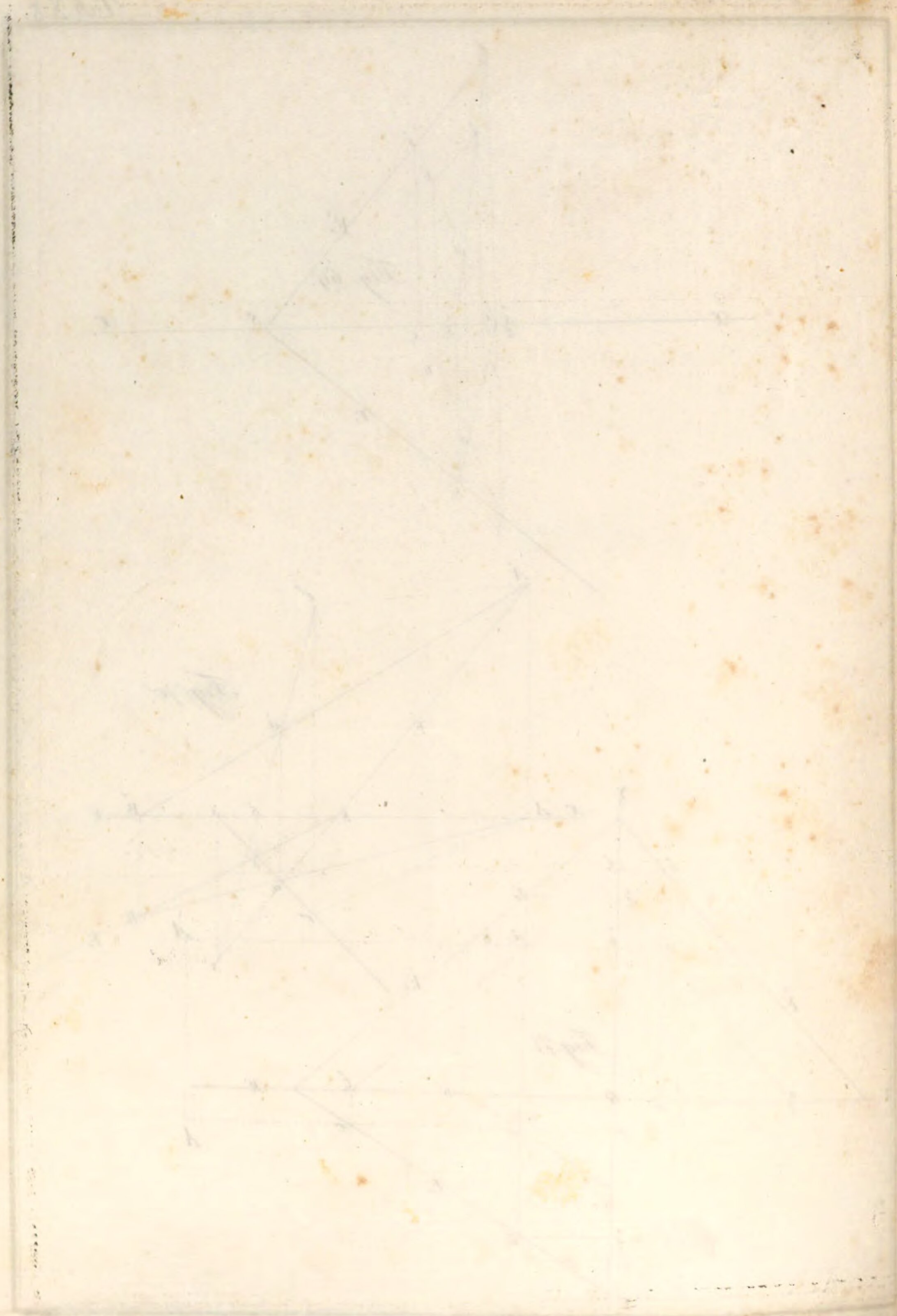
Fig. 71.

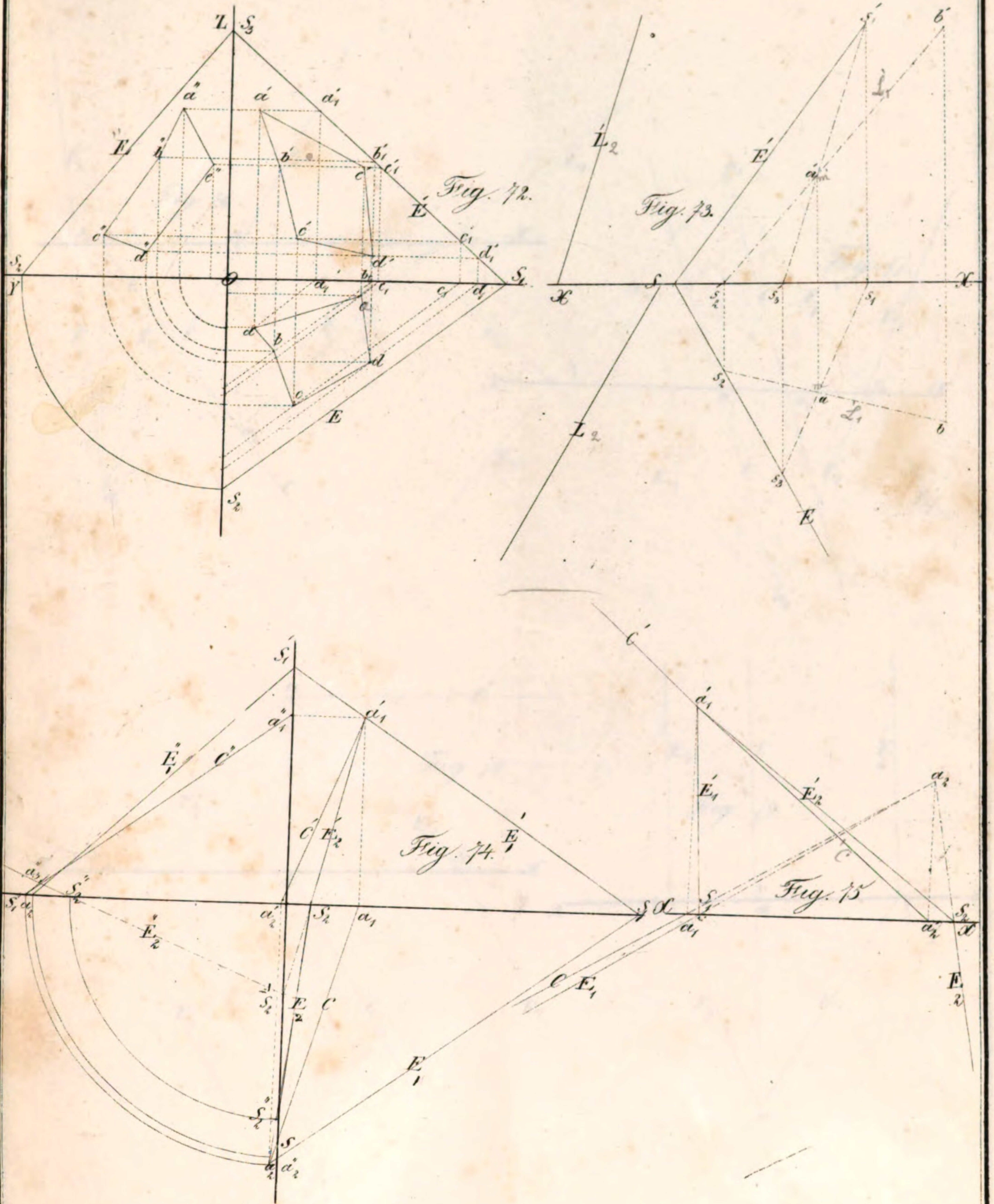


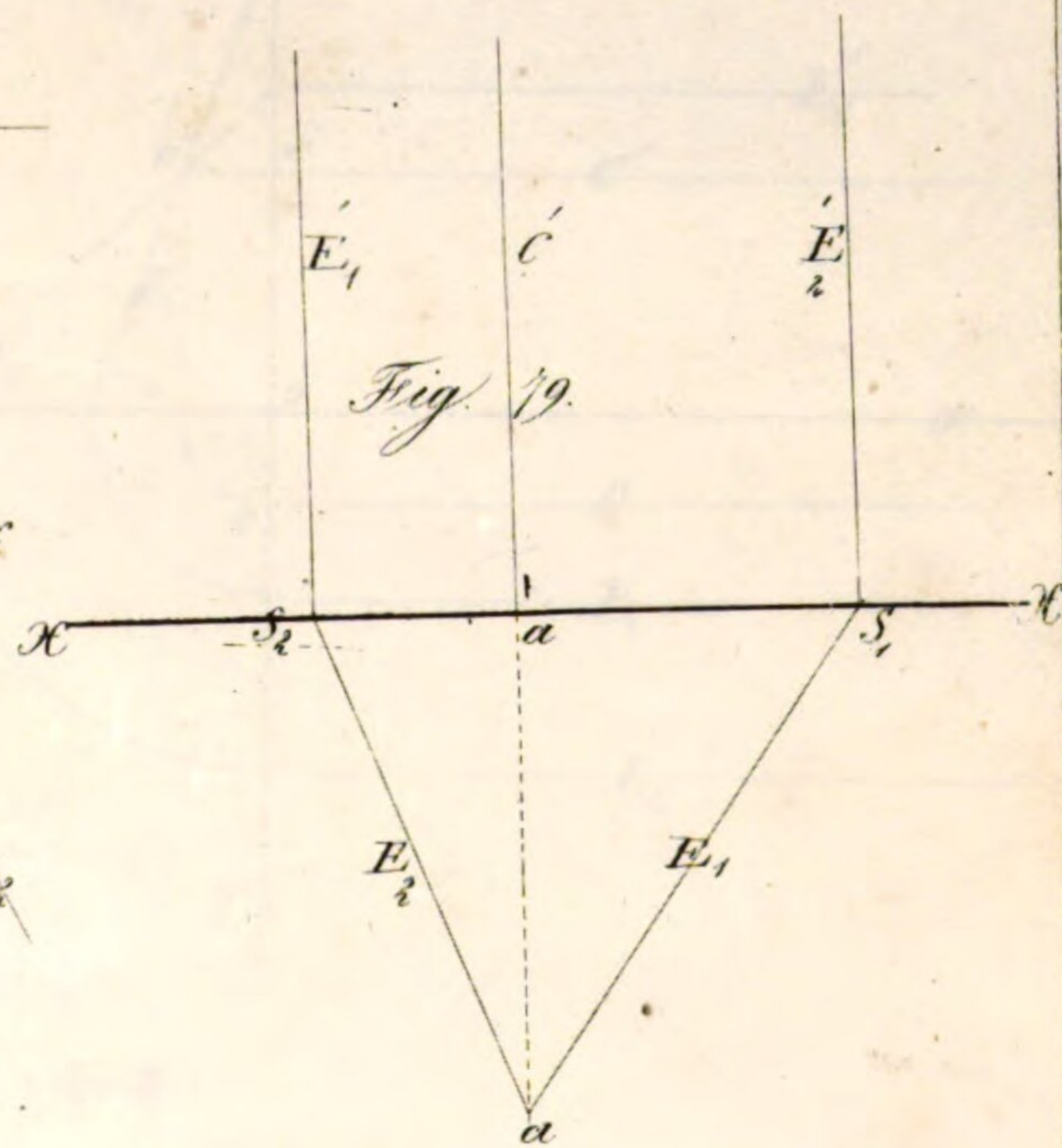
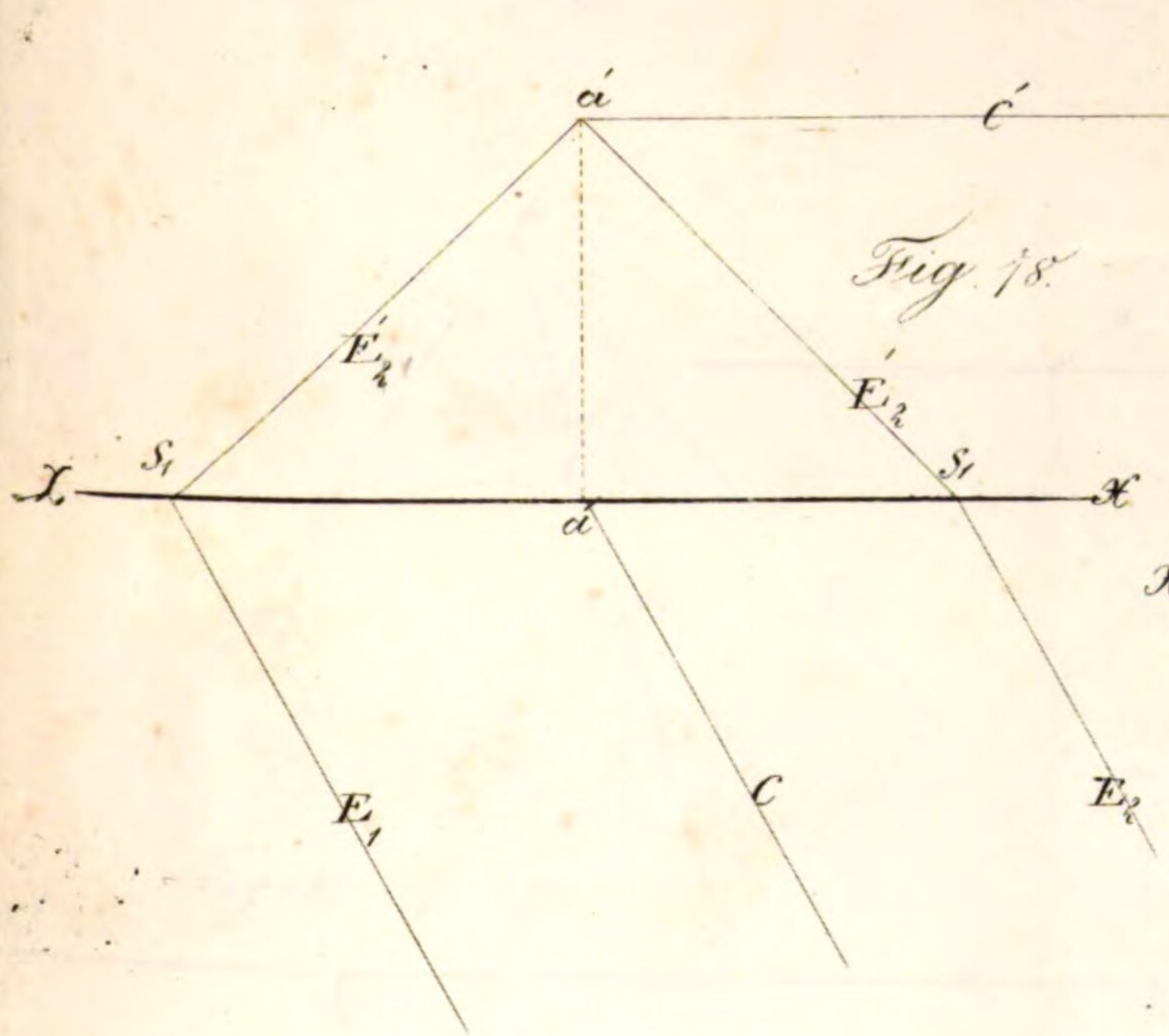
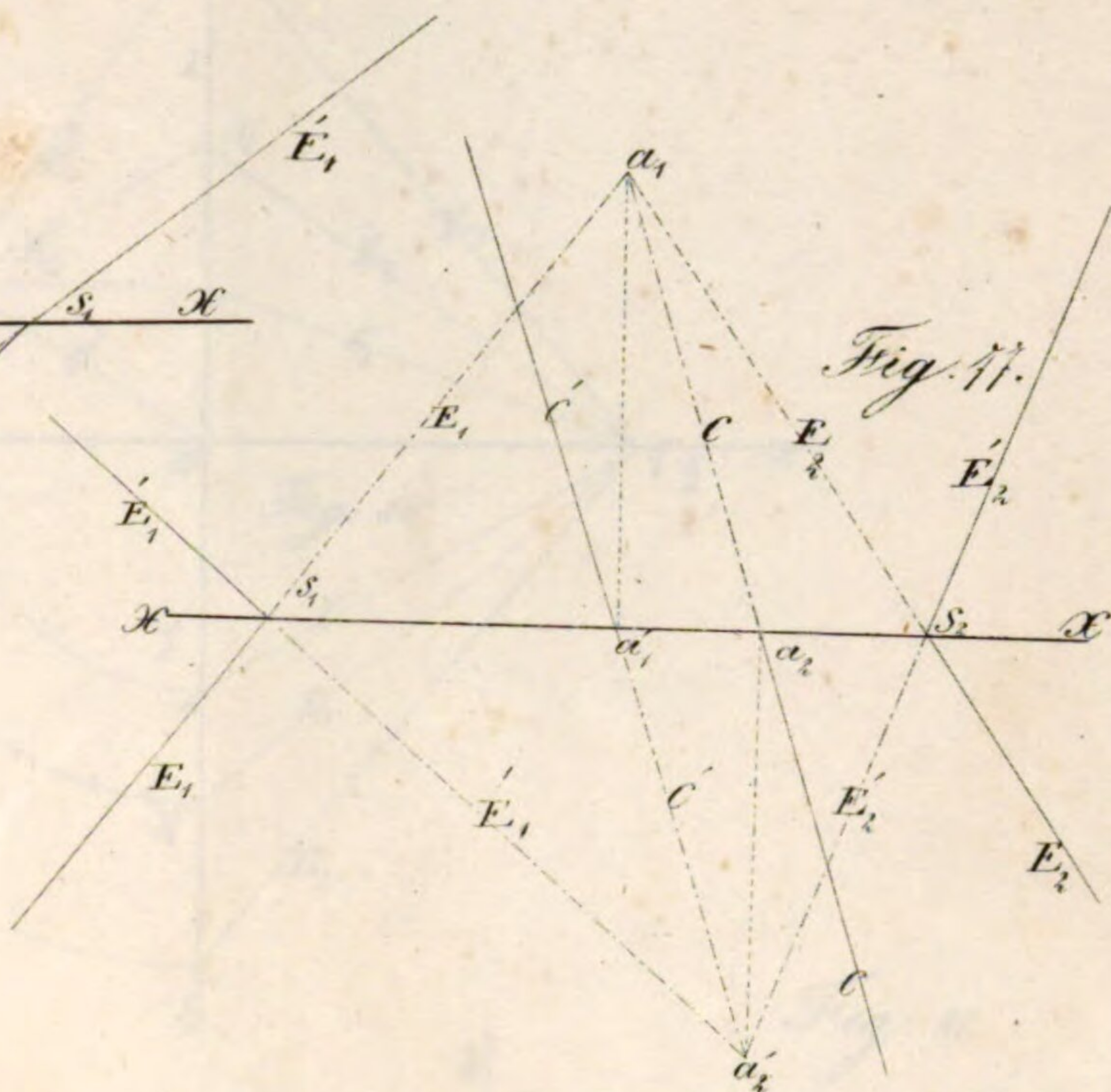
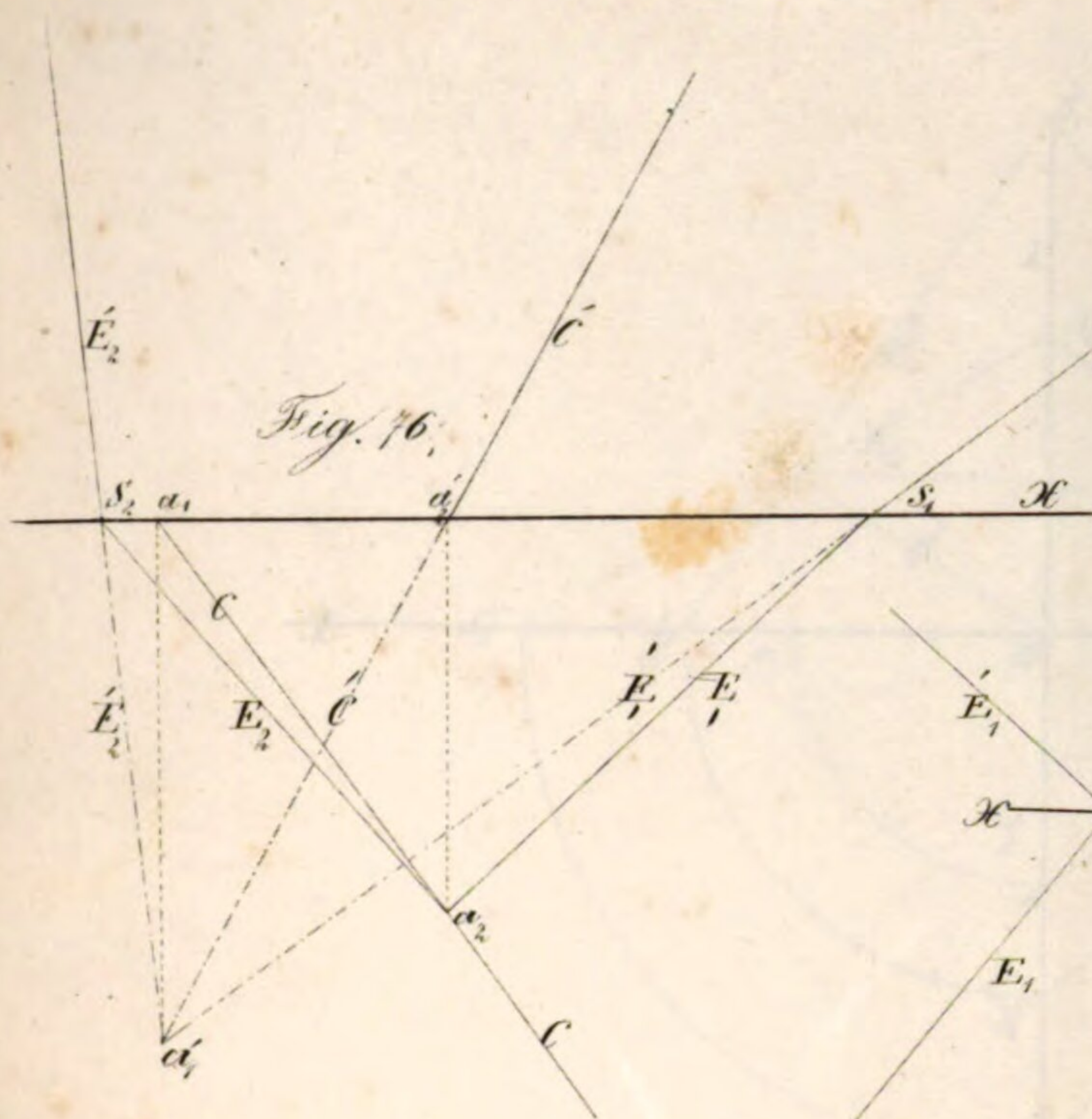


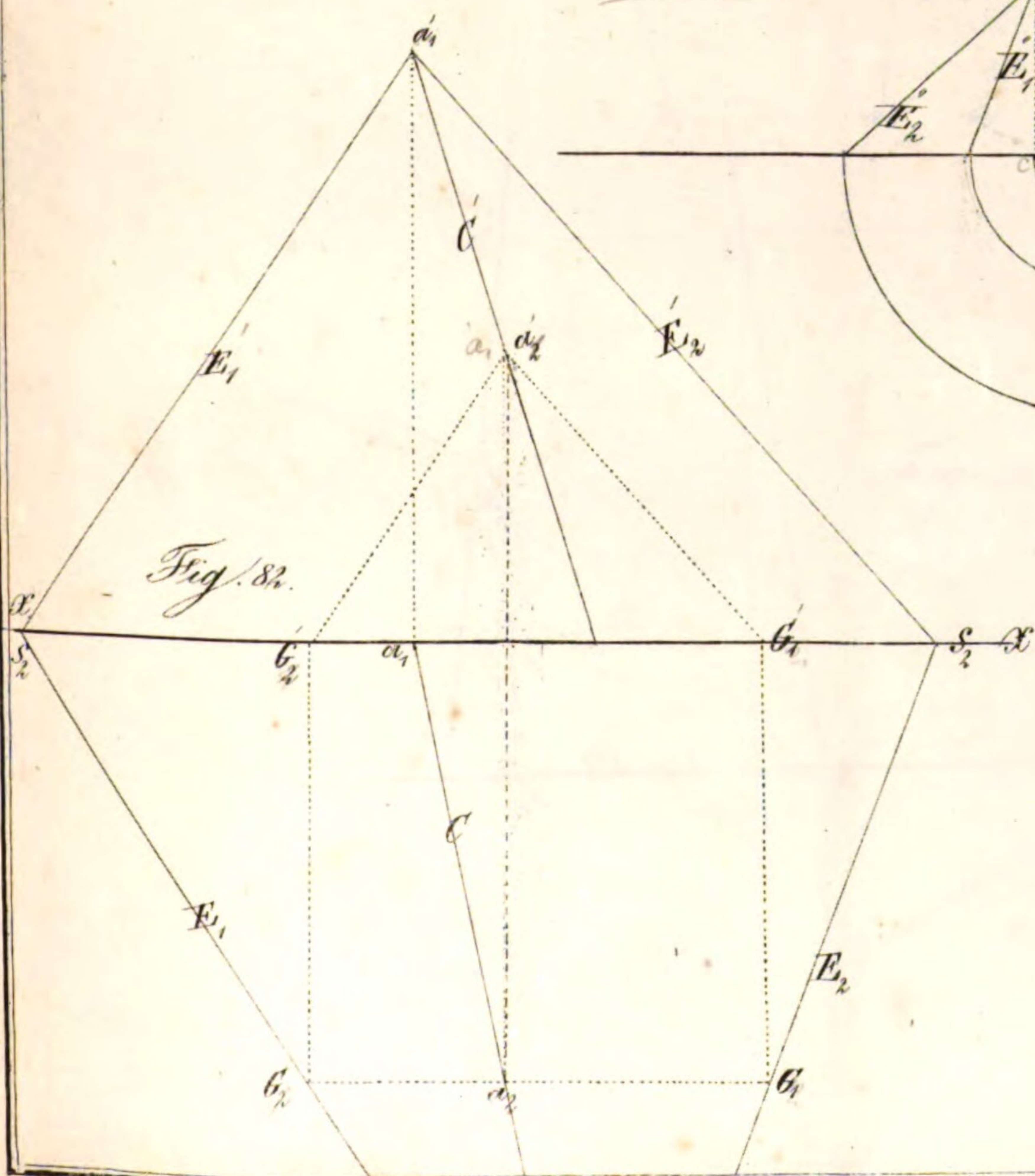
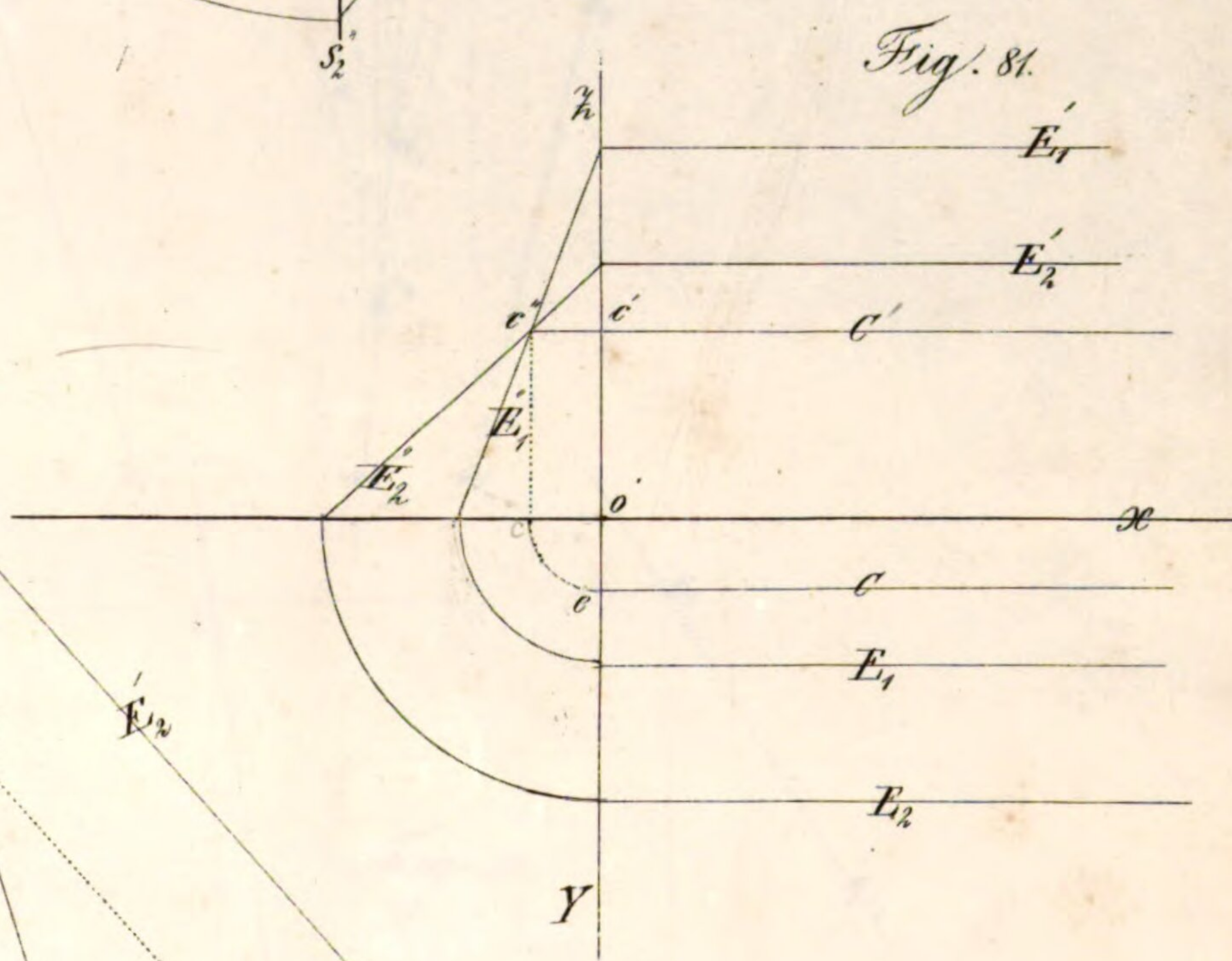
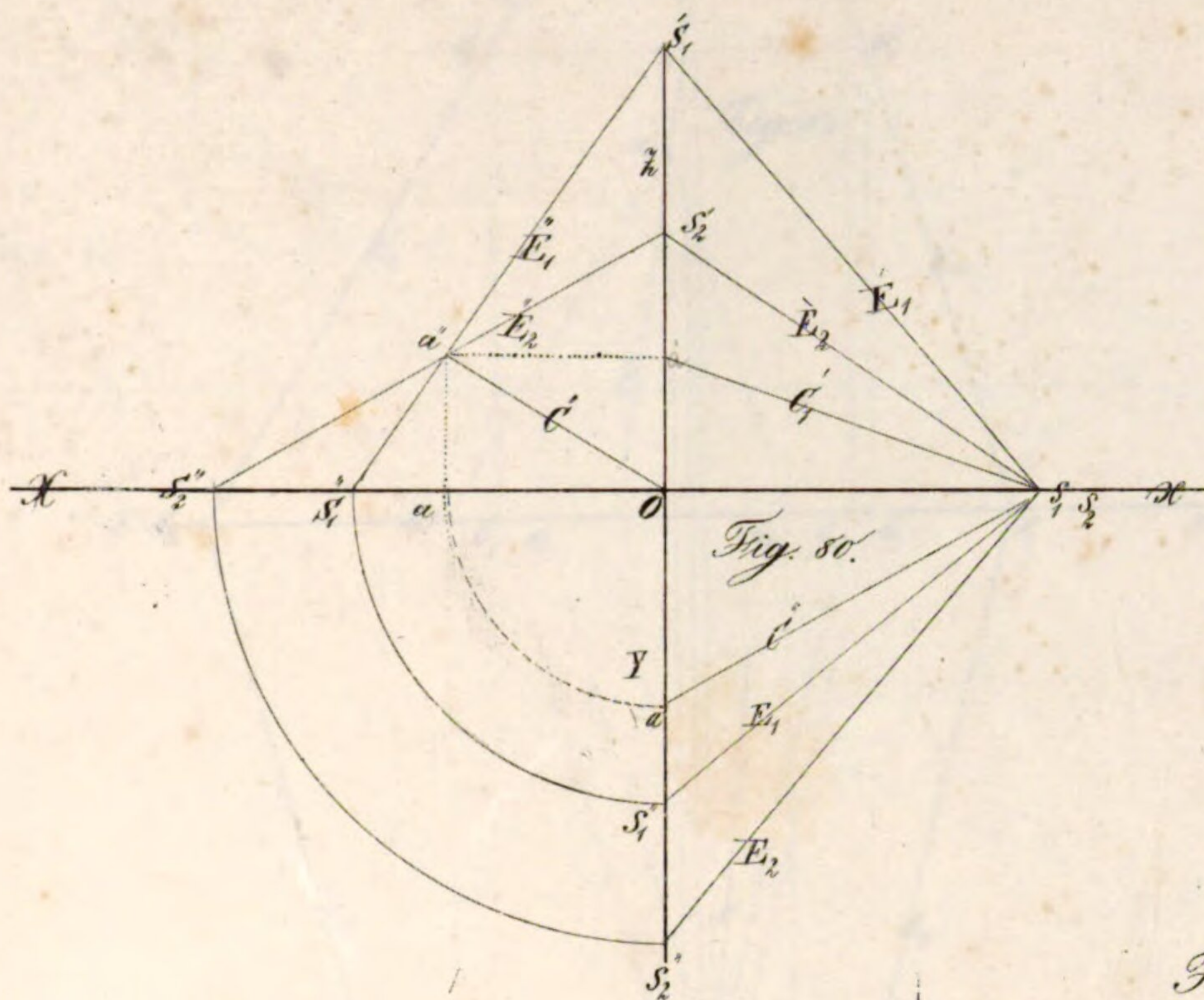


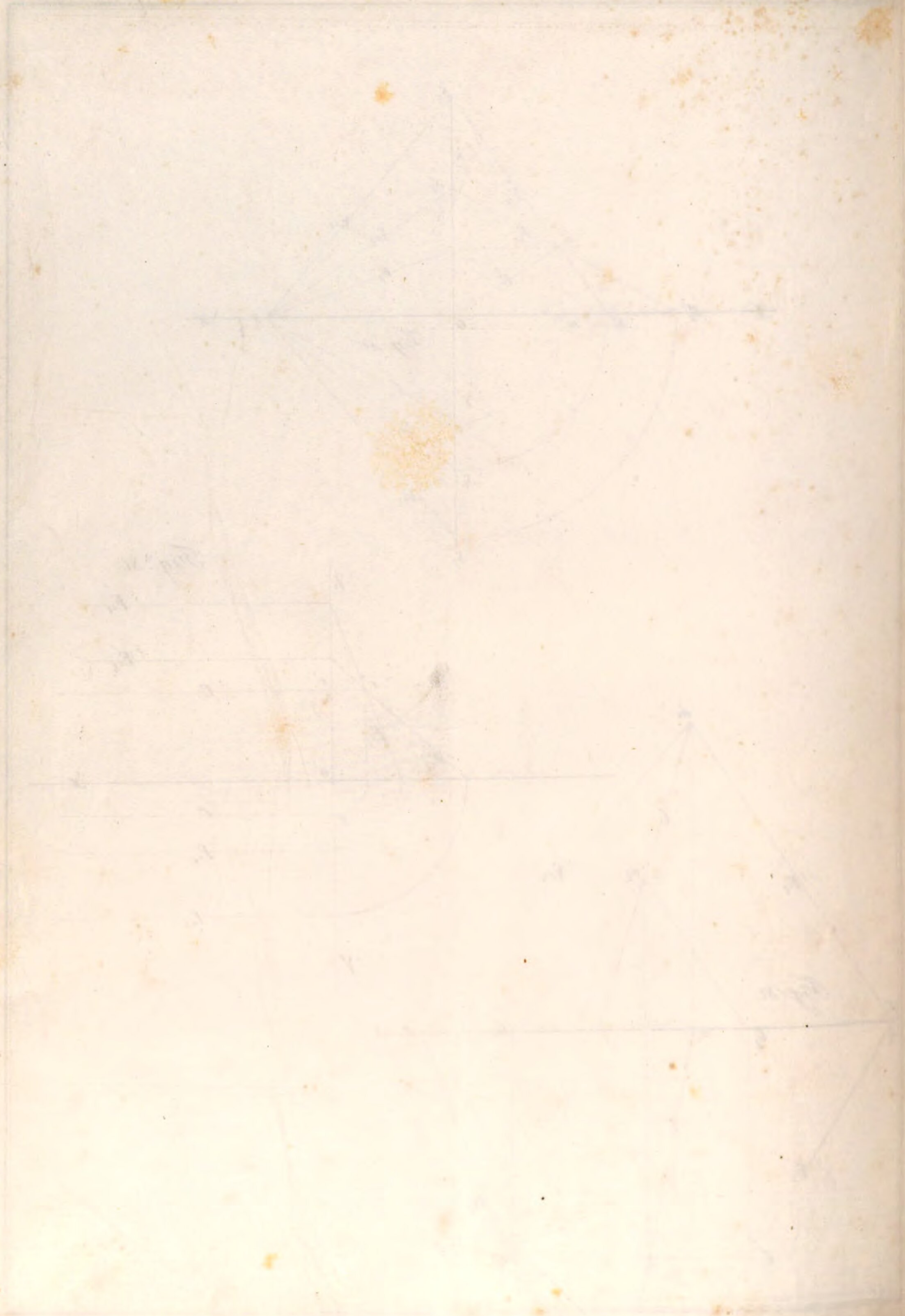


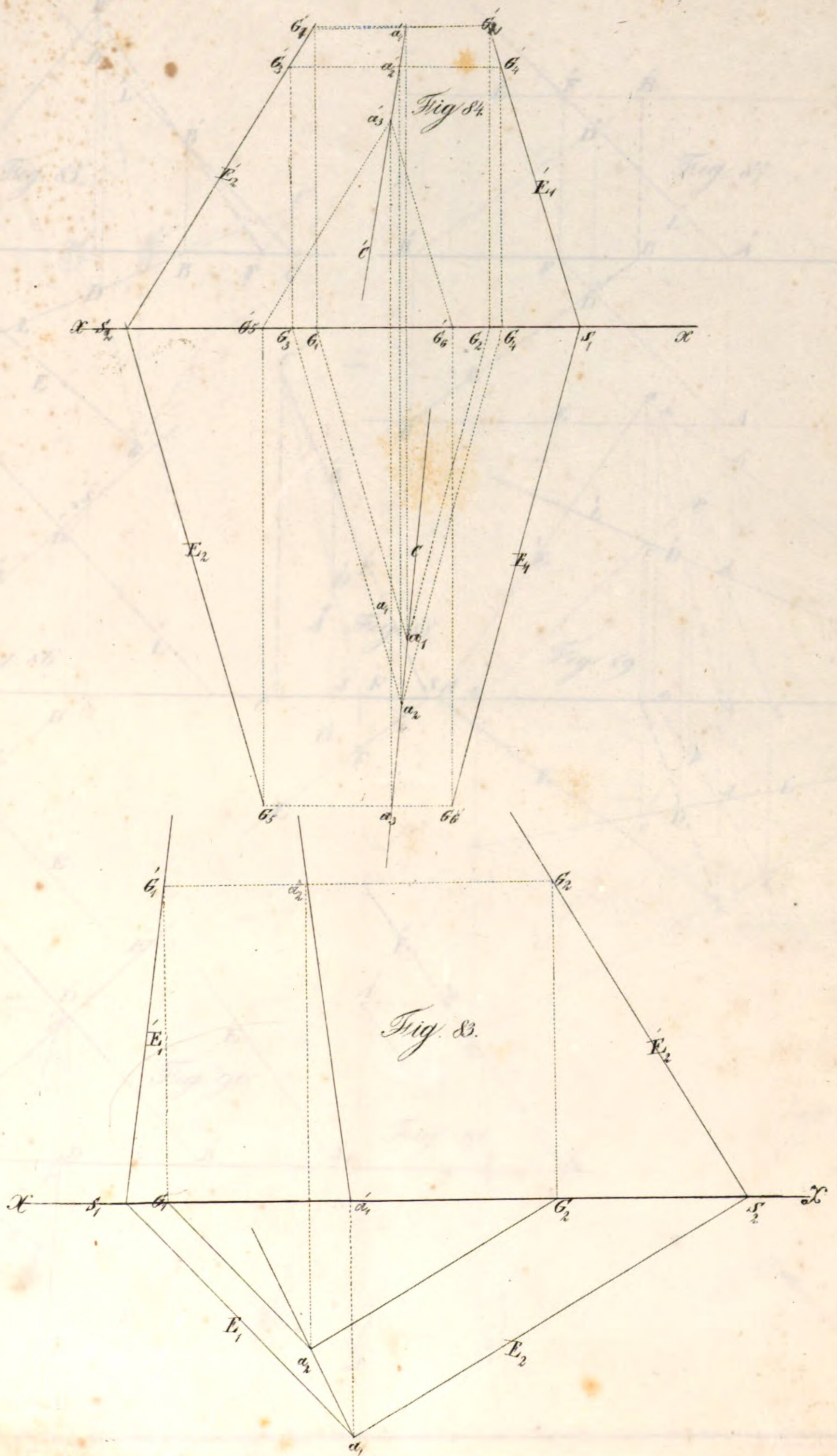




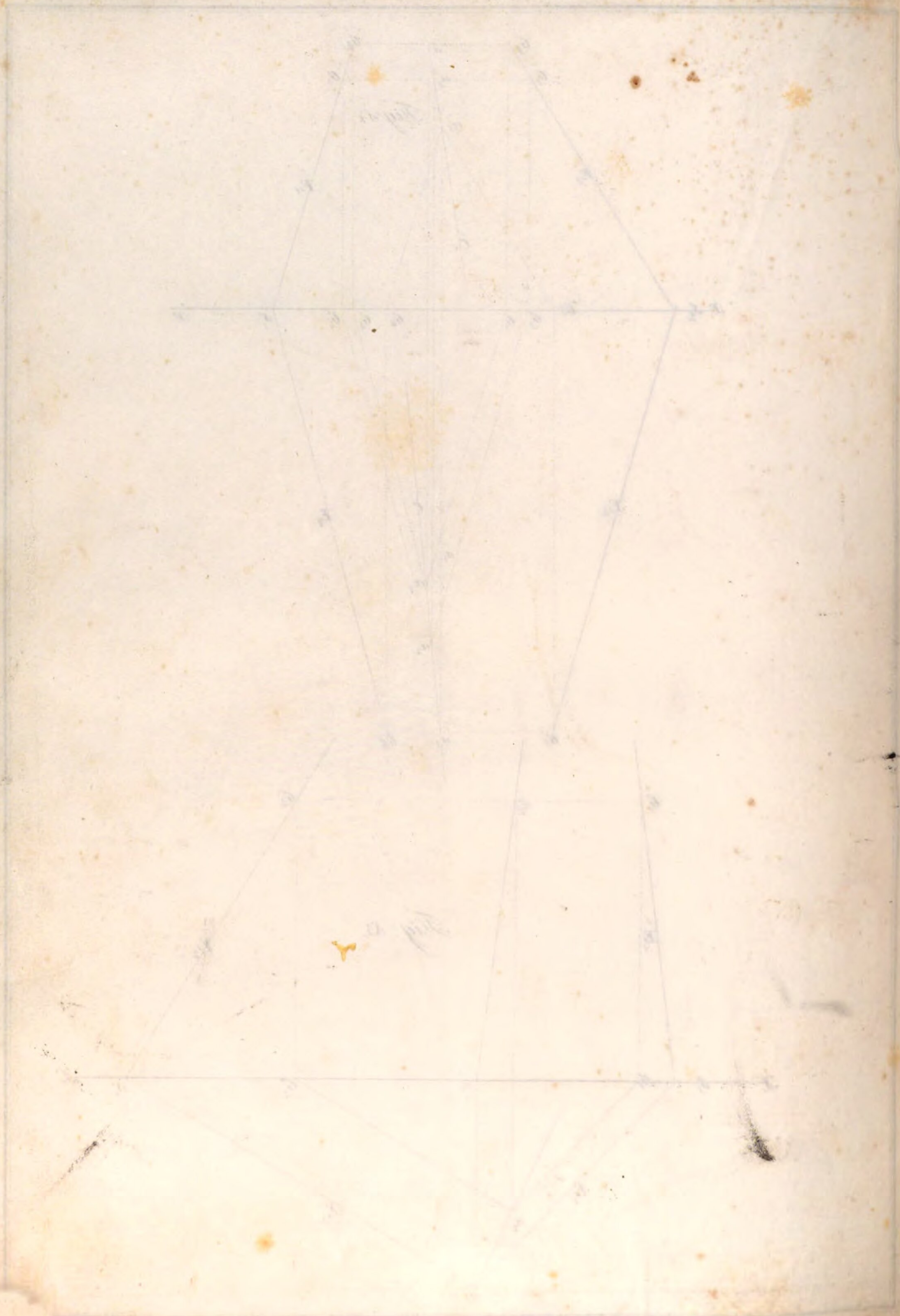


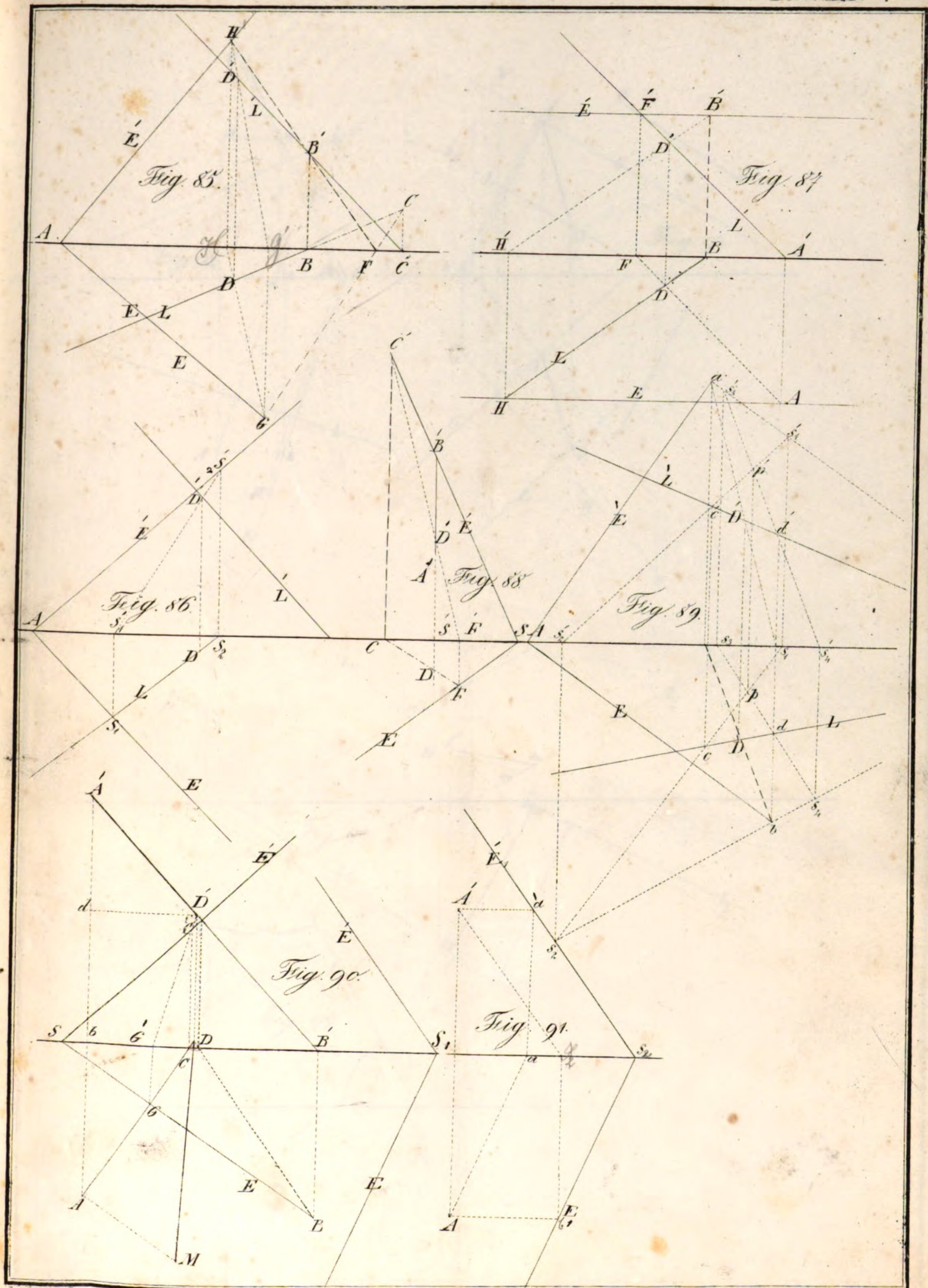


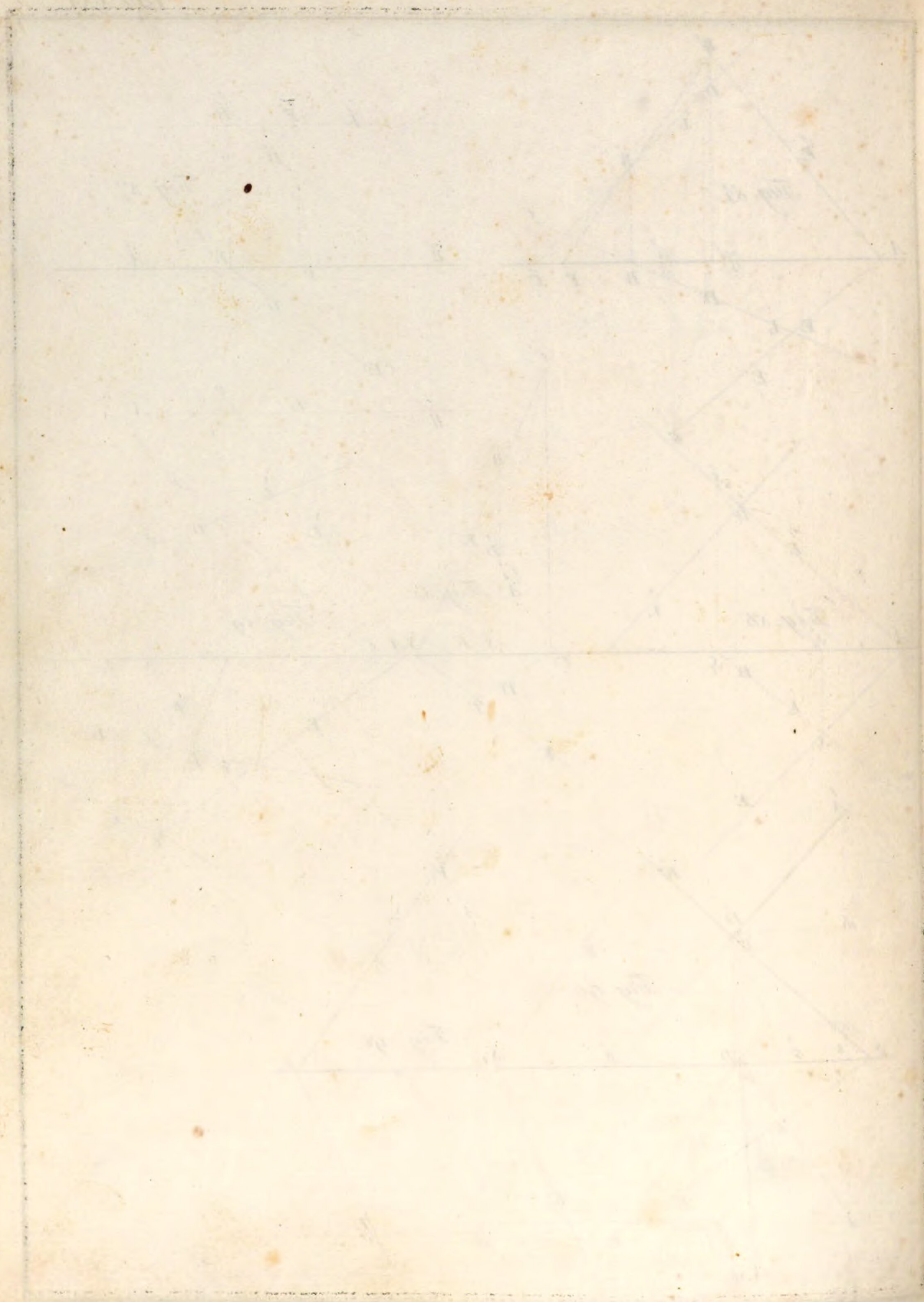


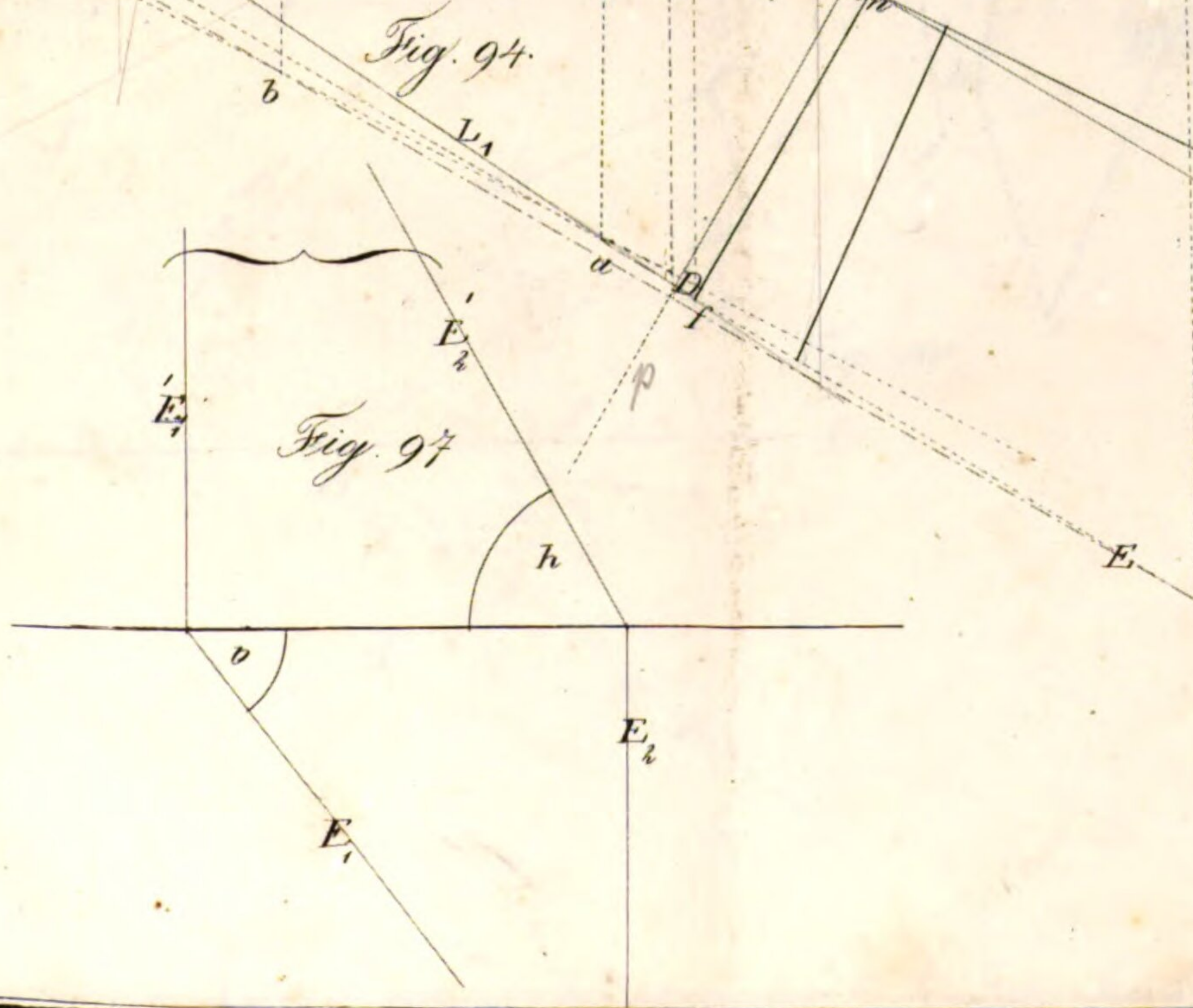
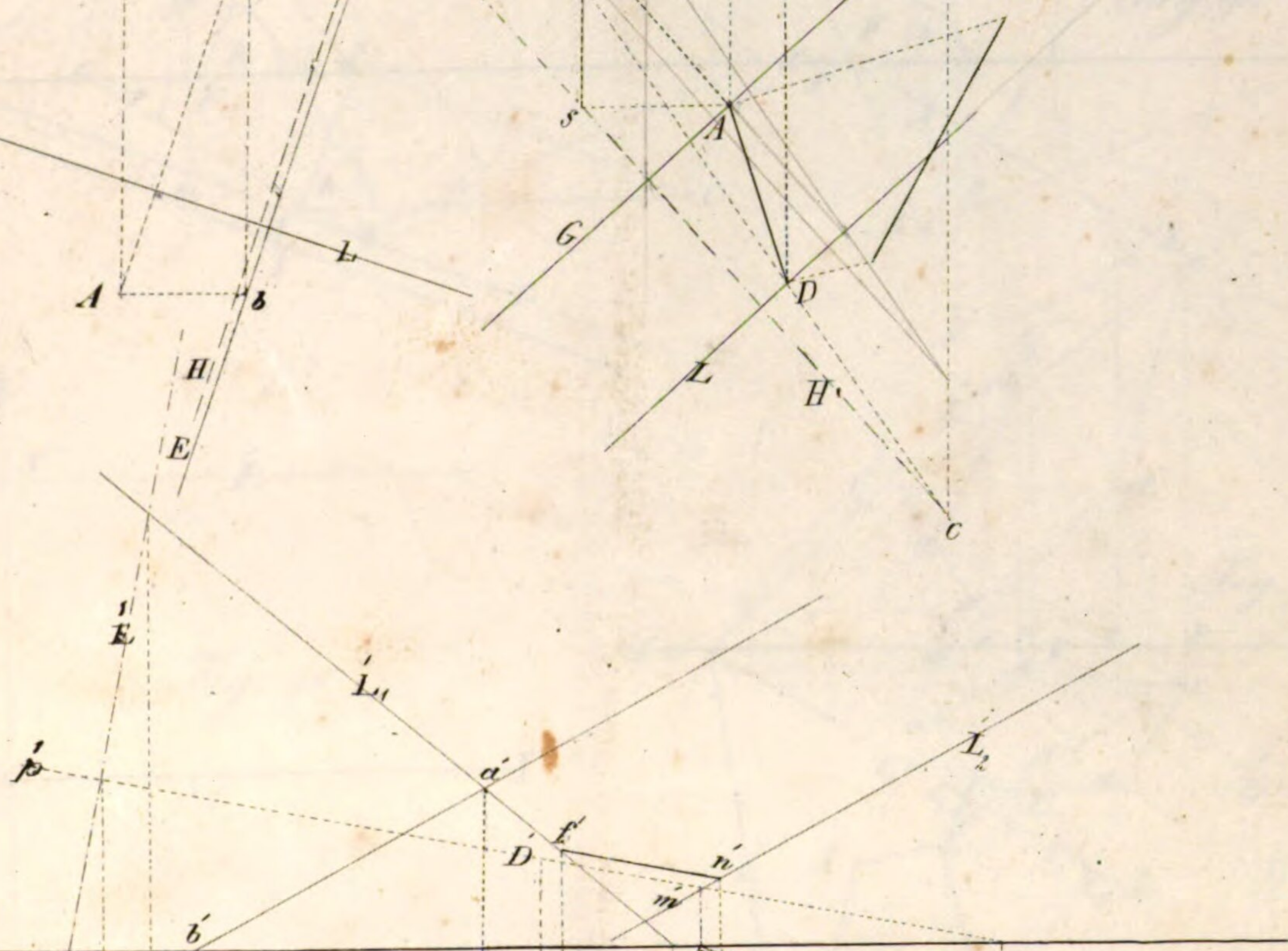
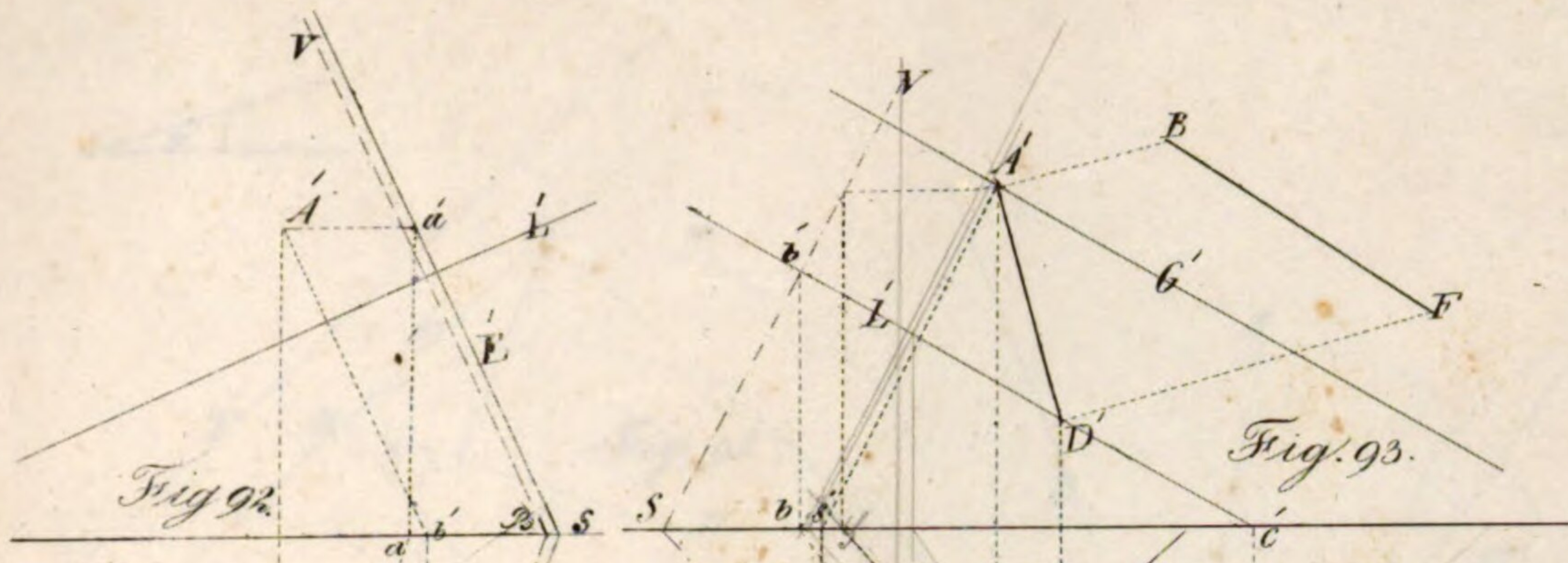


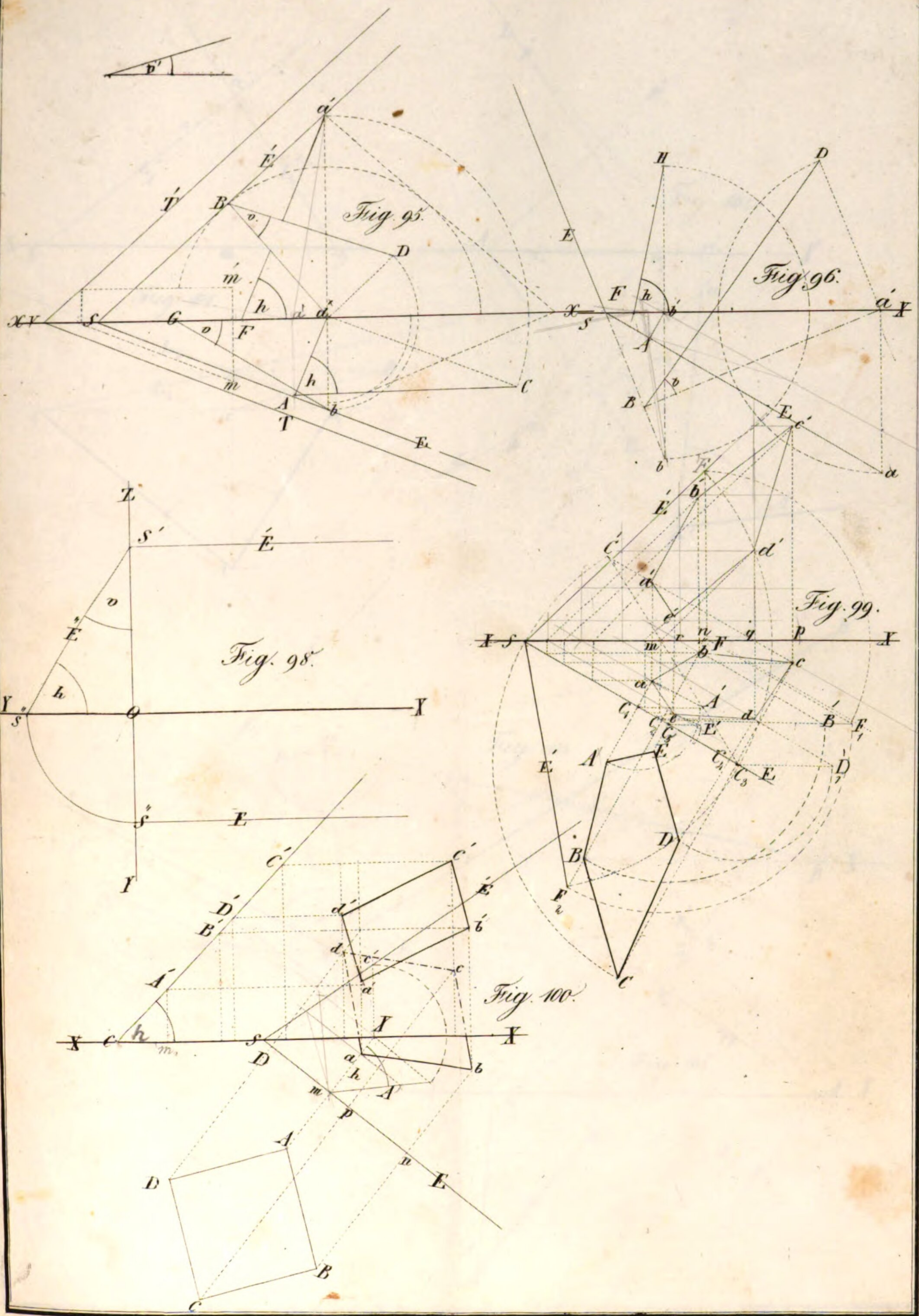
1871/1872

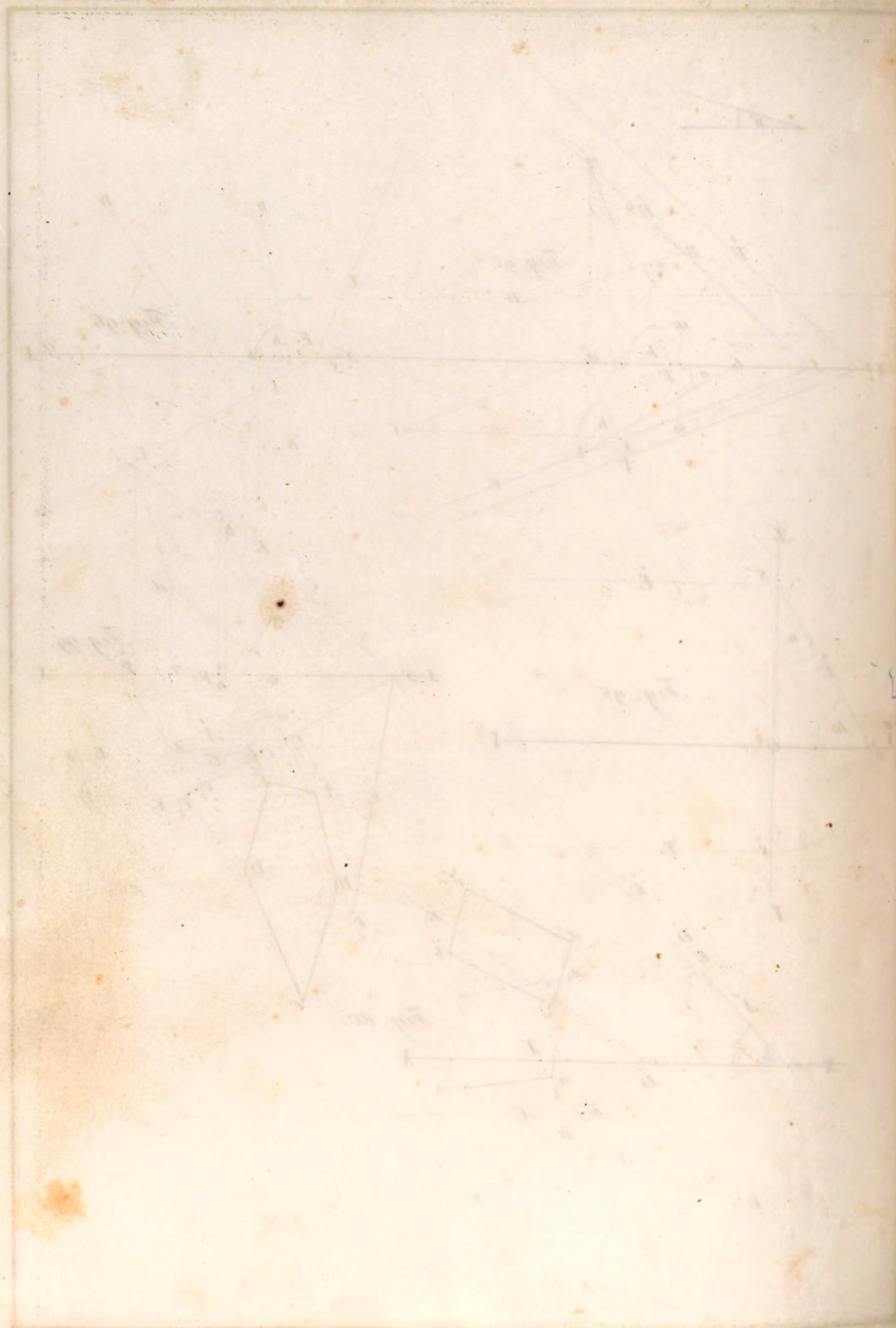












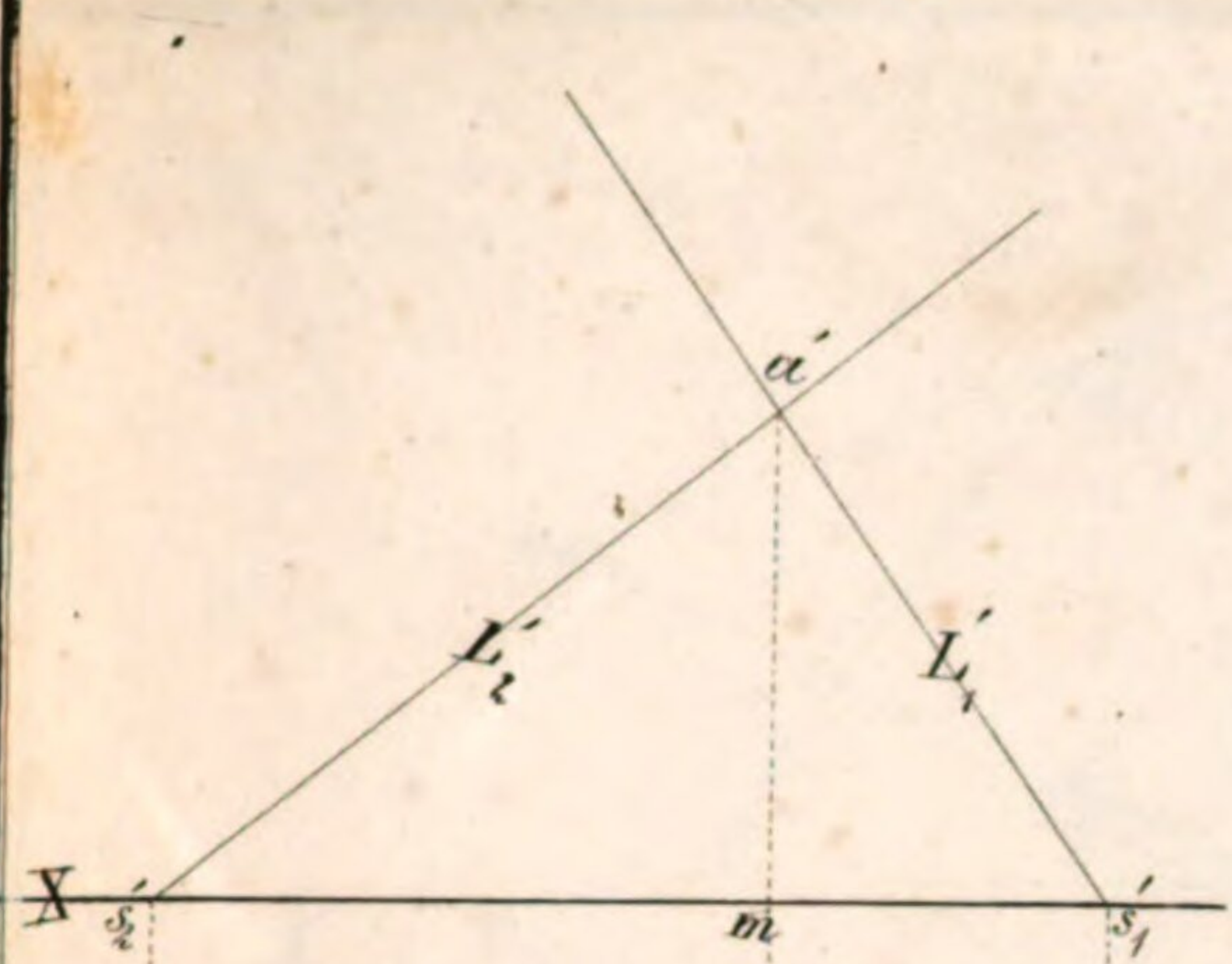


Fig. 101.

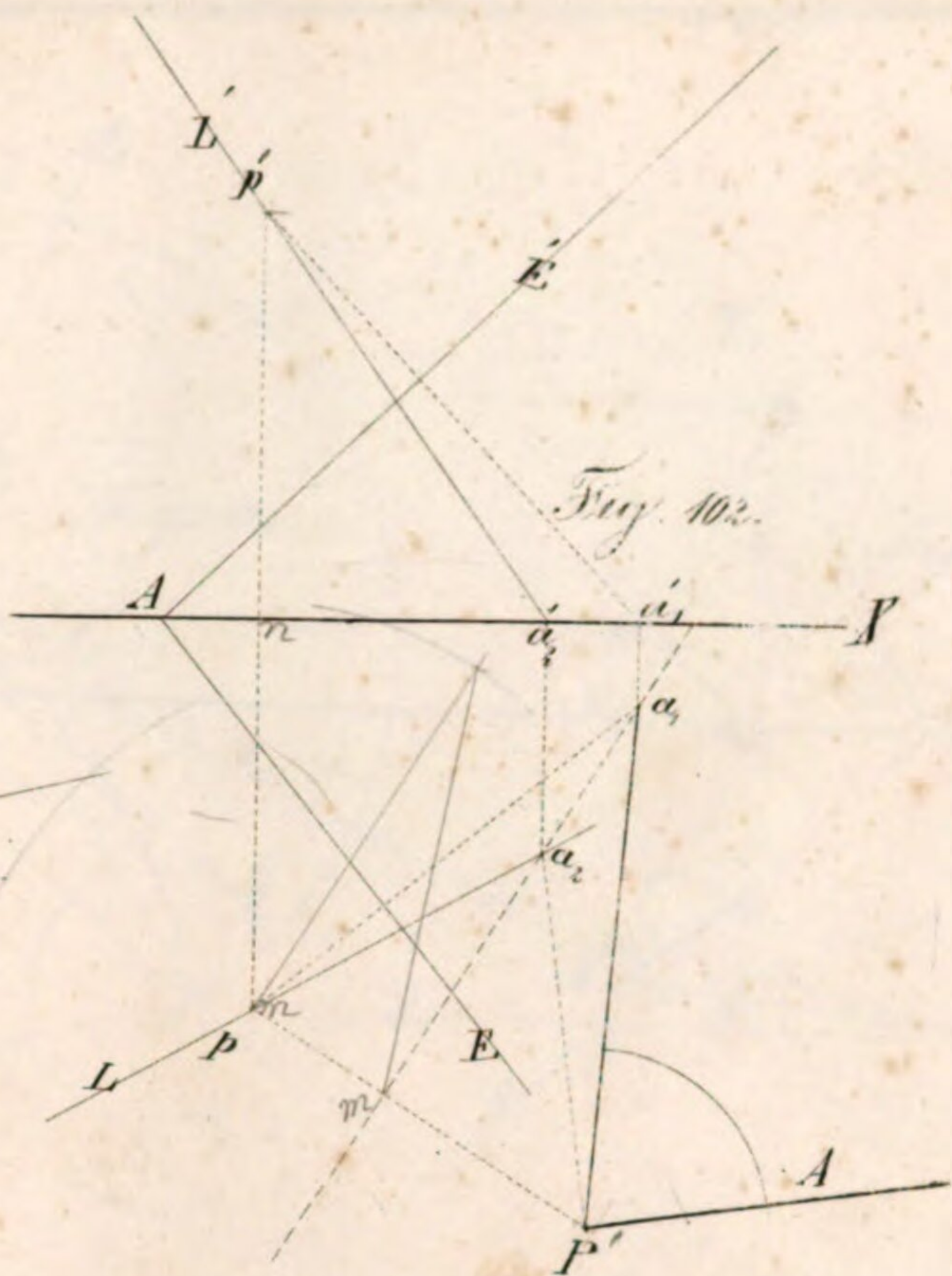


Fig. 102.

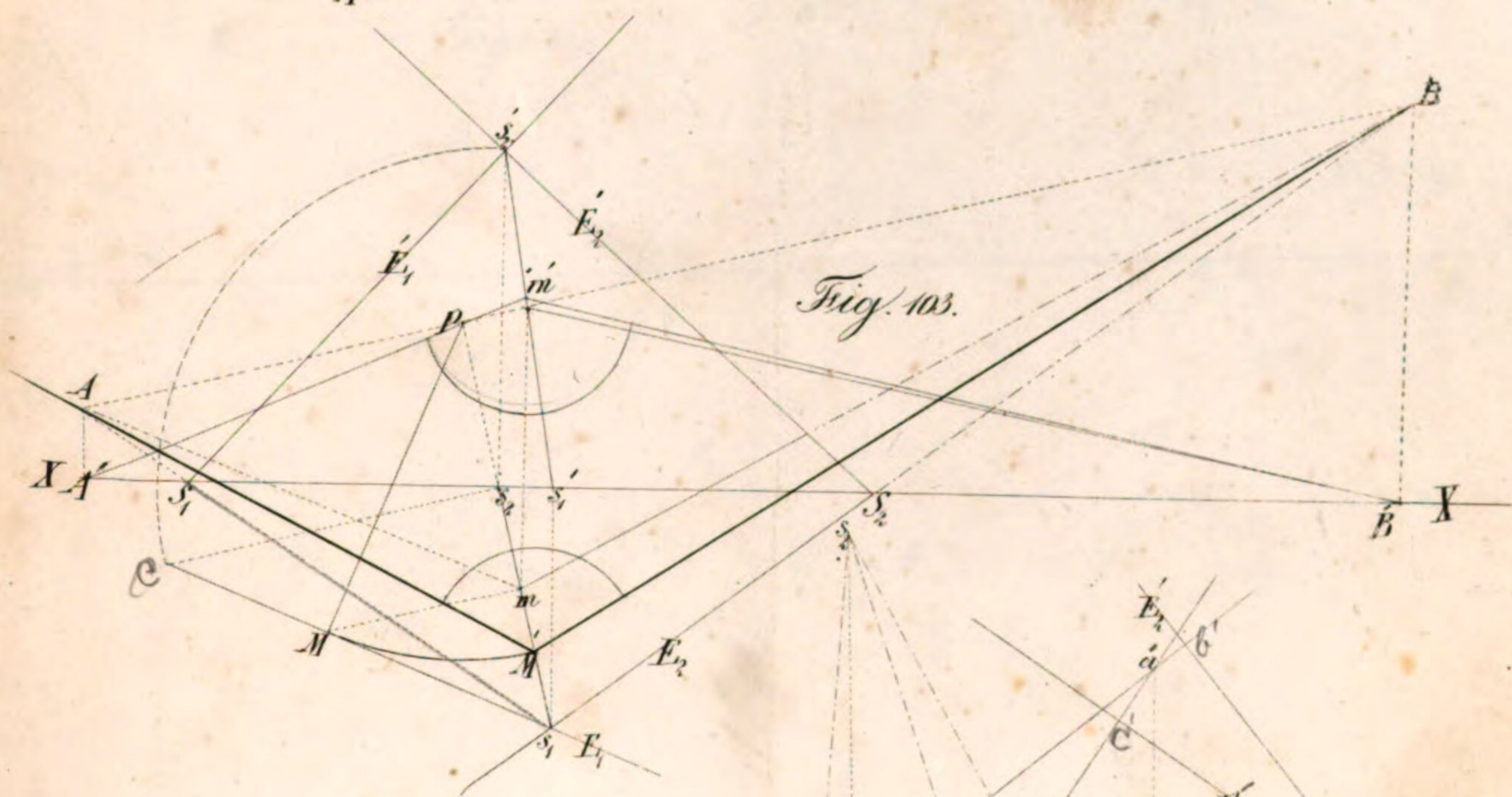


Fig. 103.

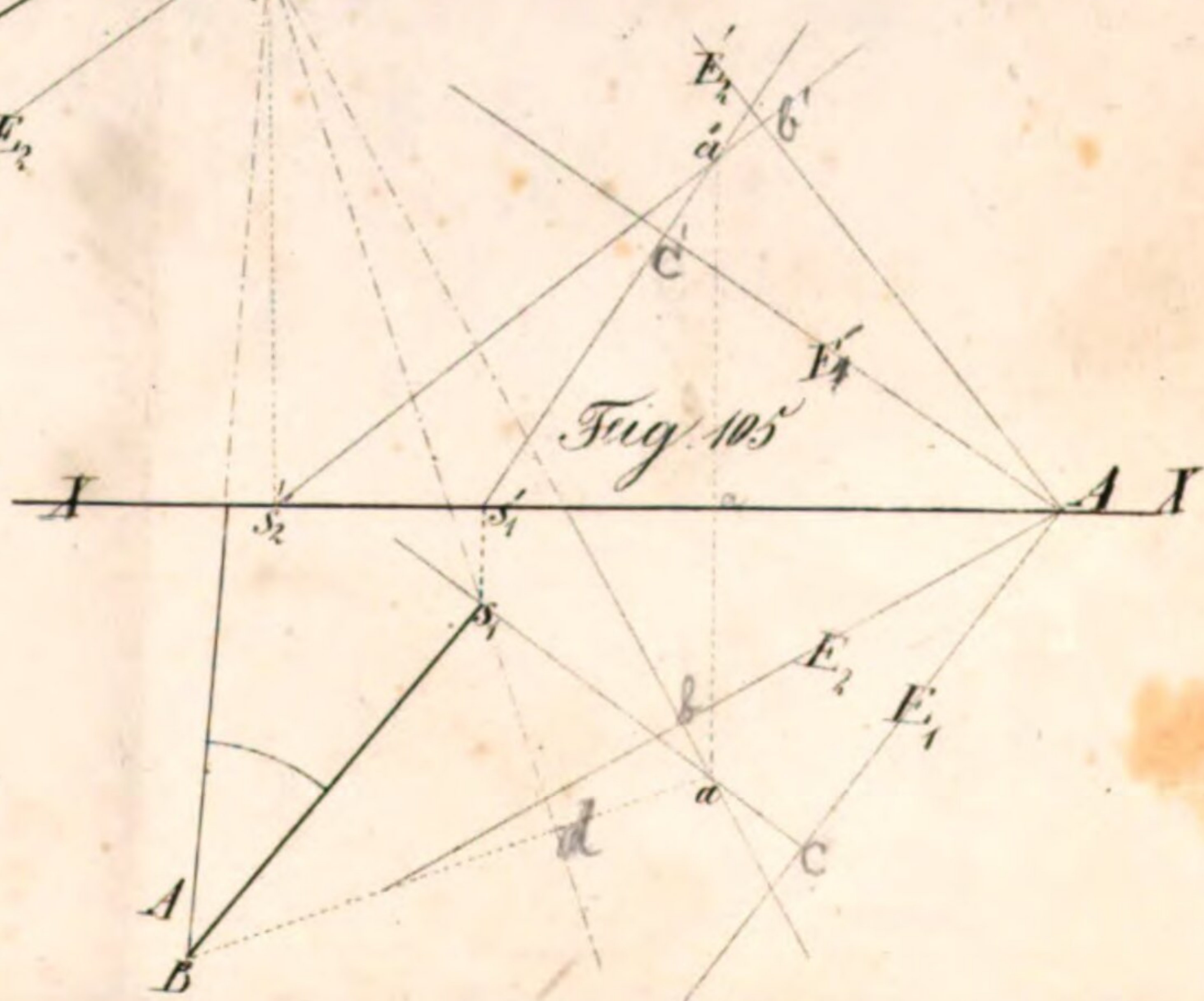
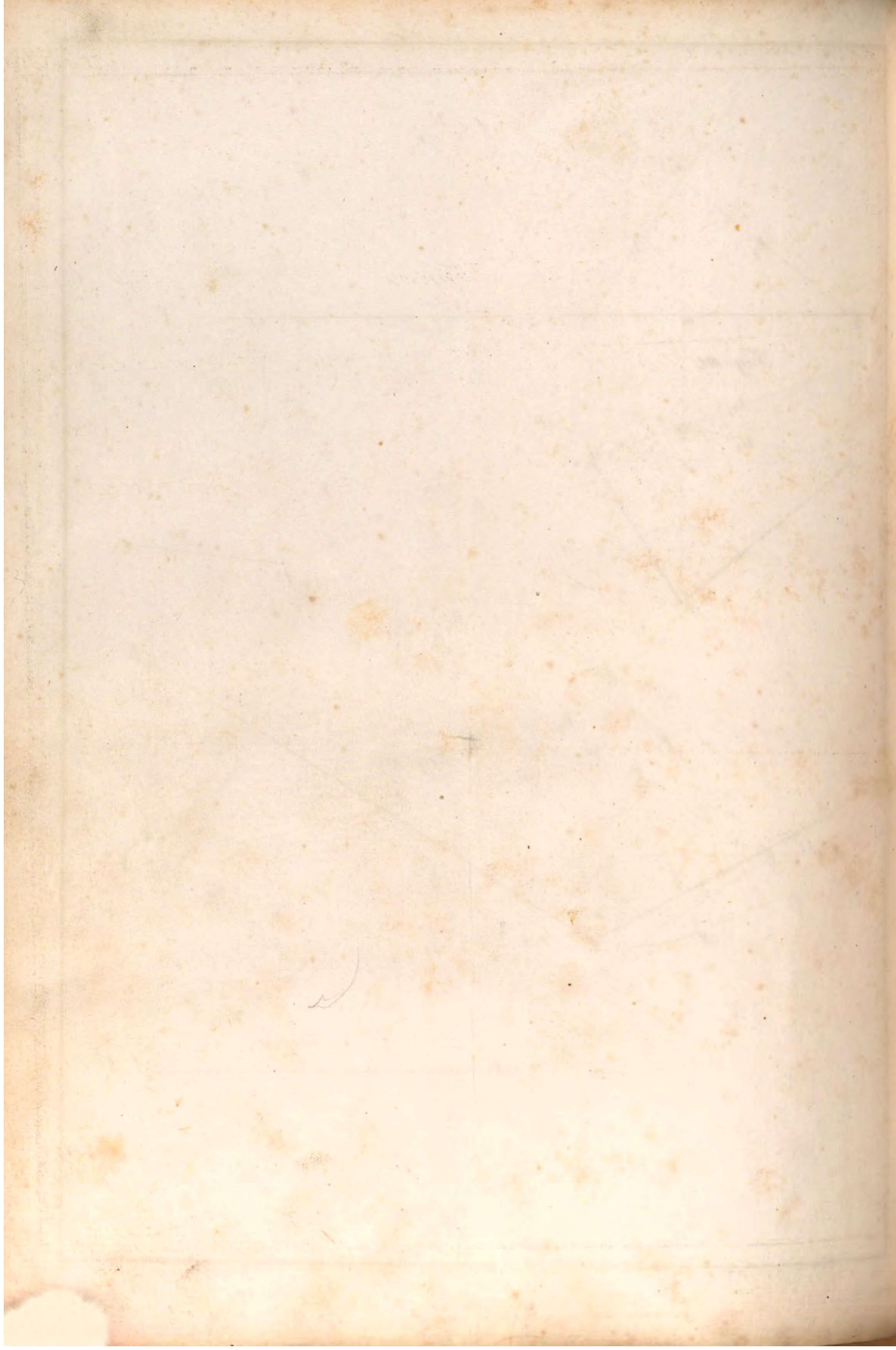
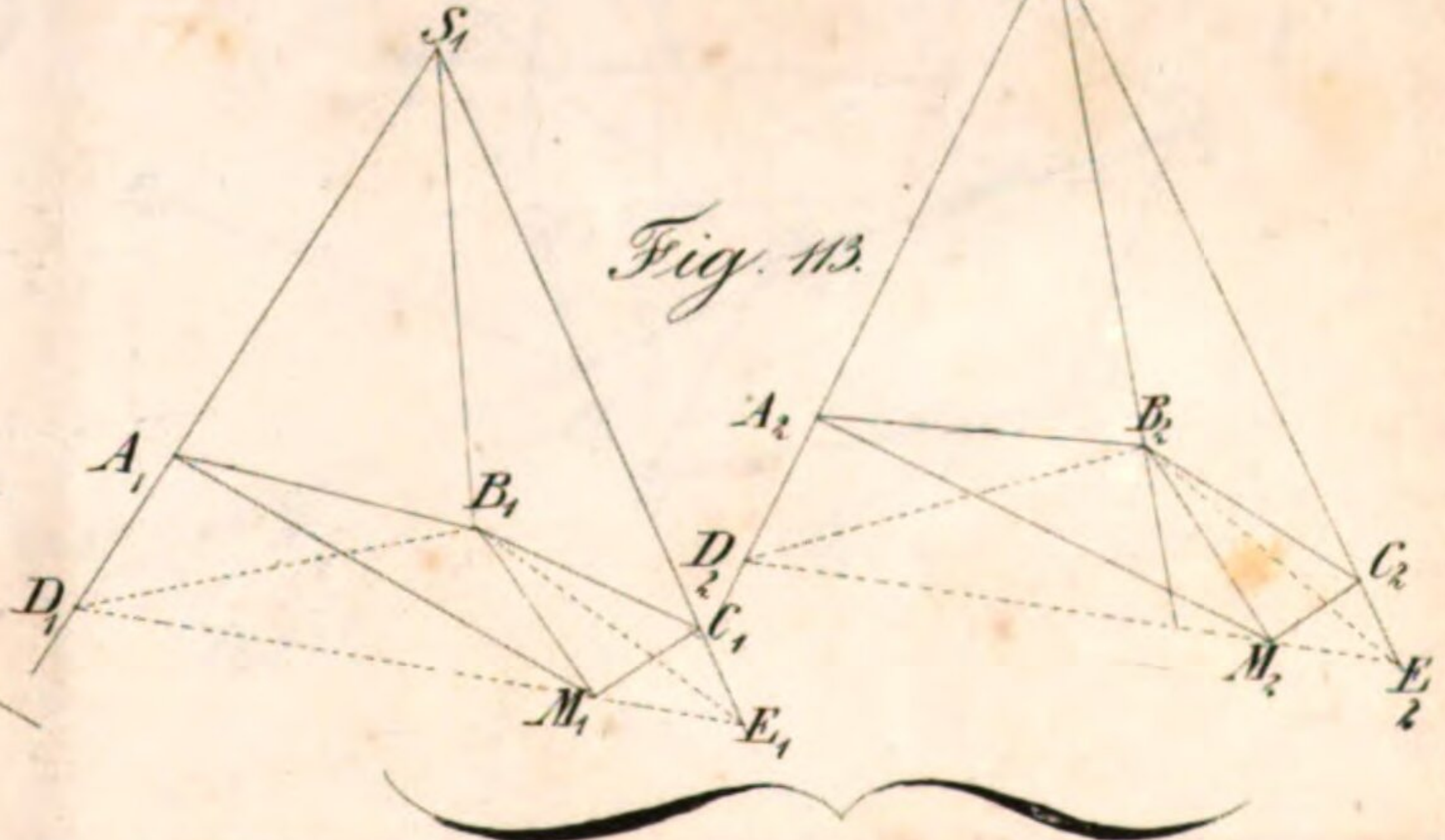
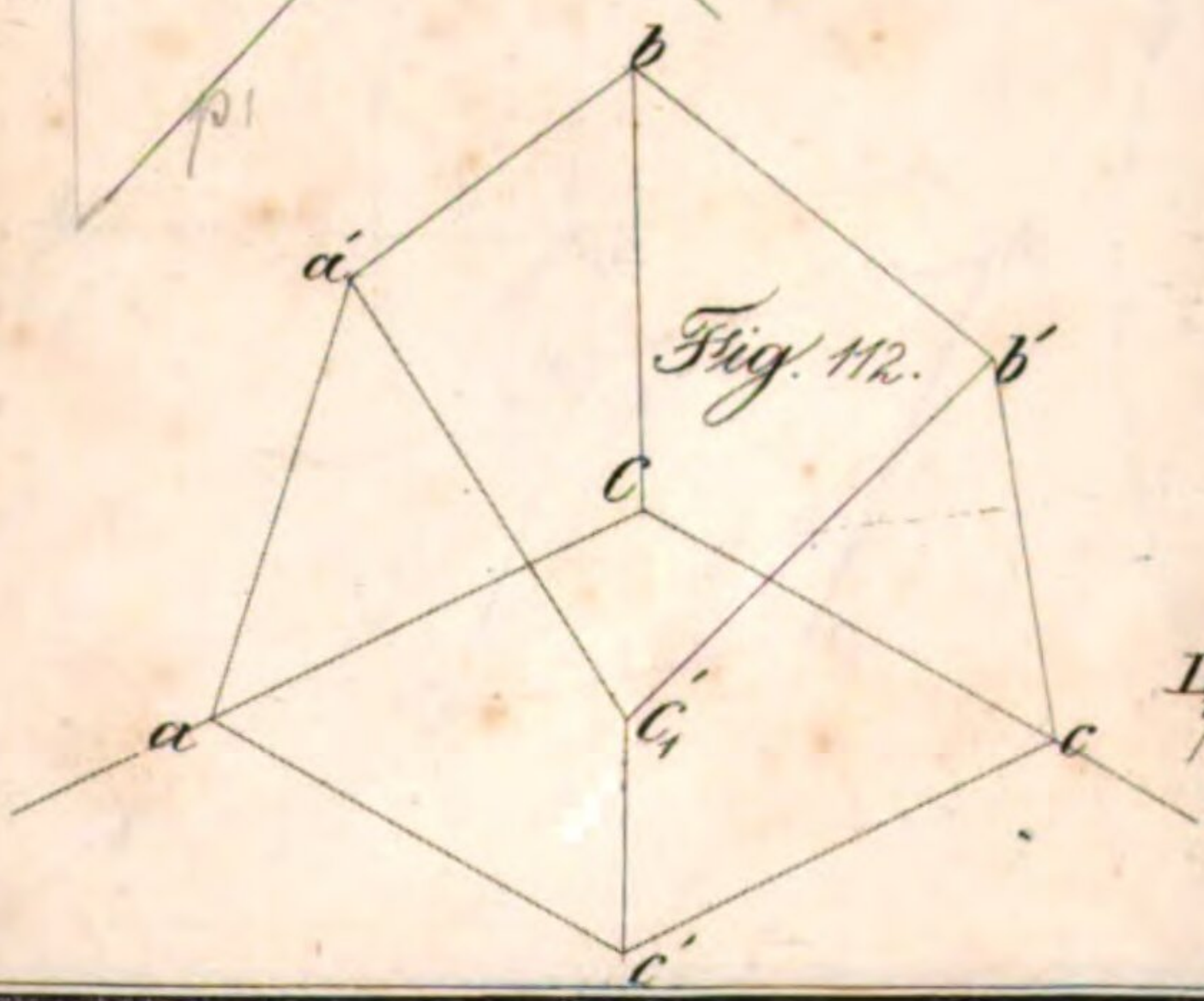
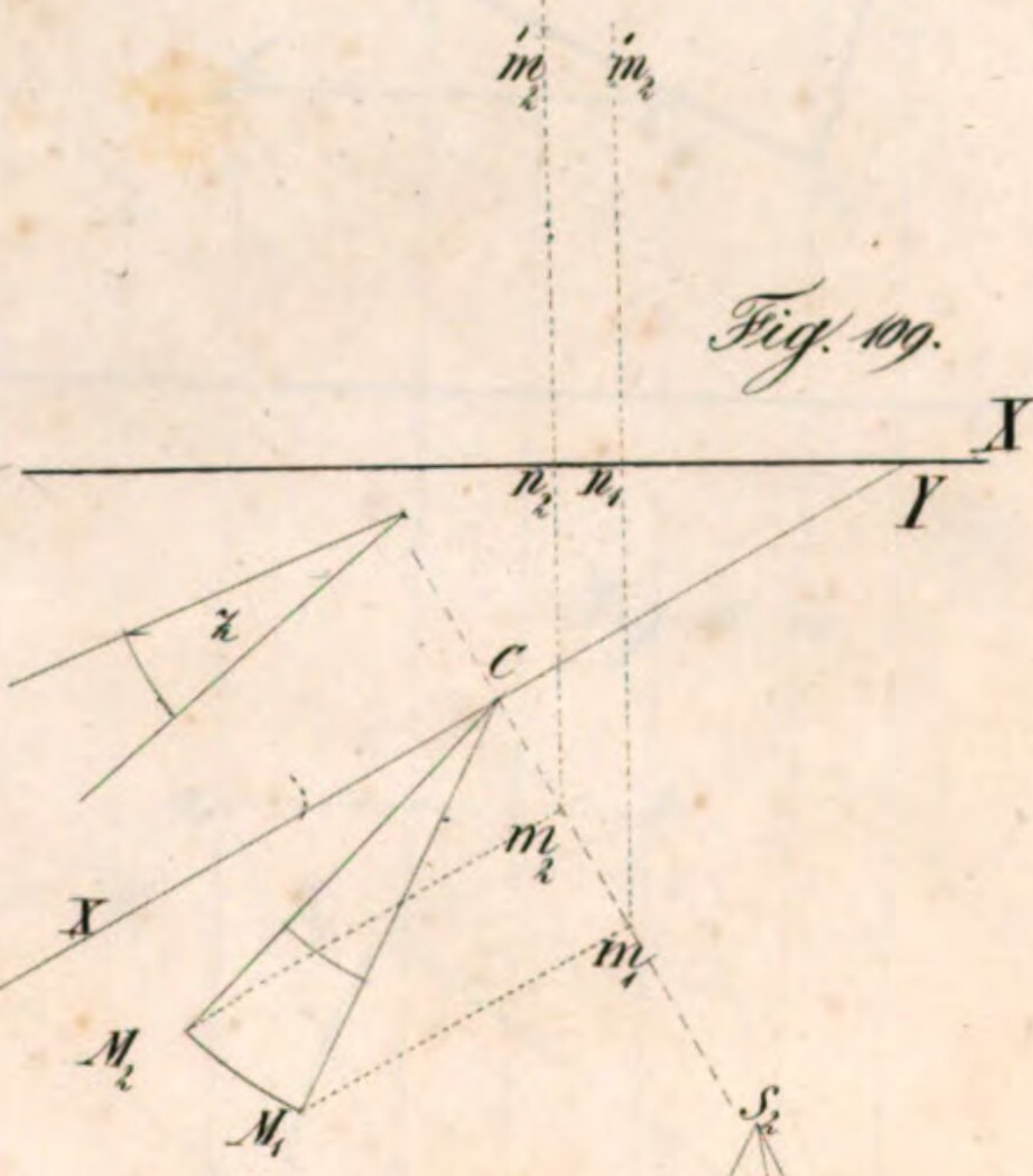
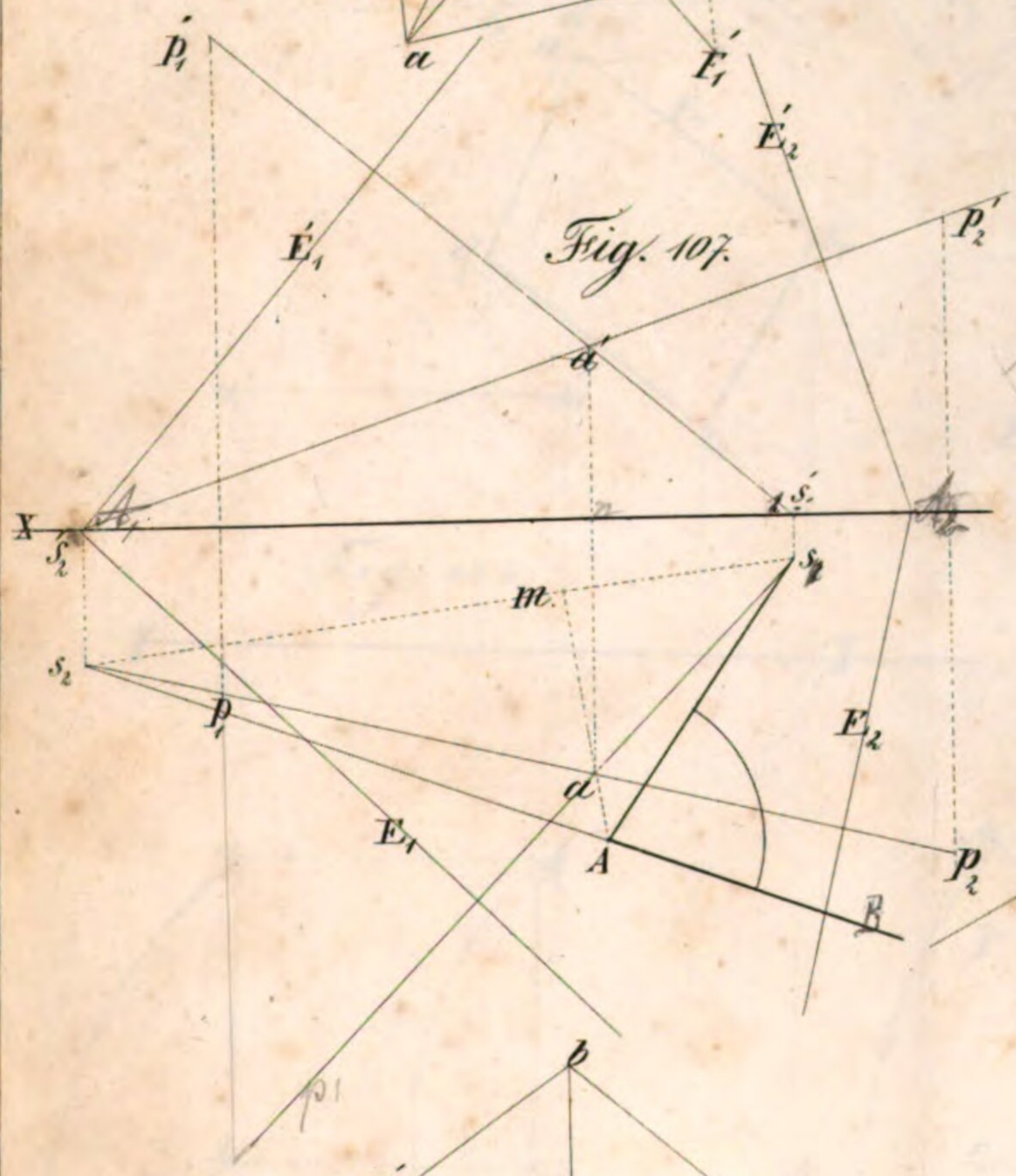
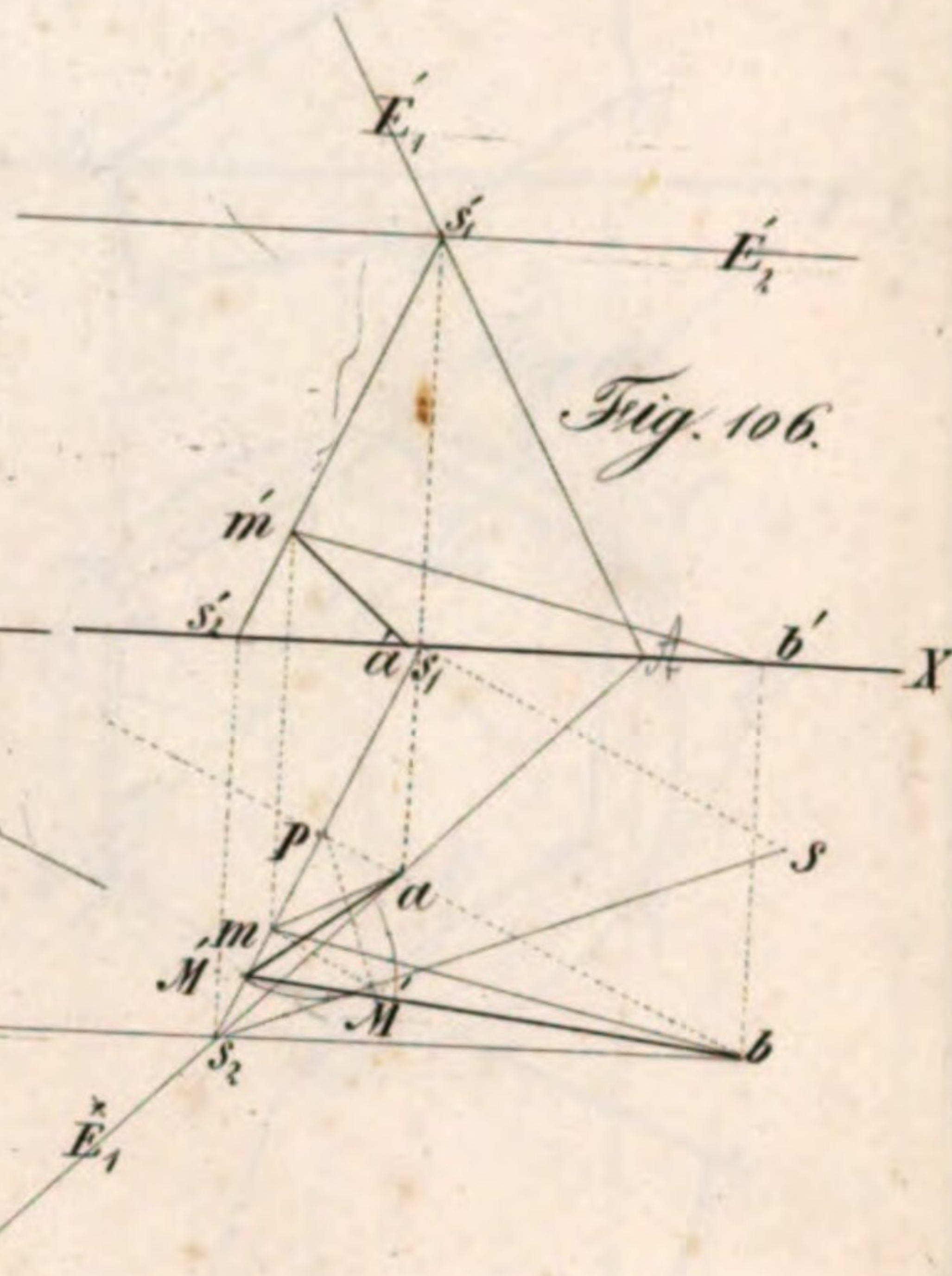
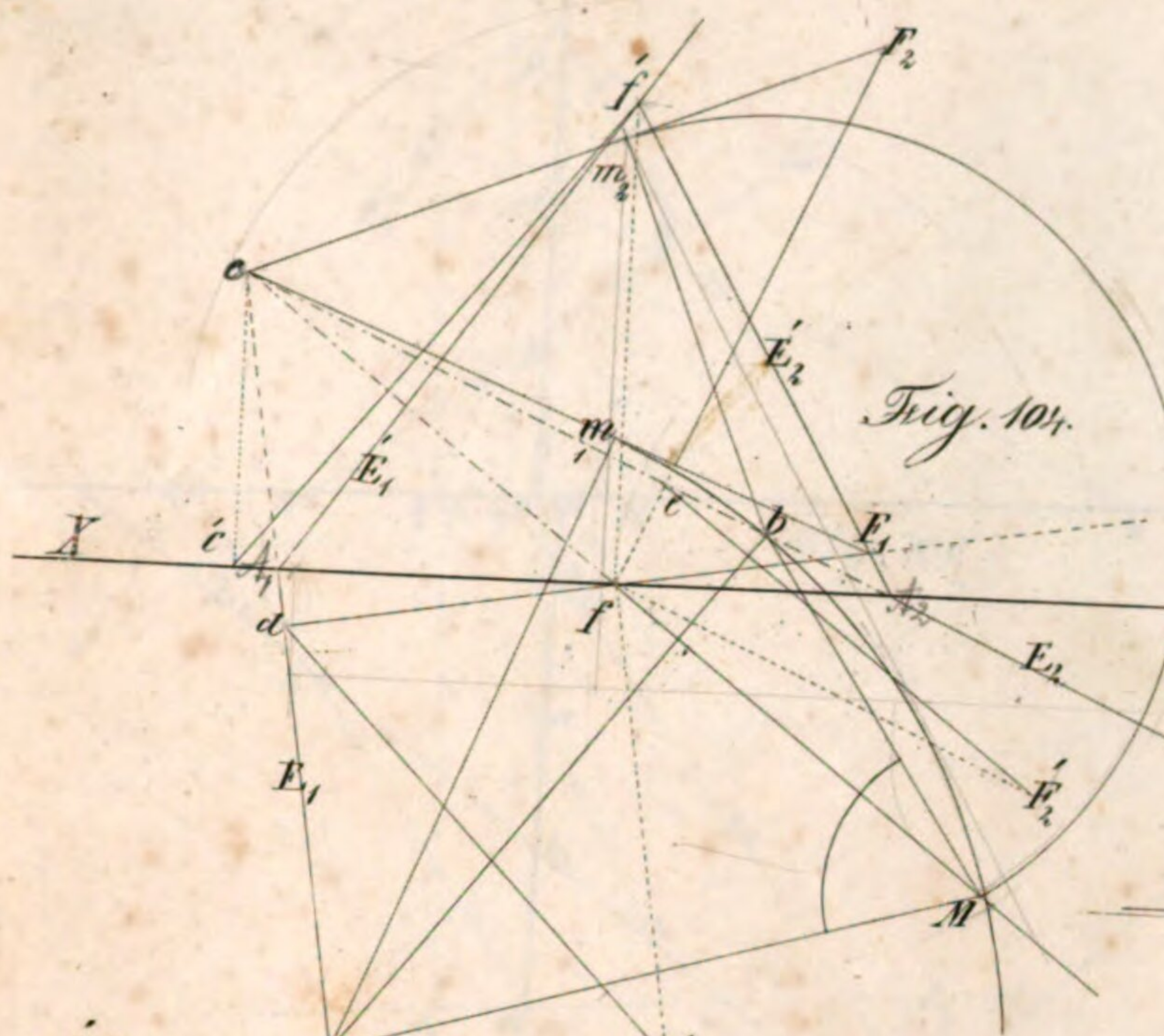


Fig. 105.





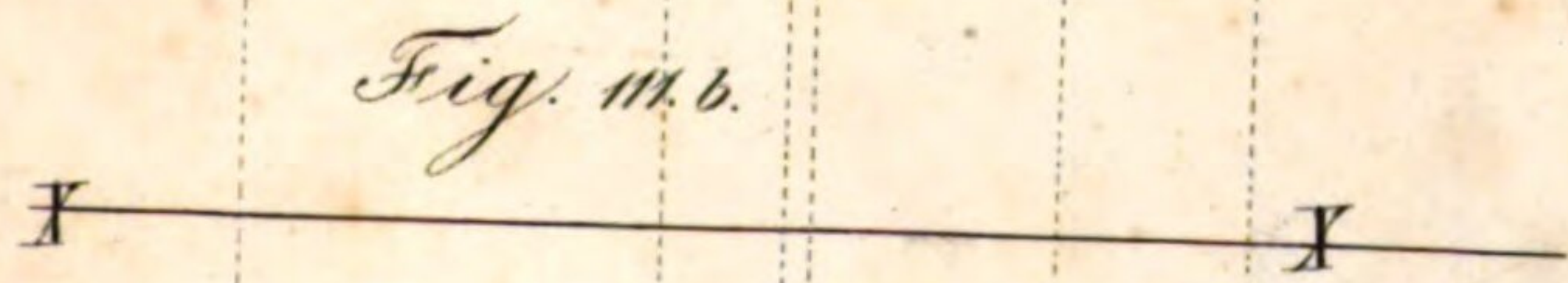
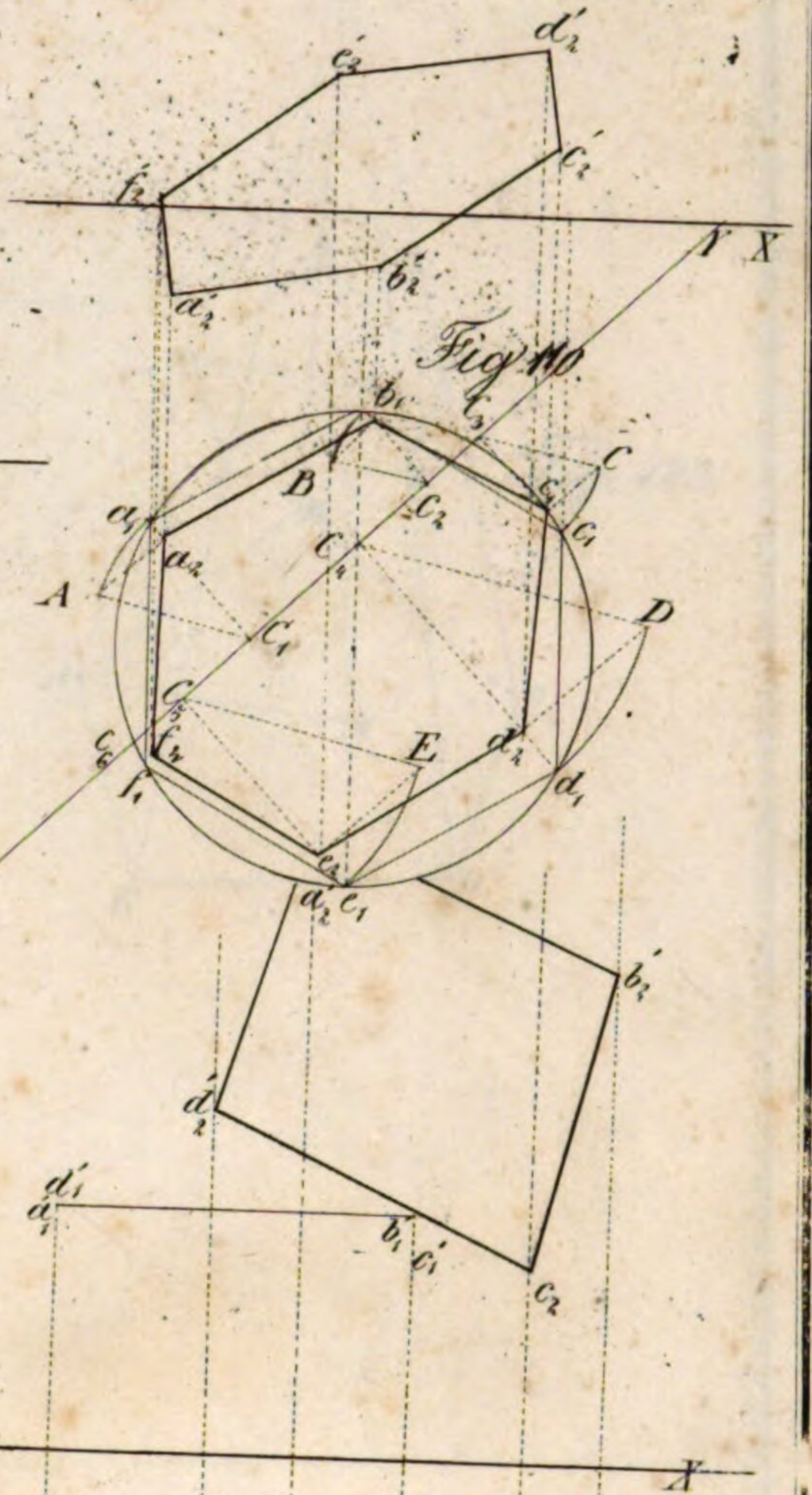
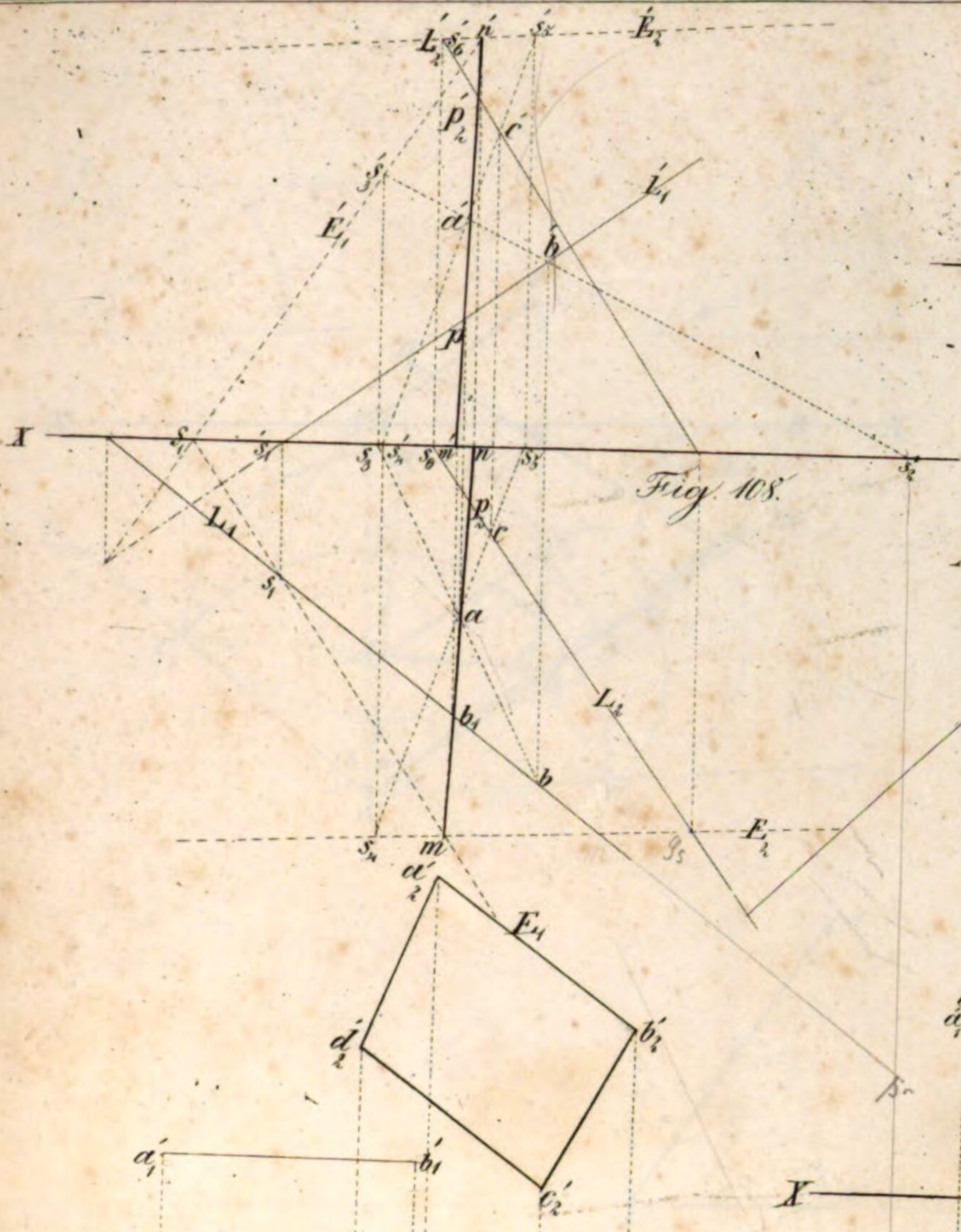
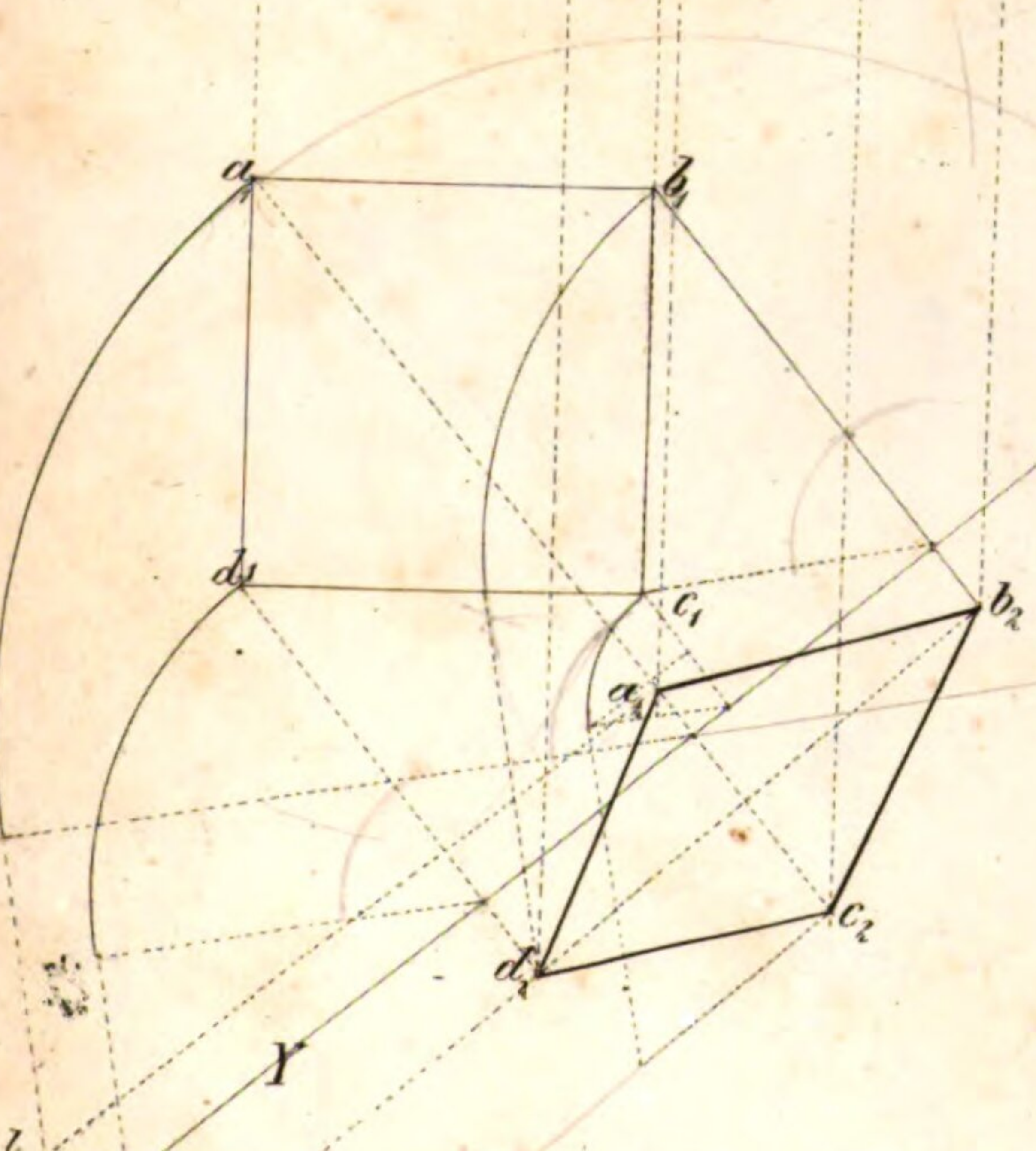
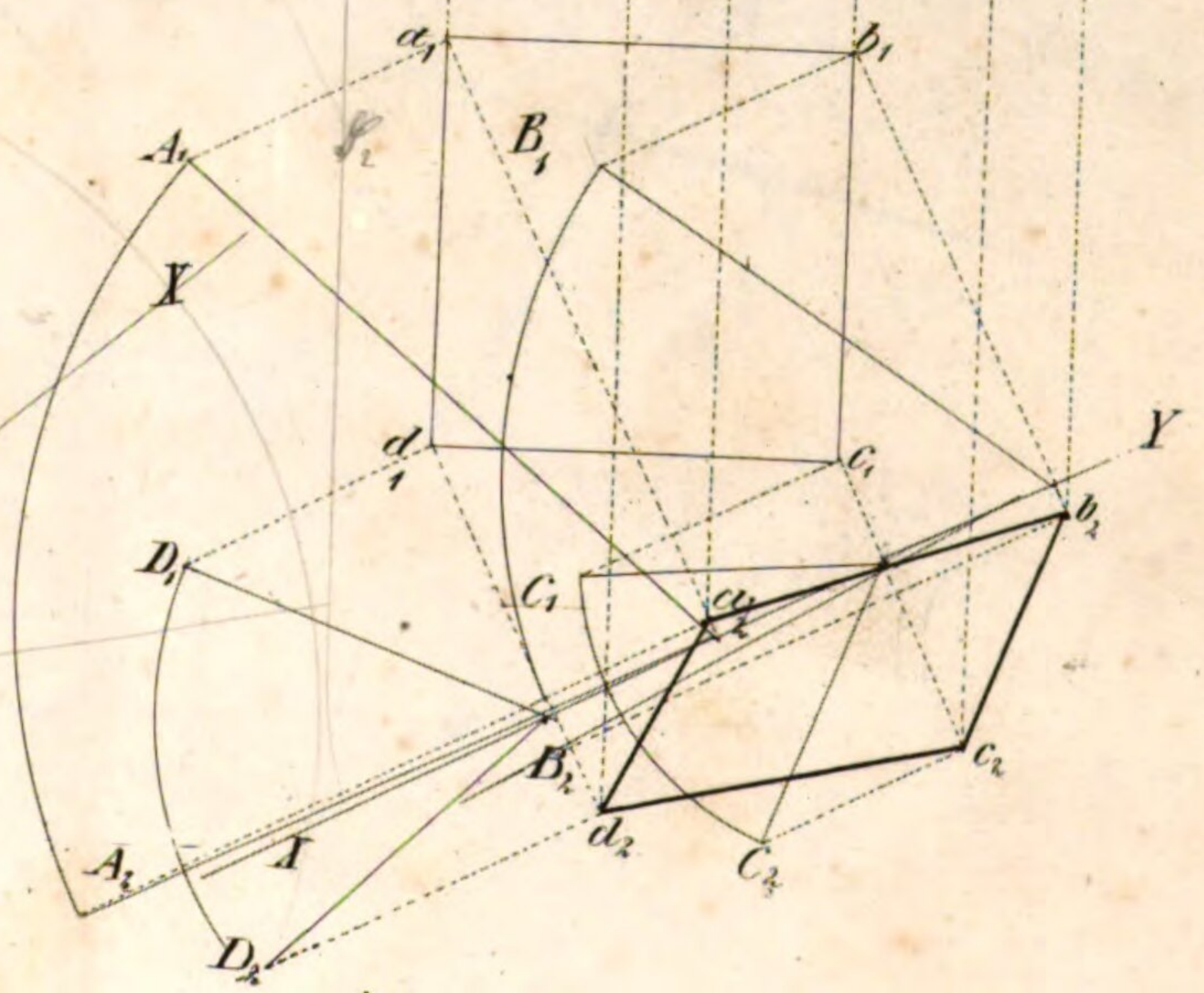
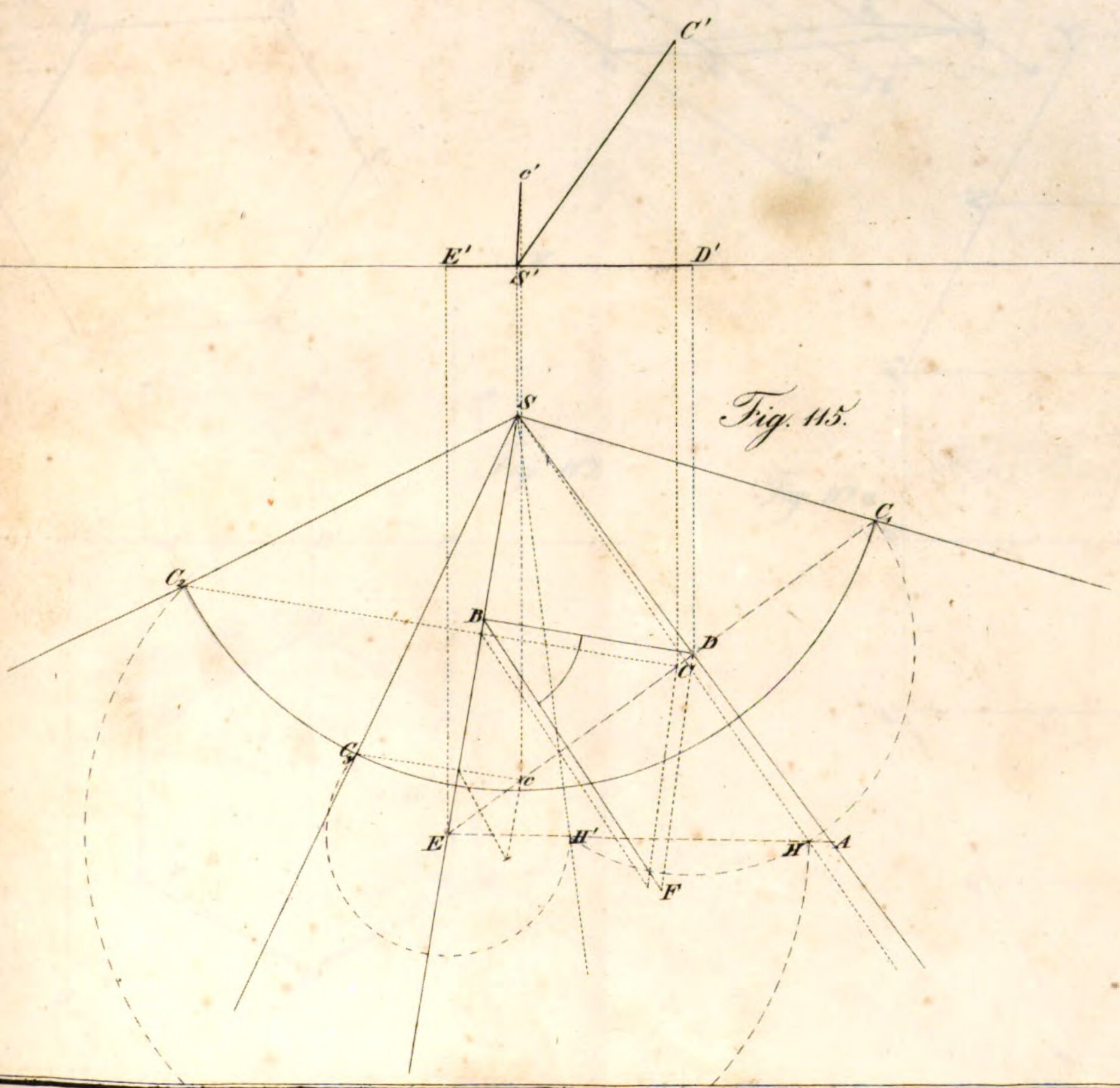
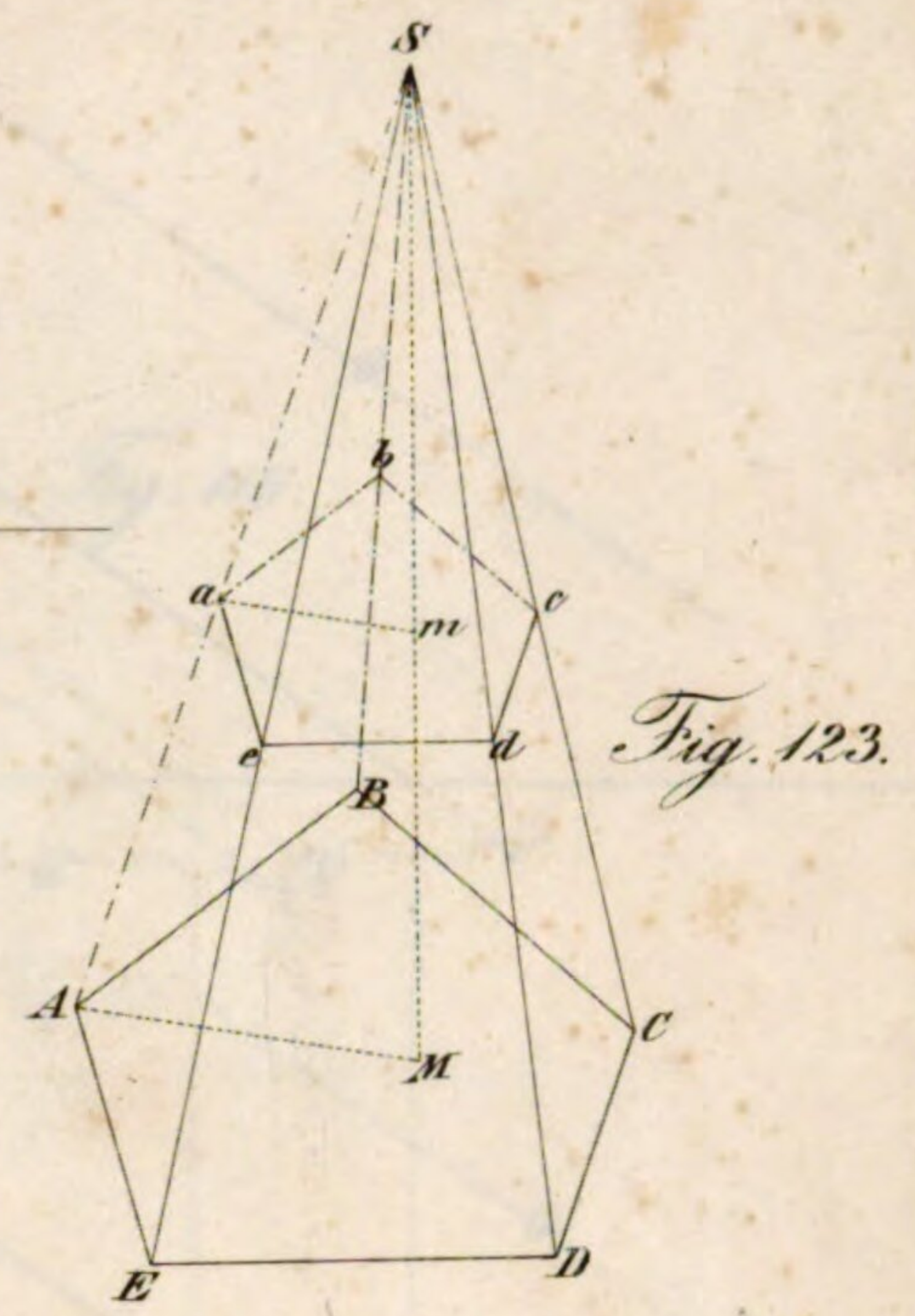
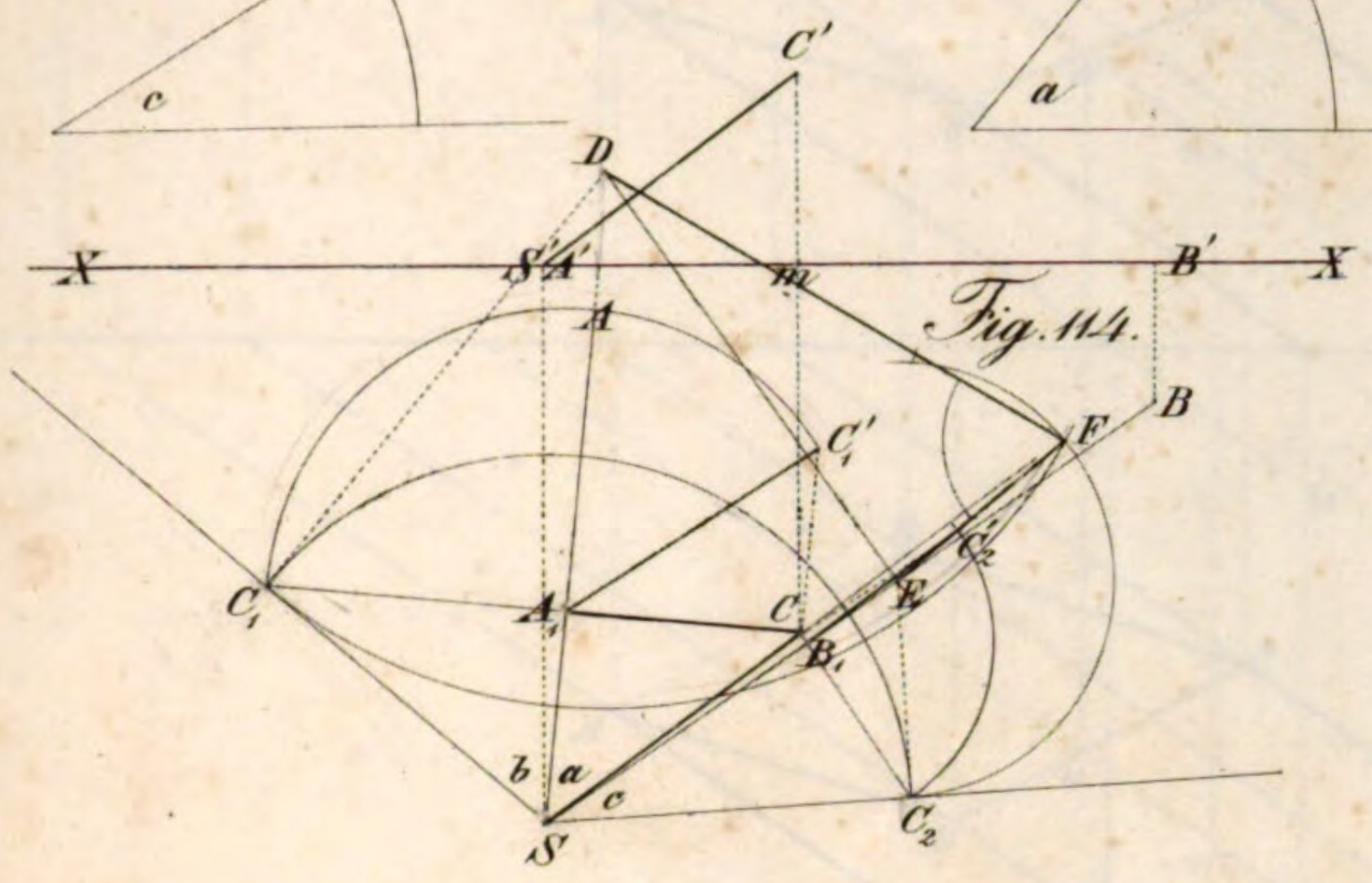
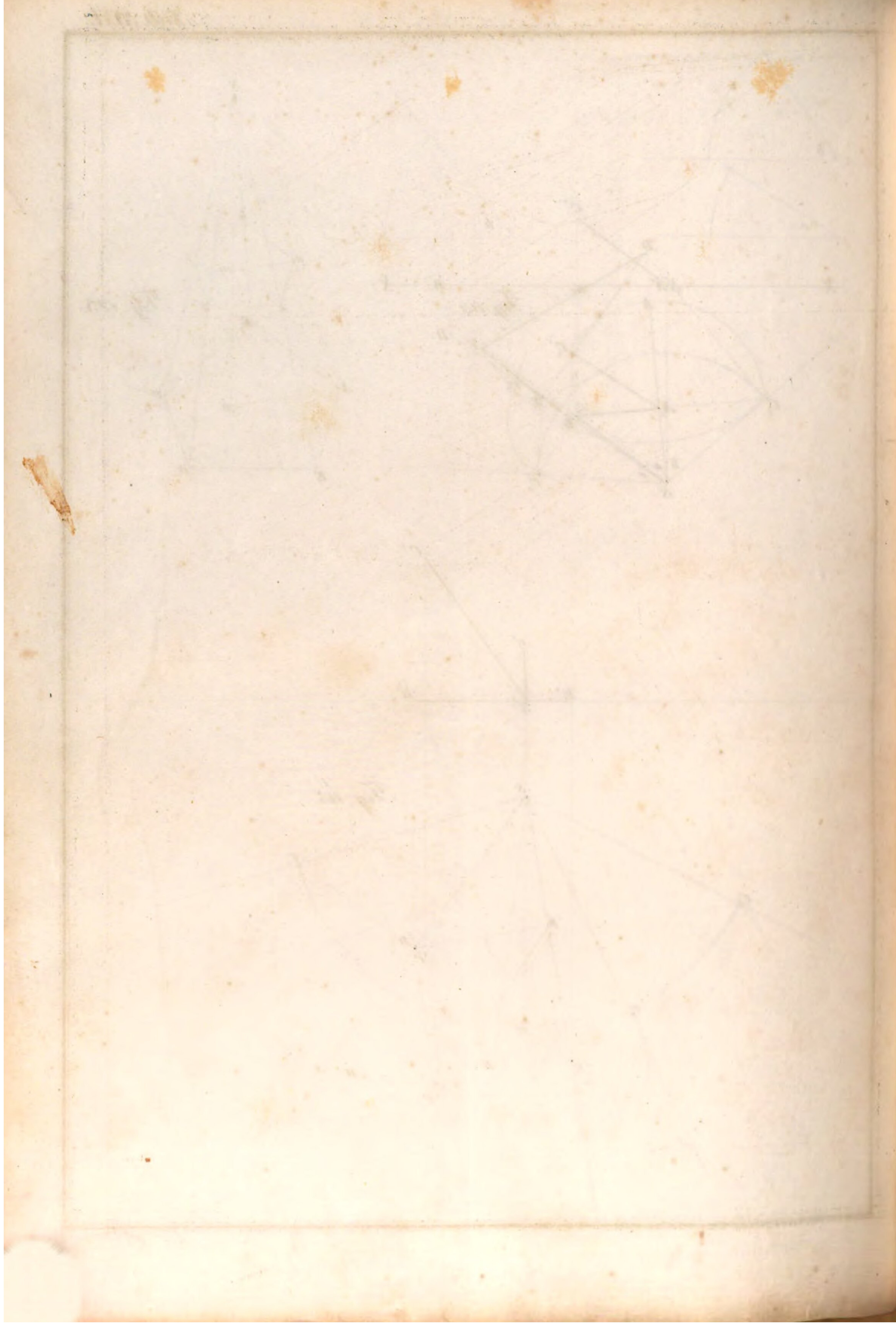


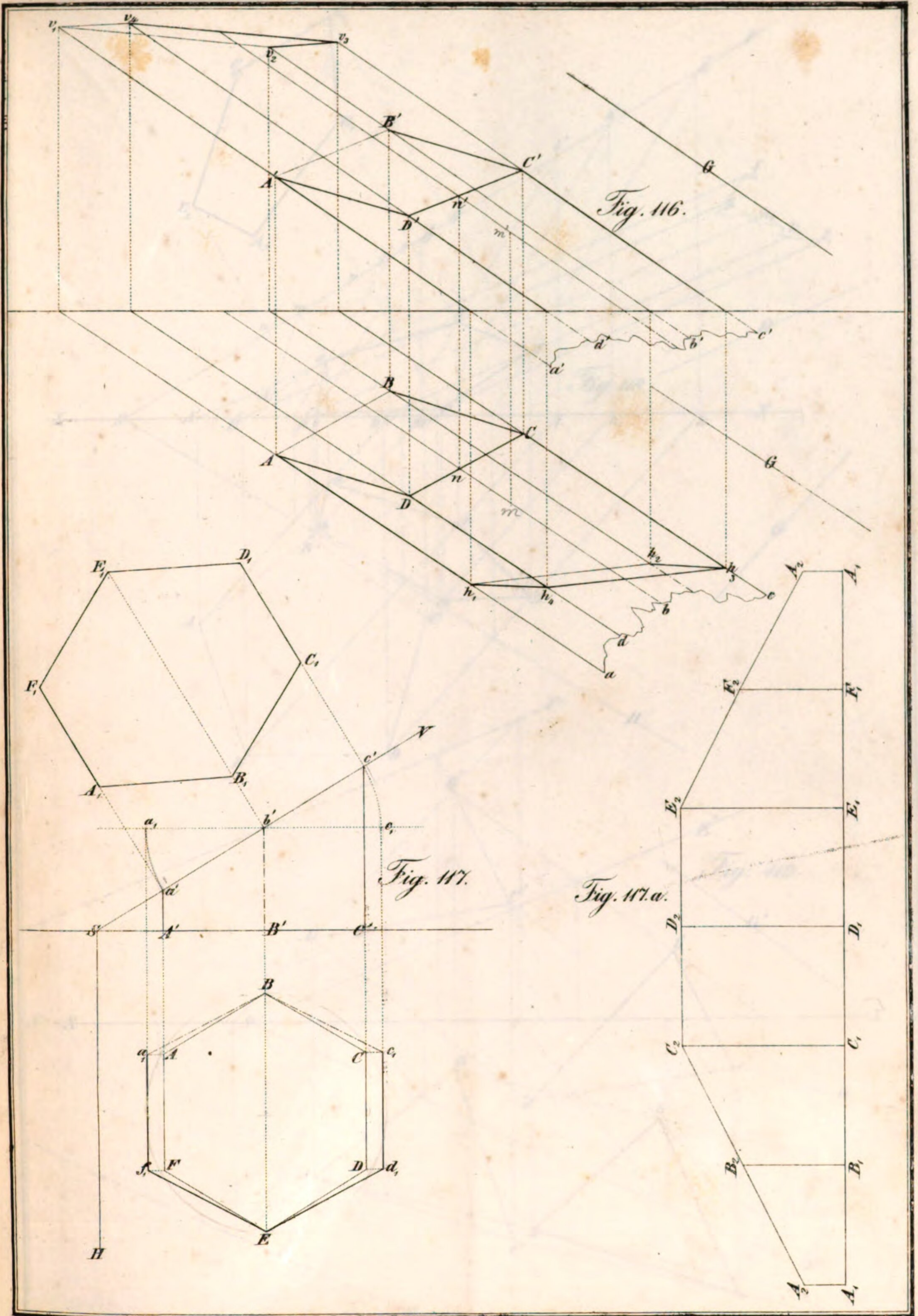
Fig. 111. a

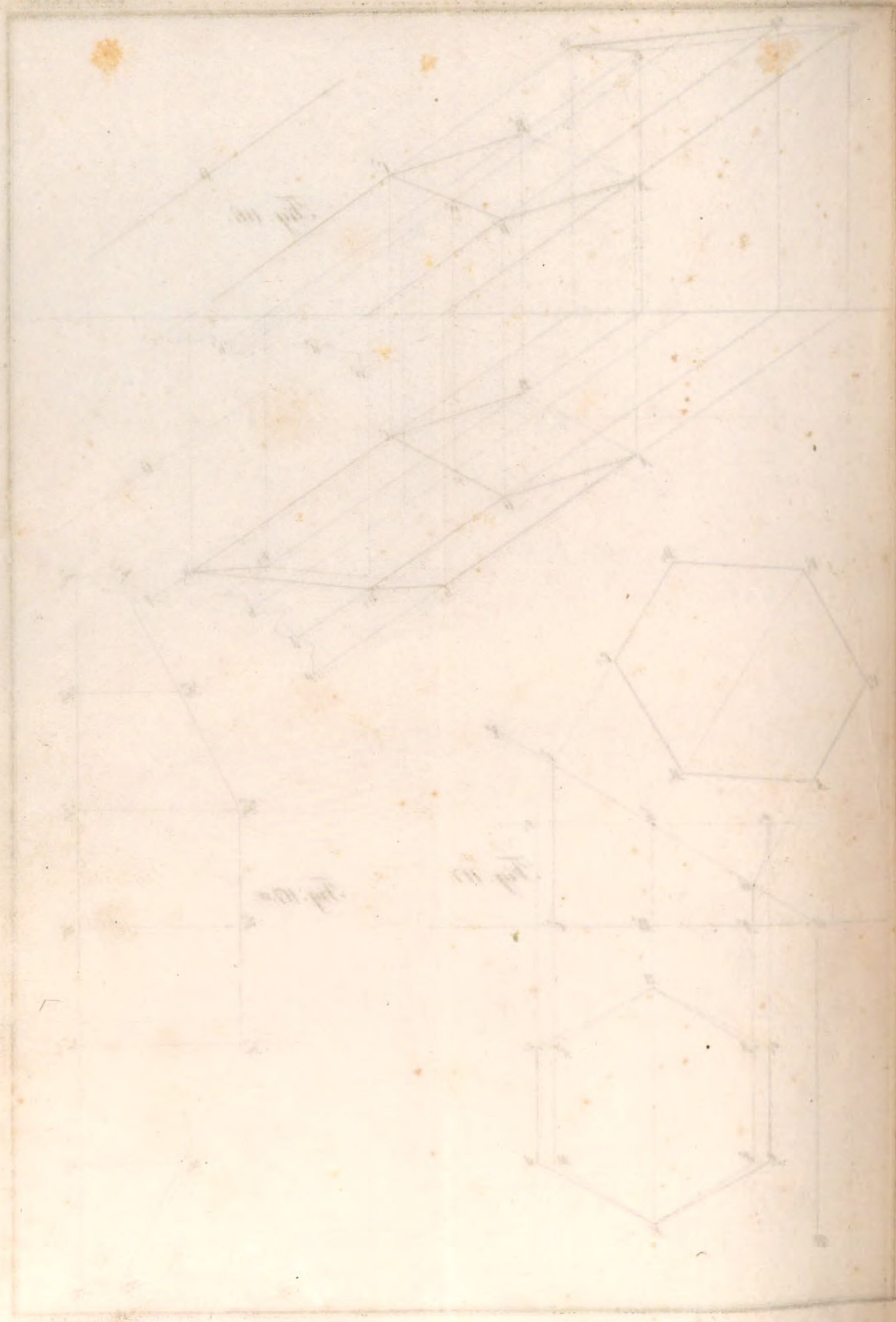


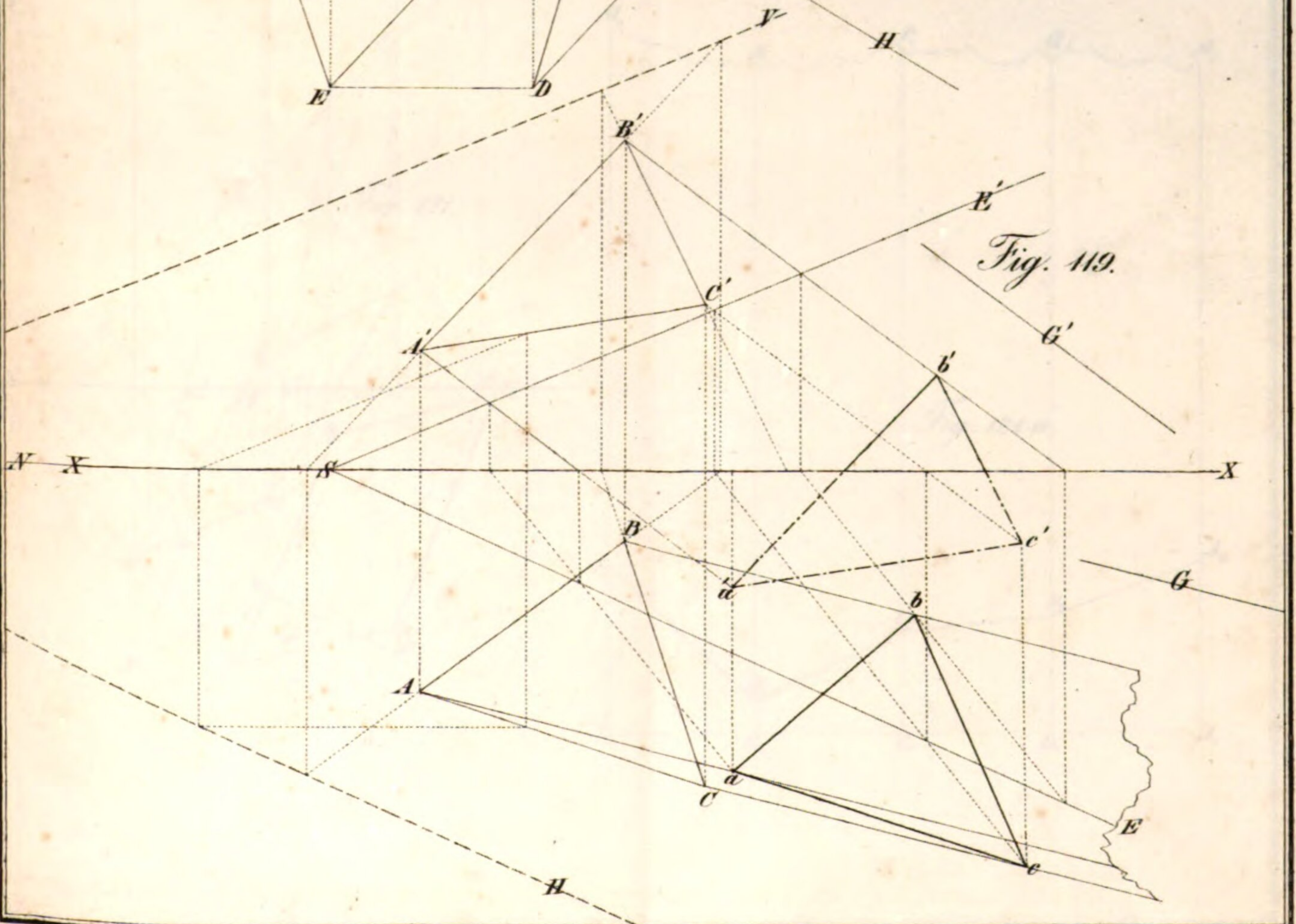
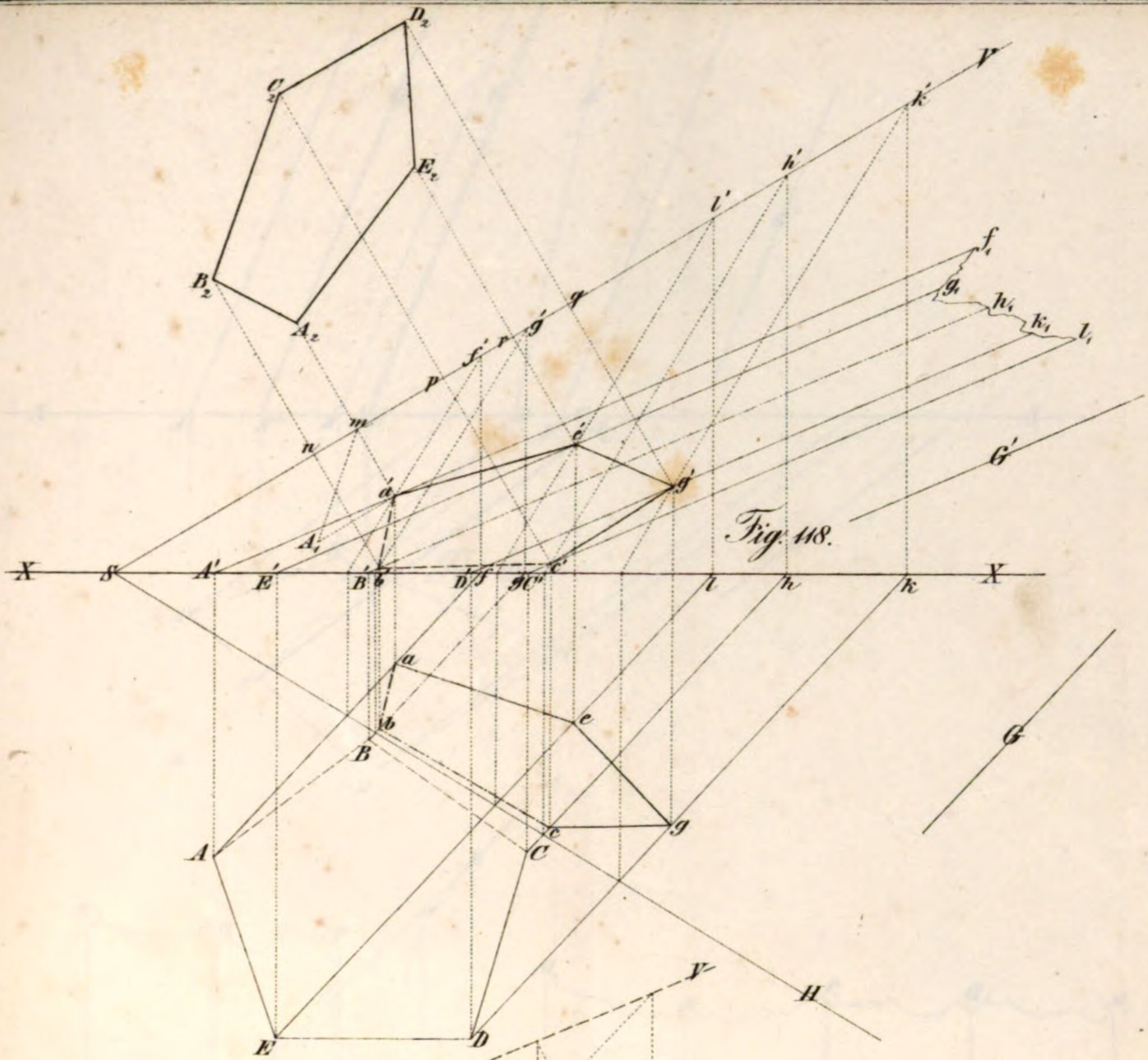


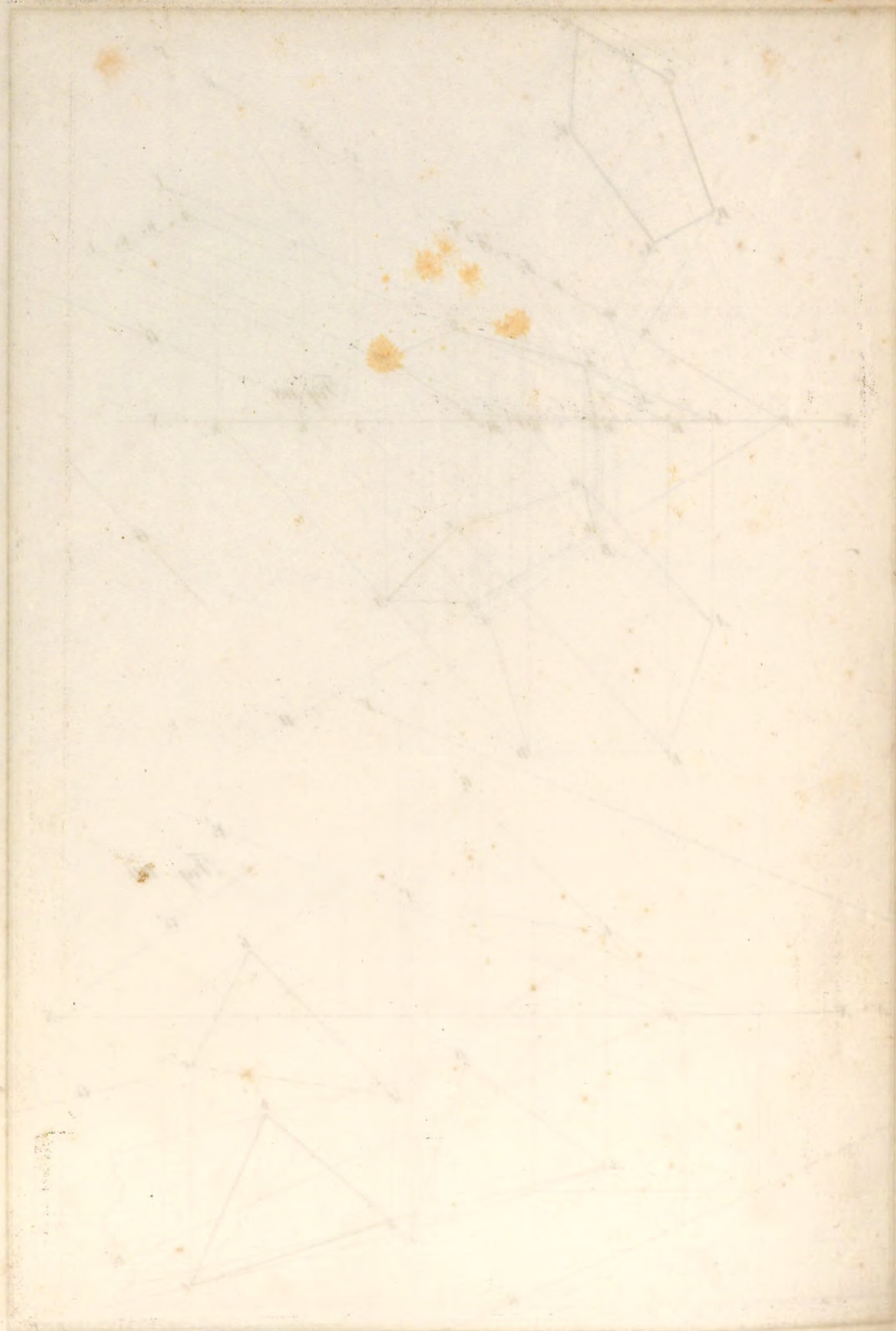


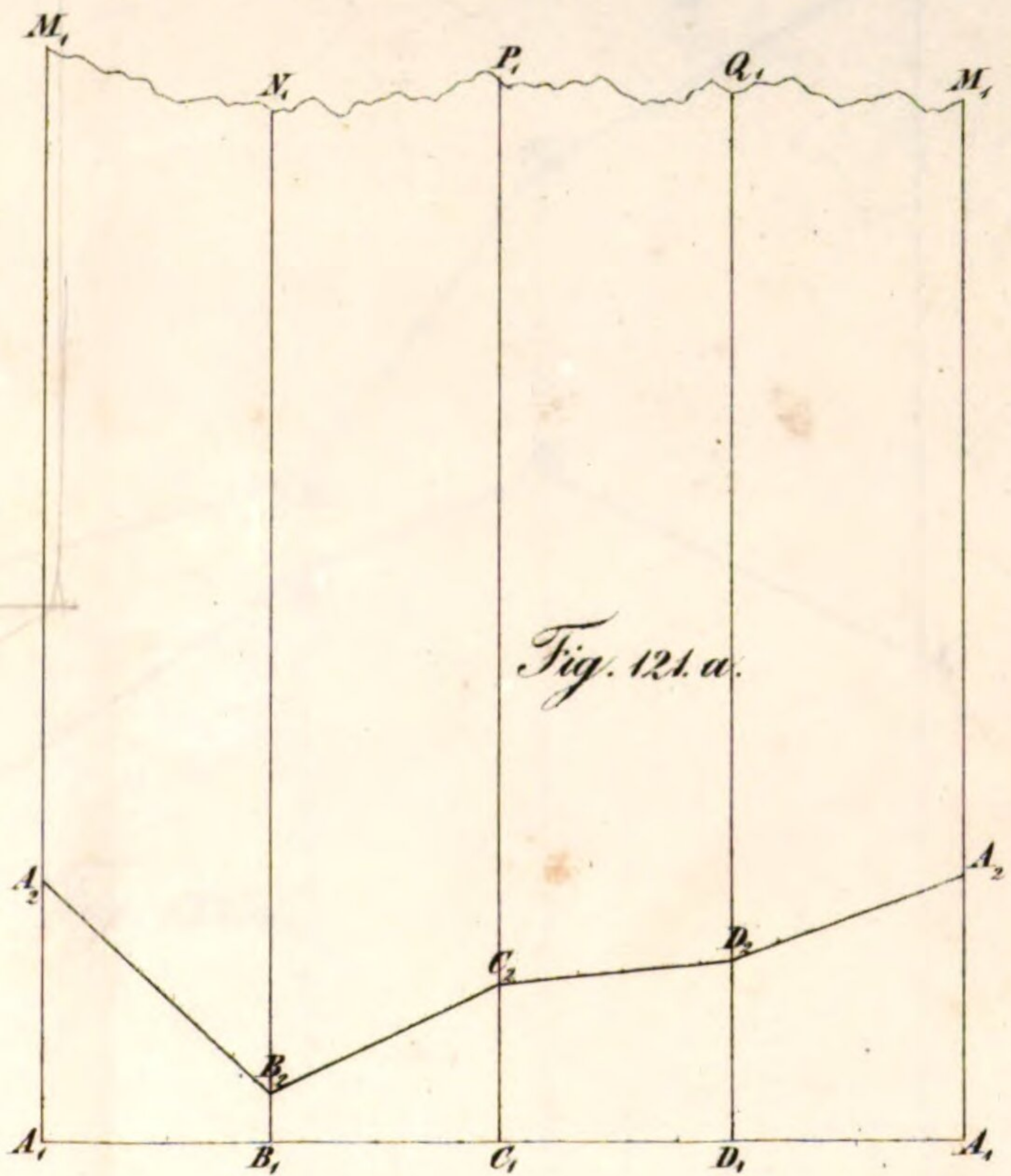
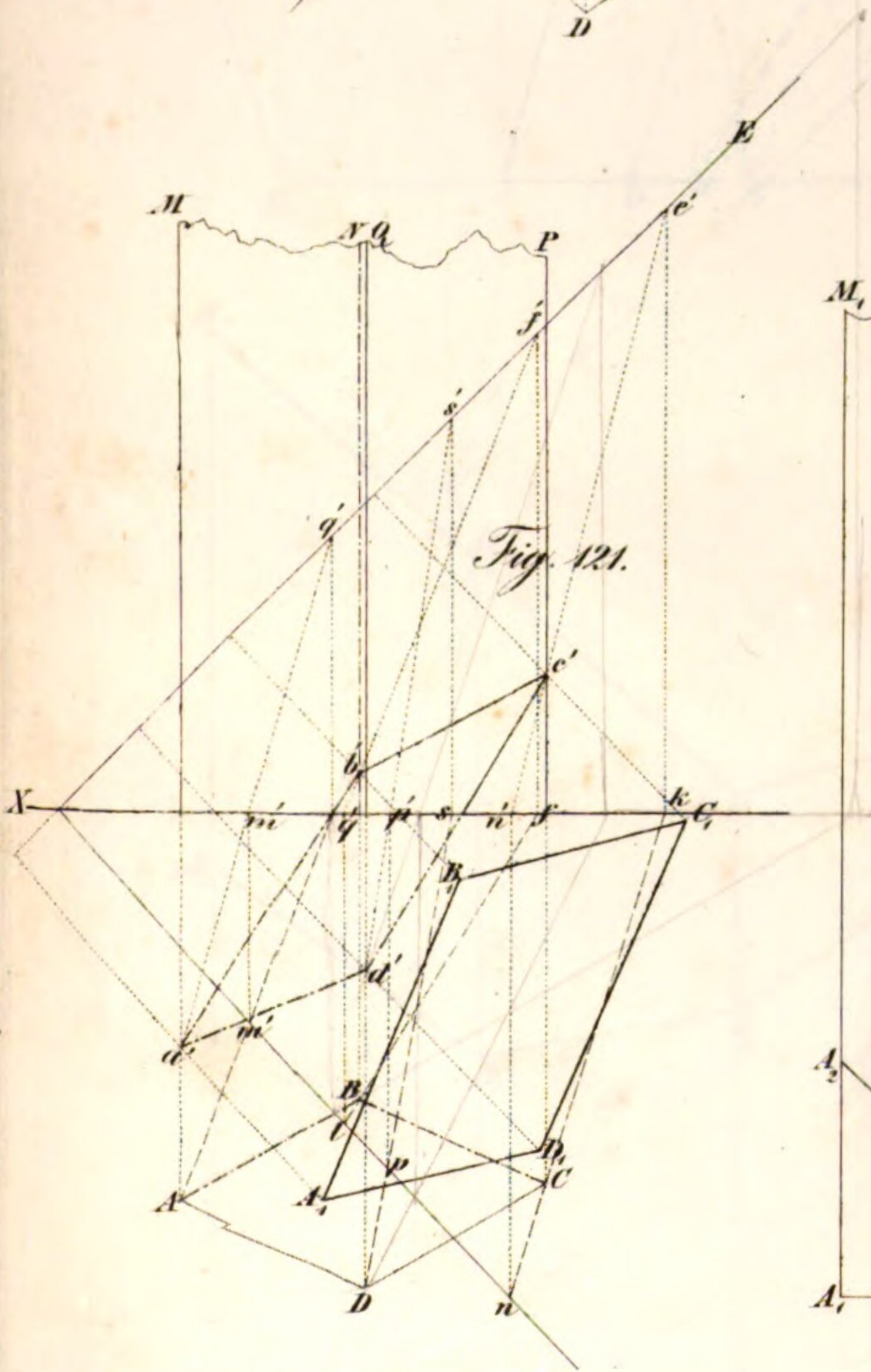
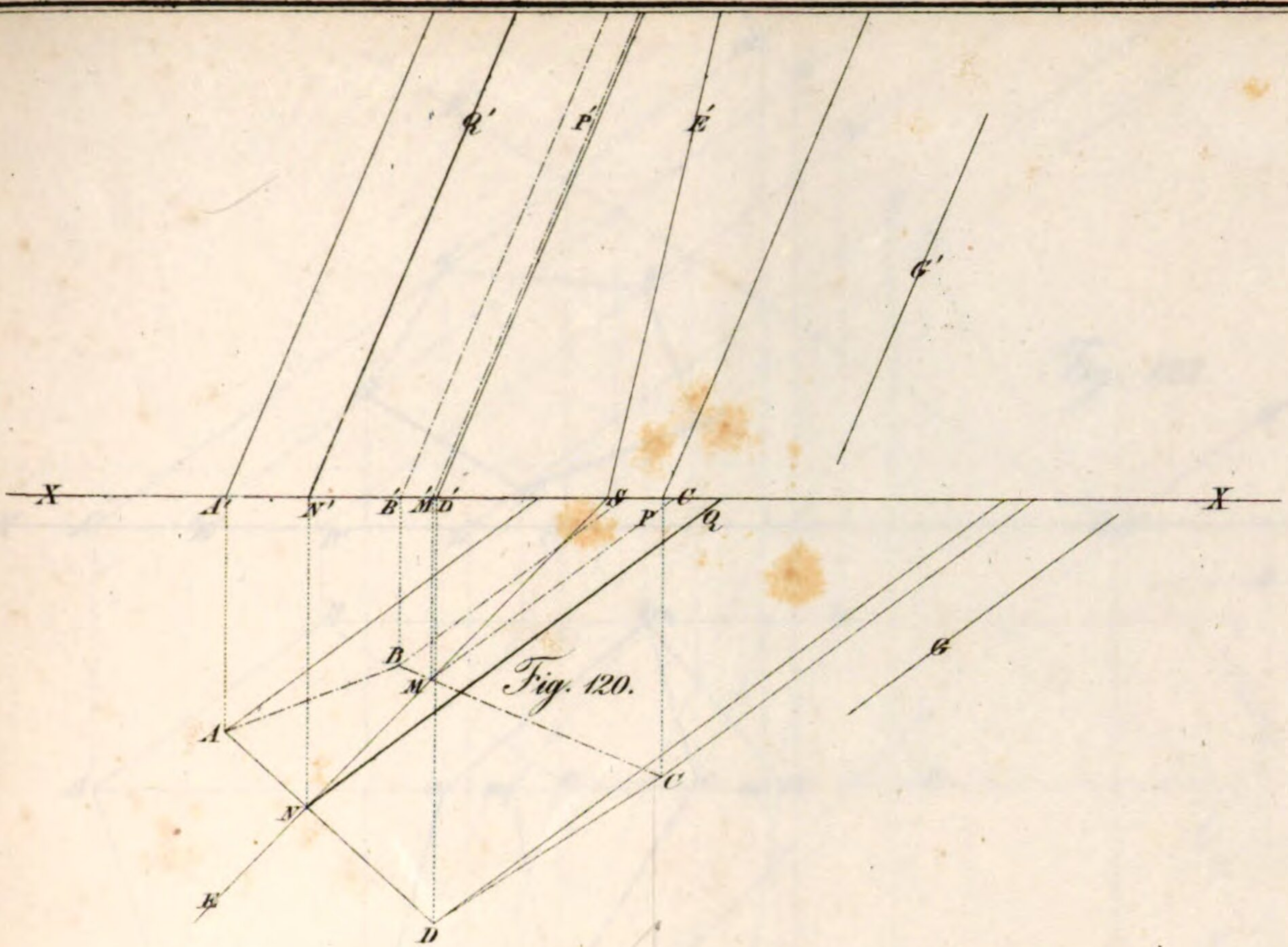




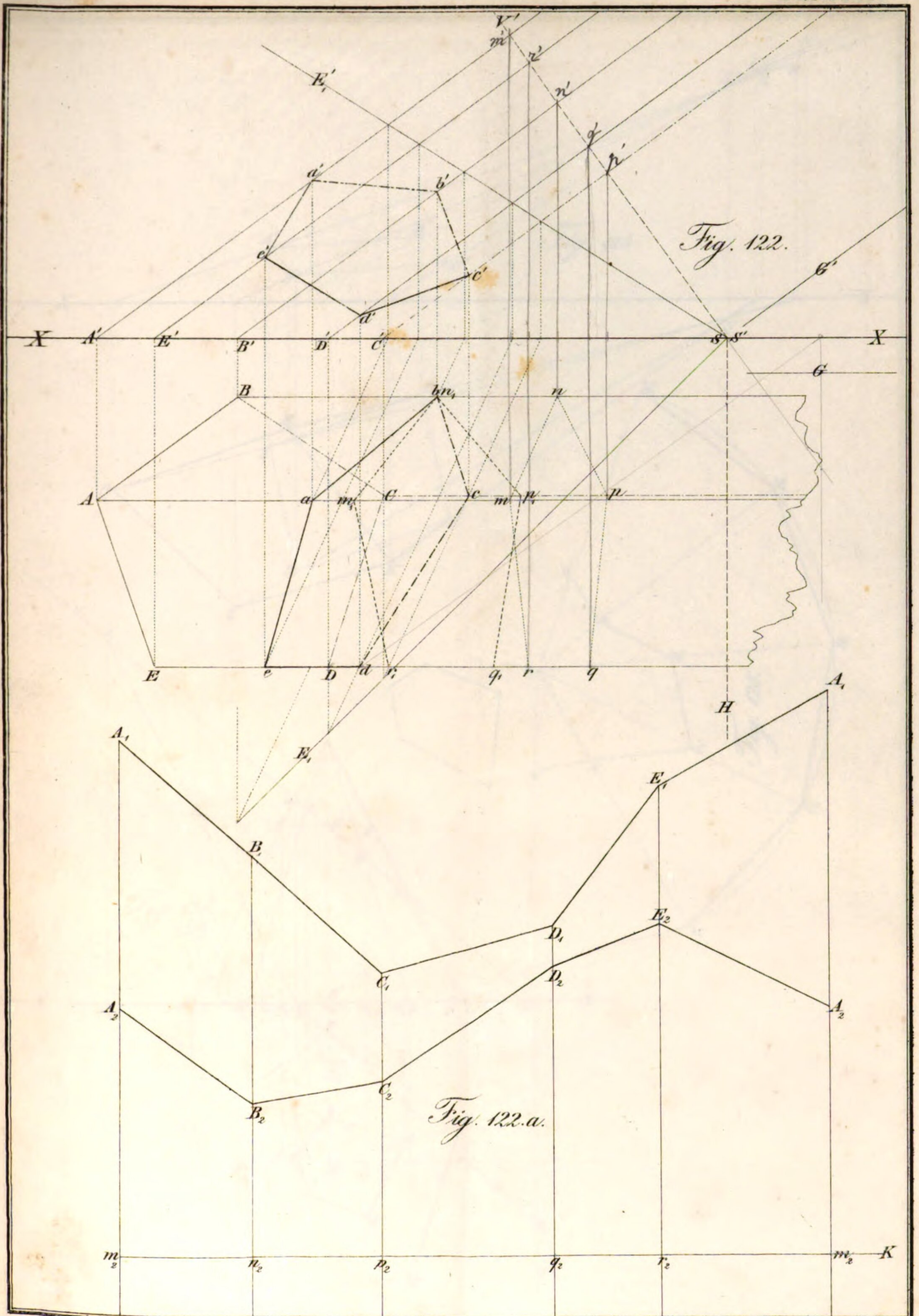


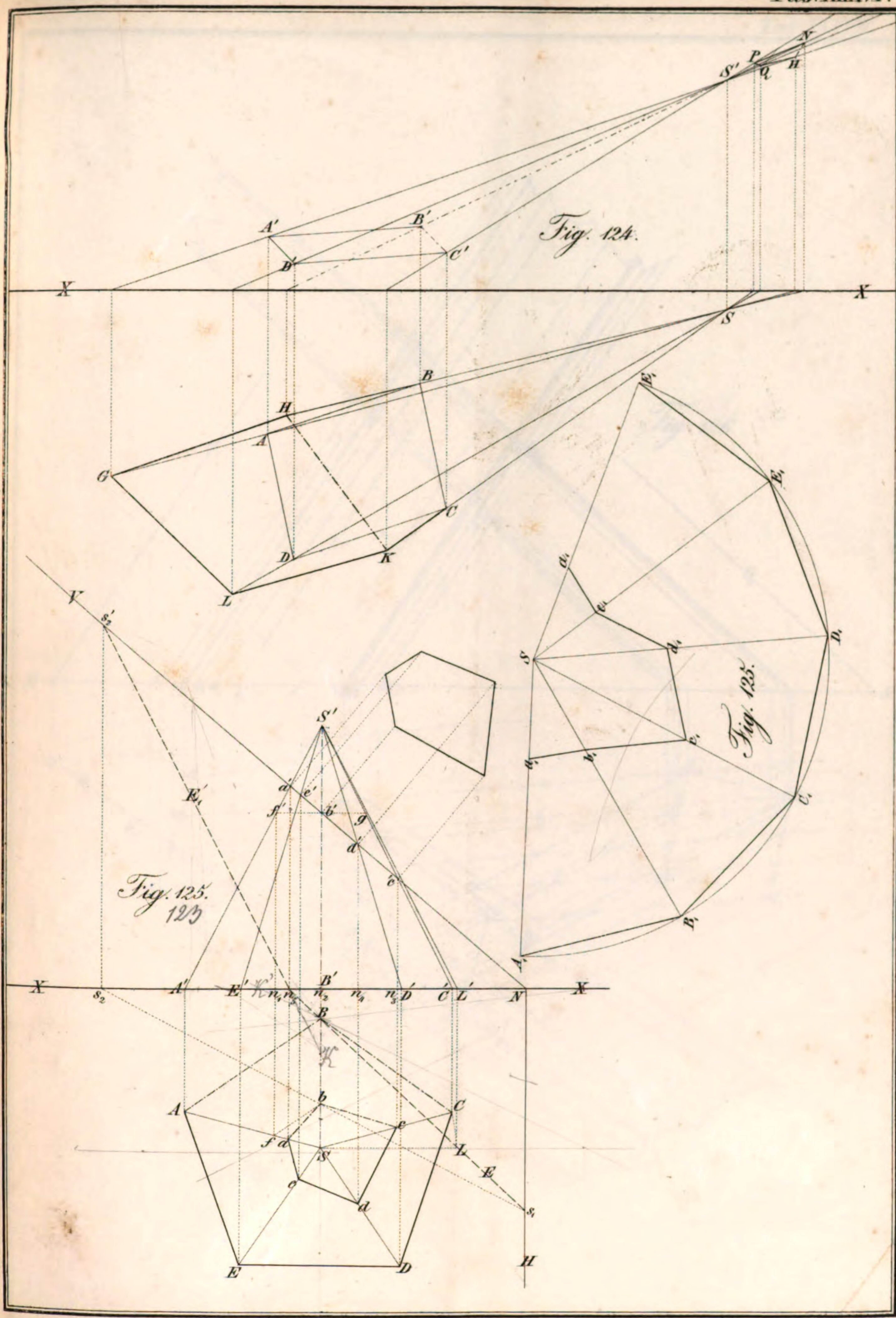


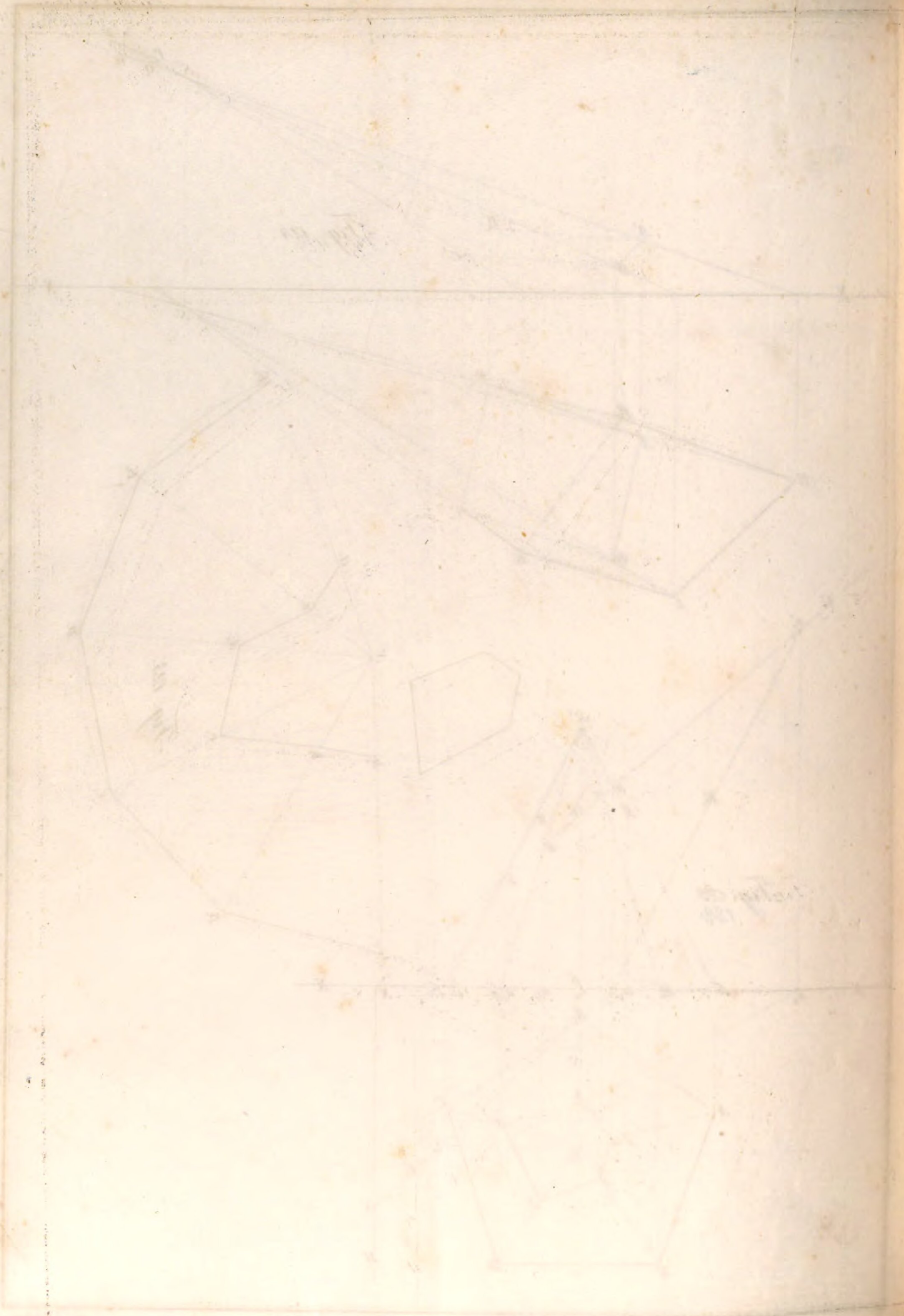


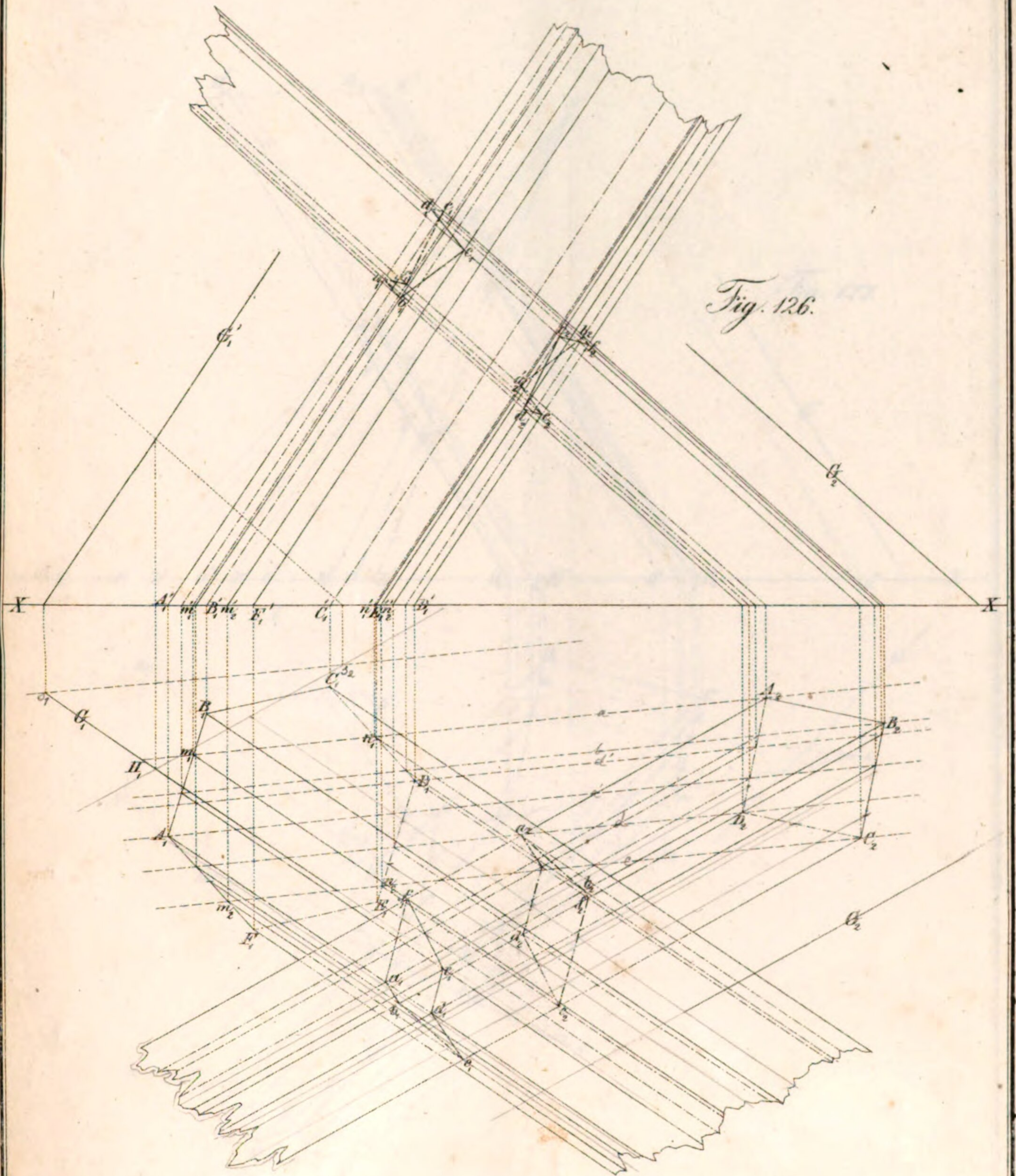


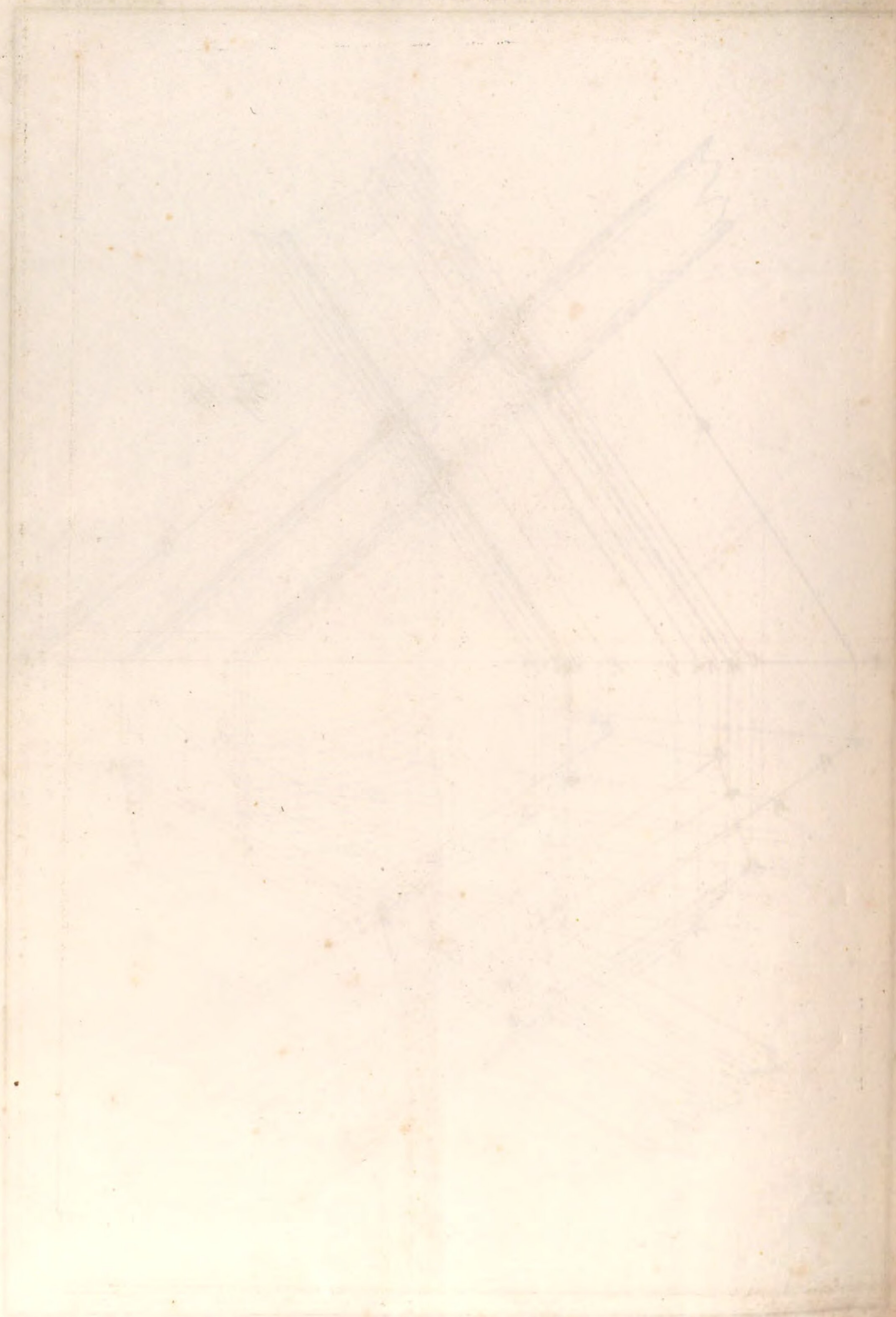


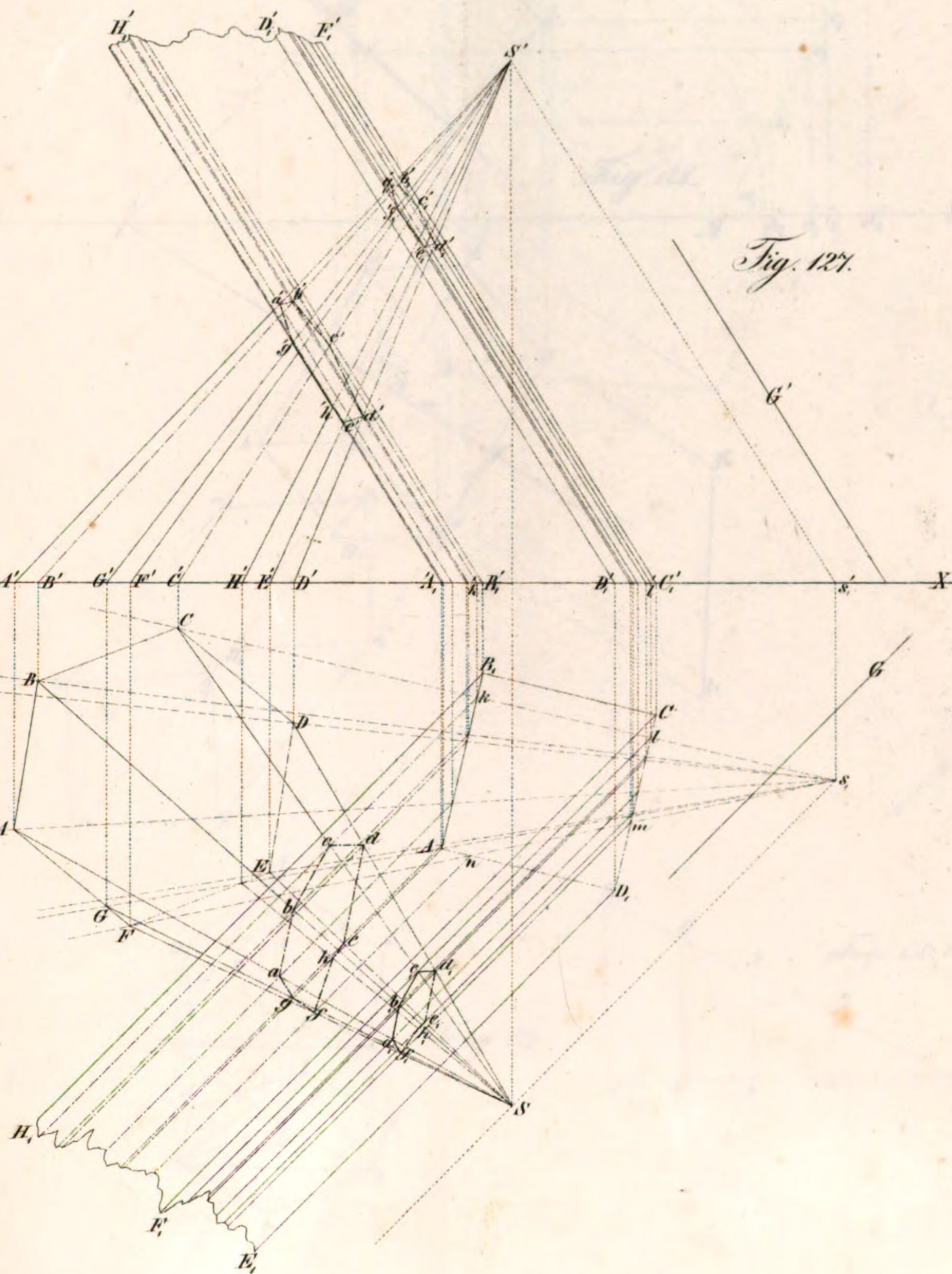


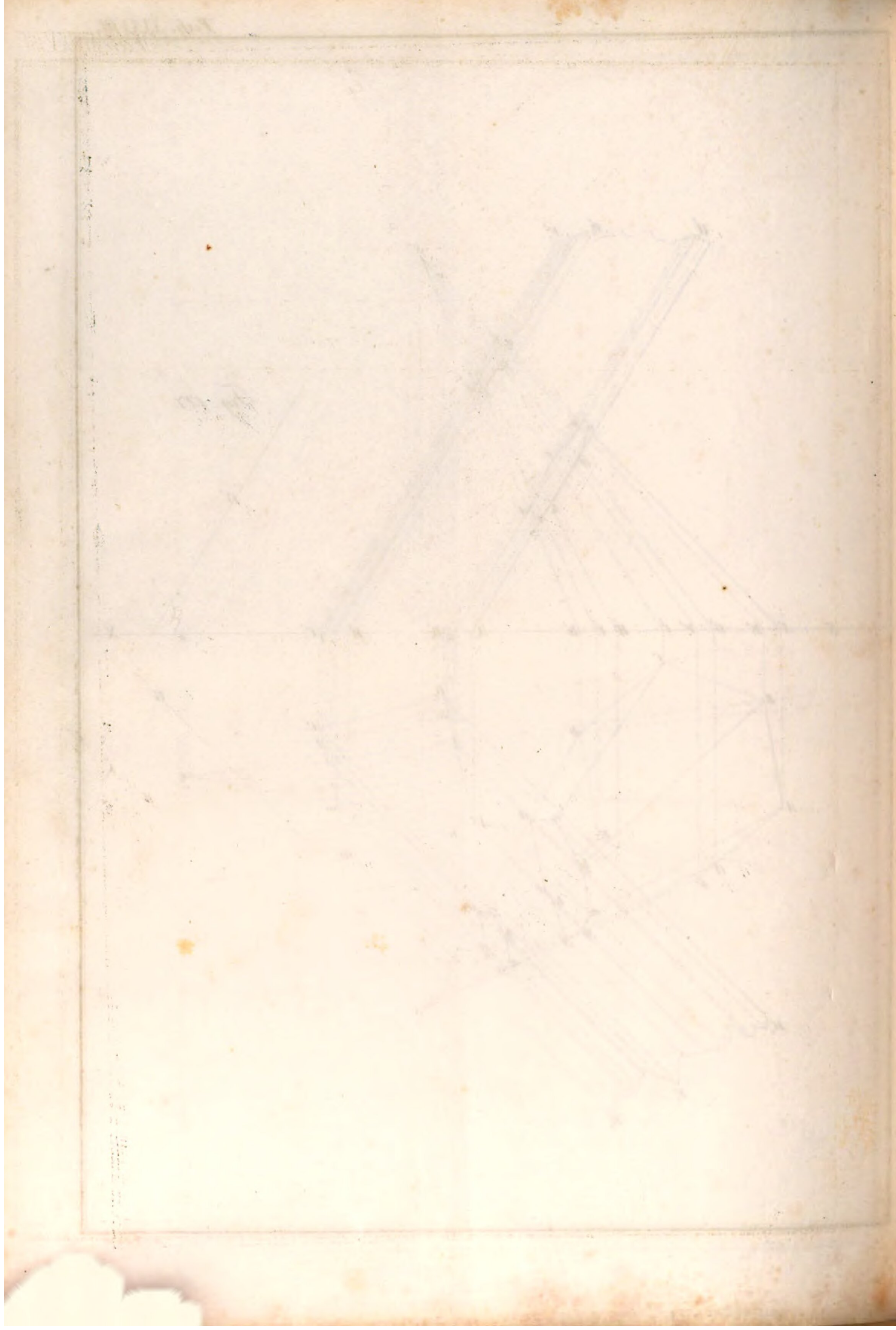












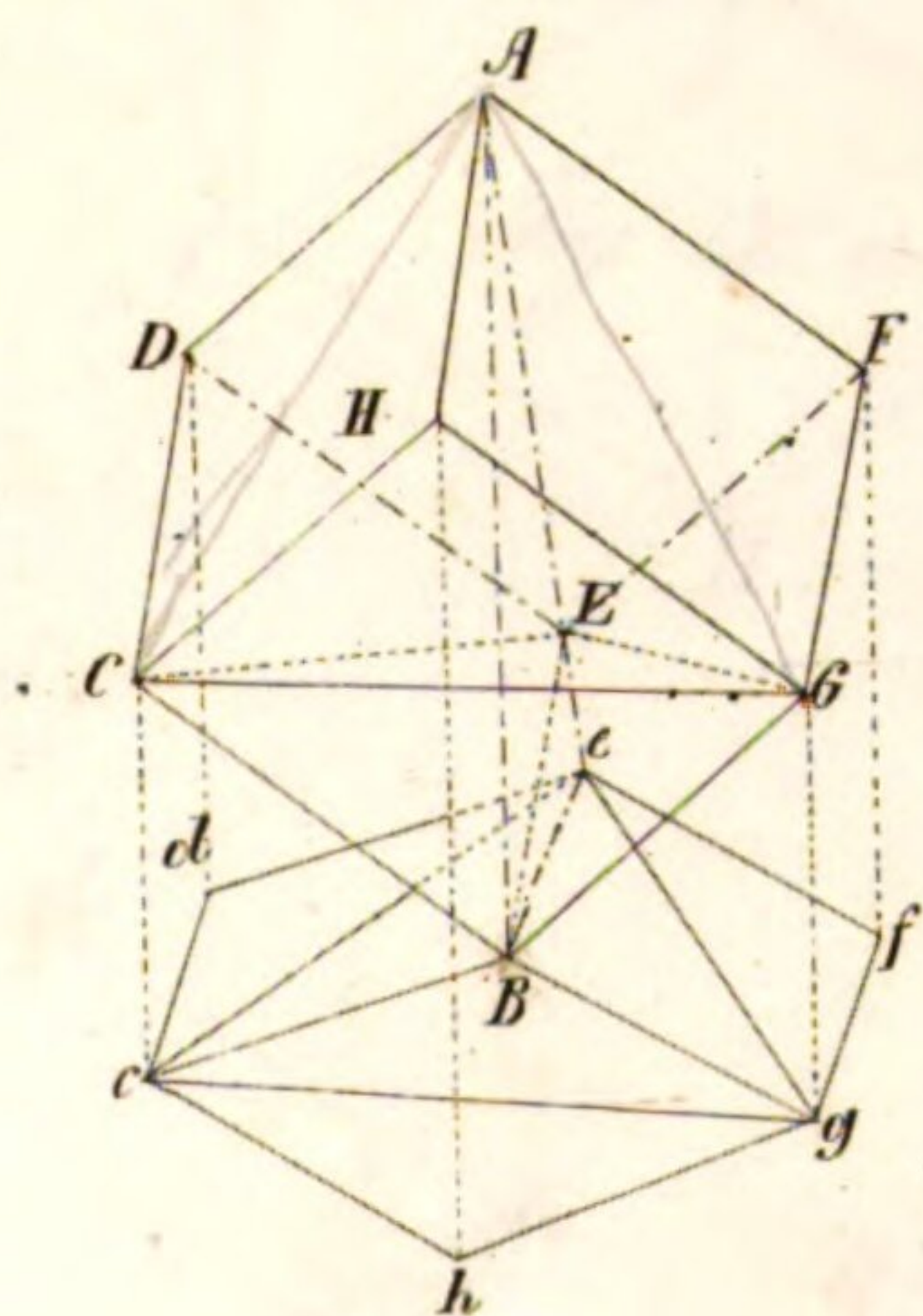
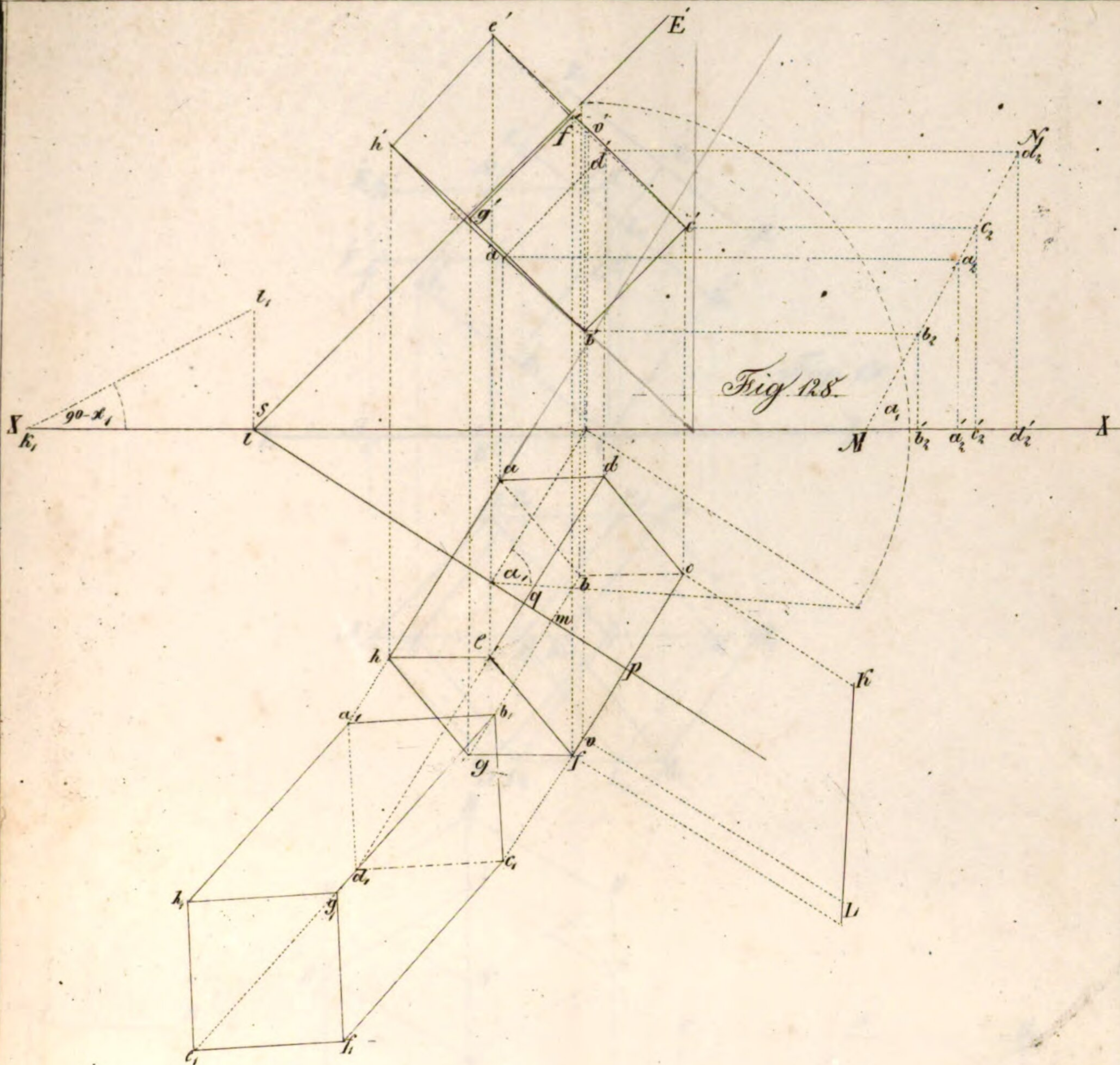


Fig. 129

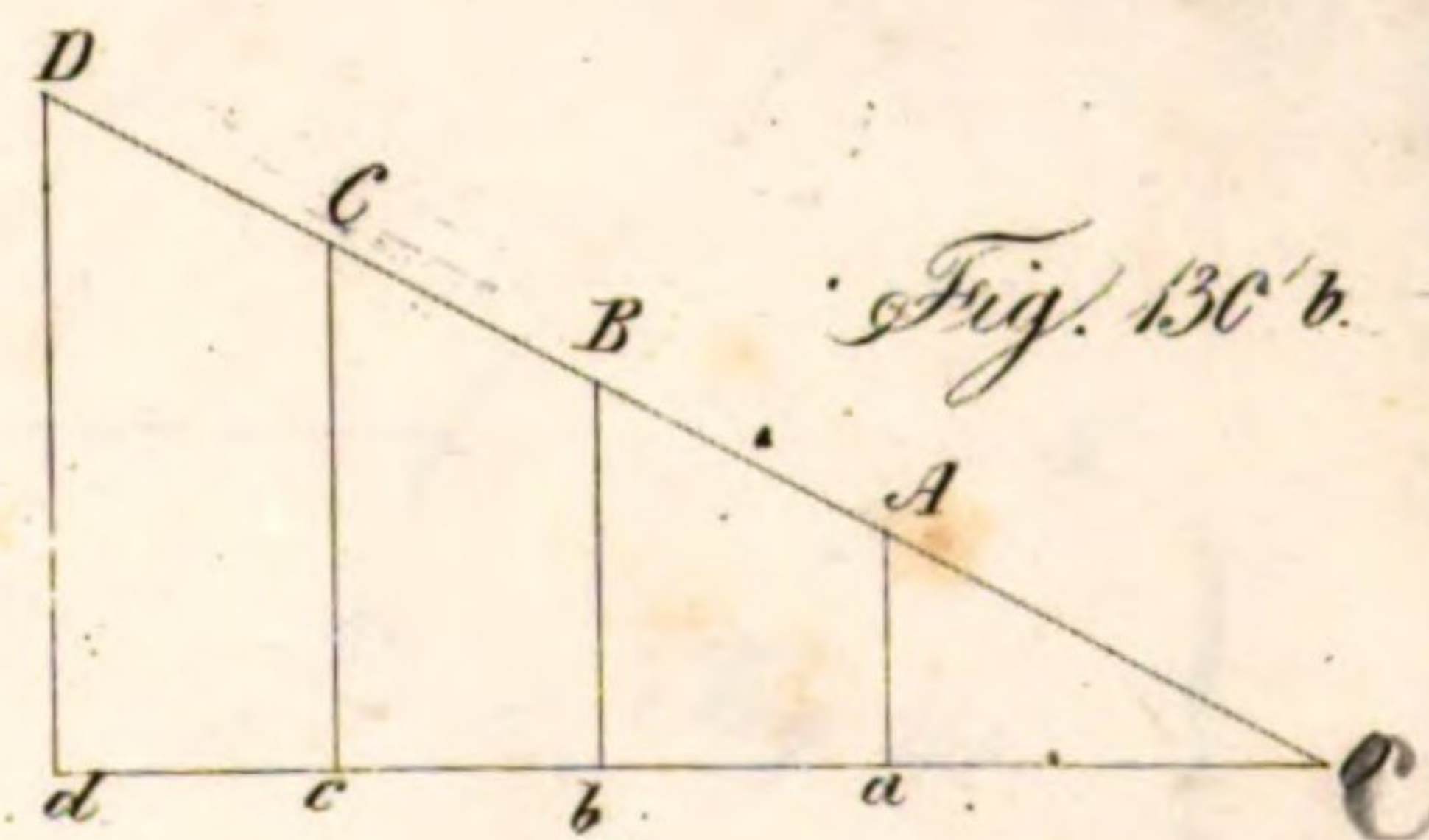
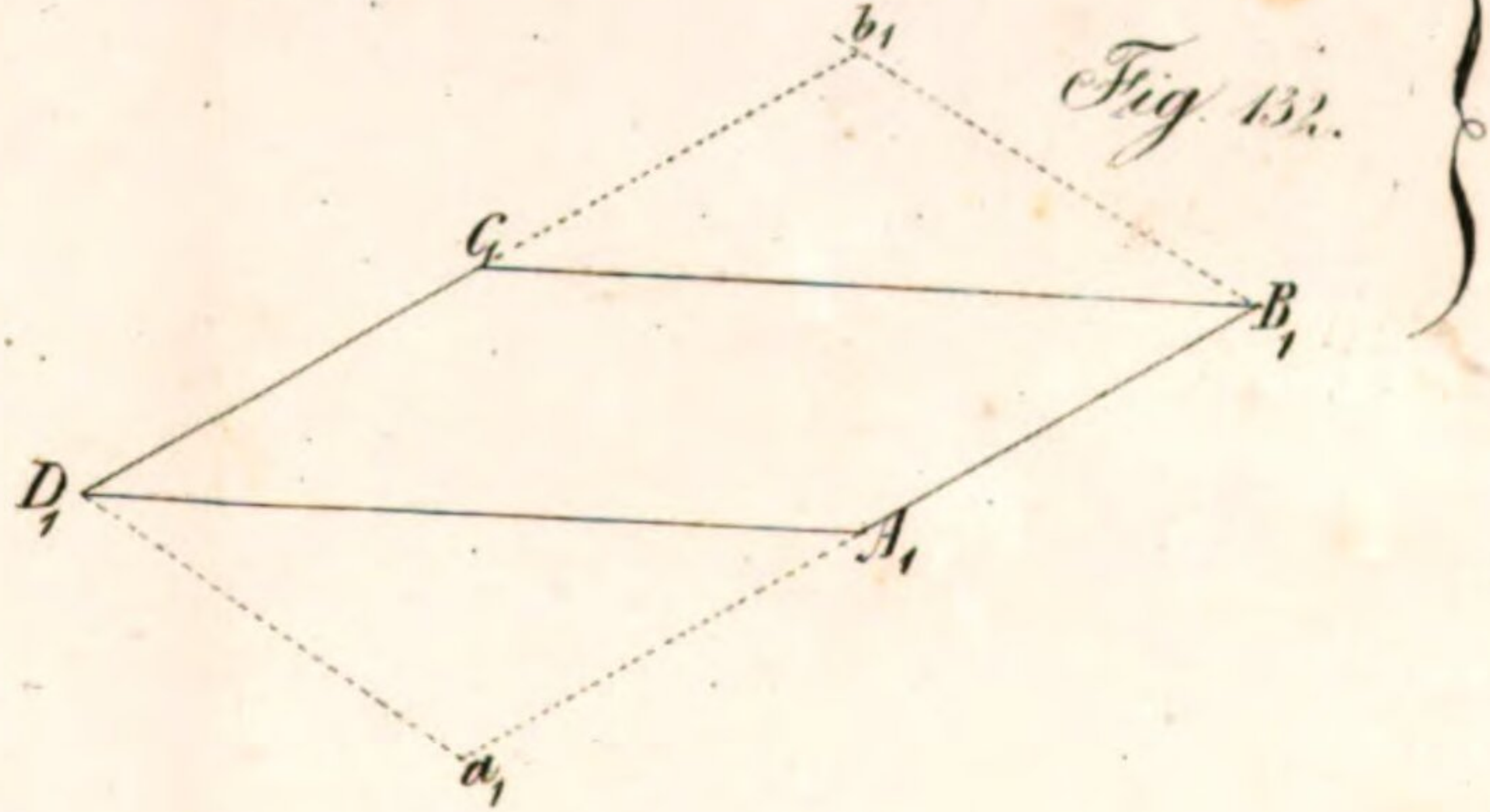
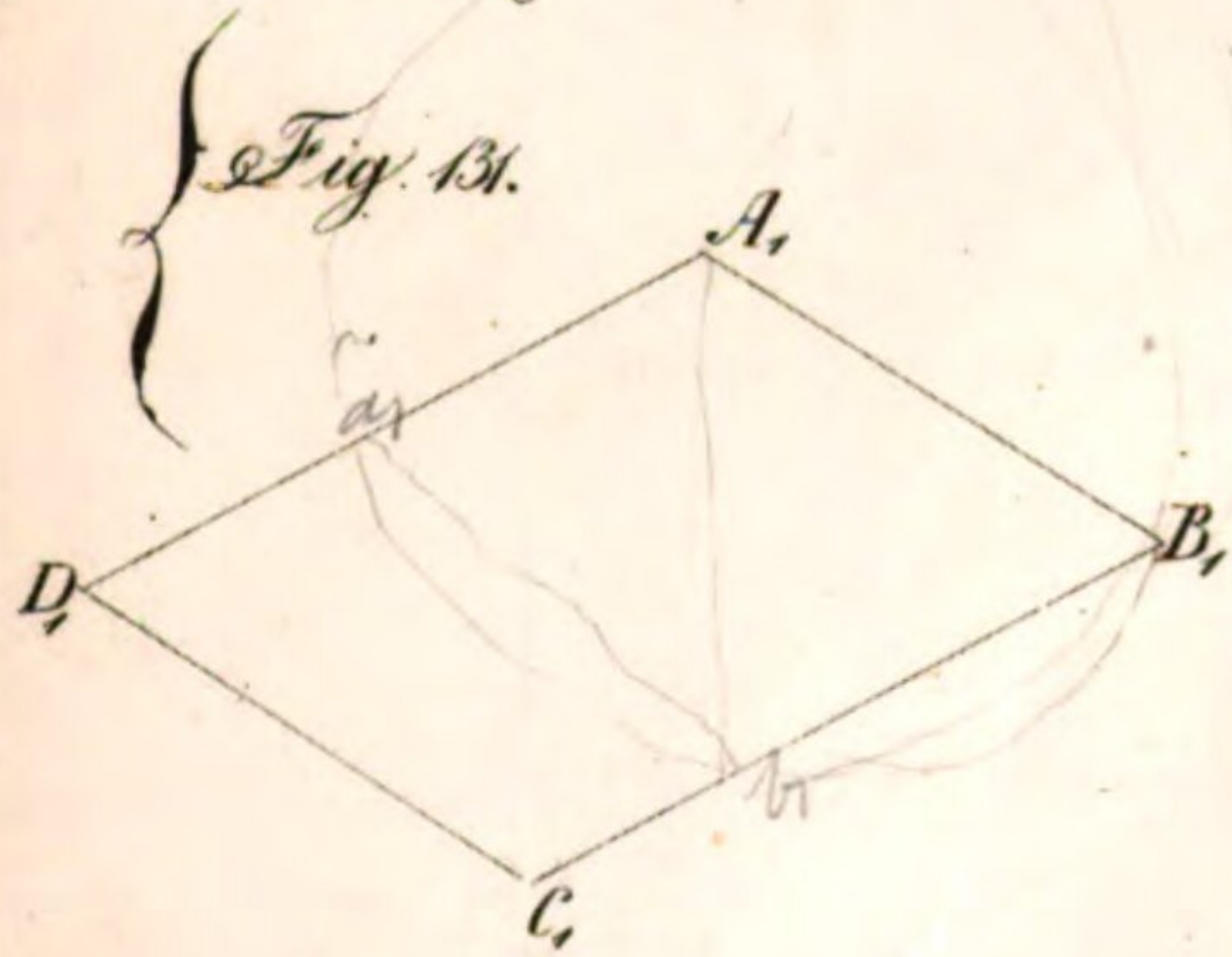
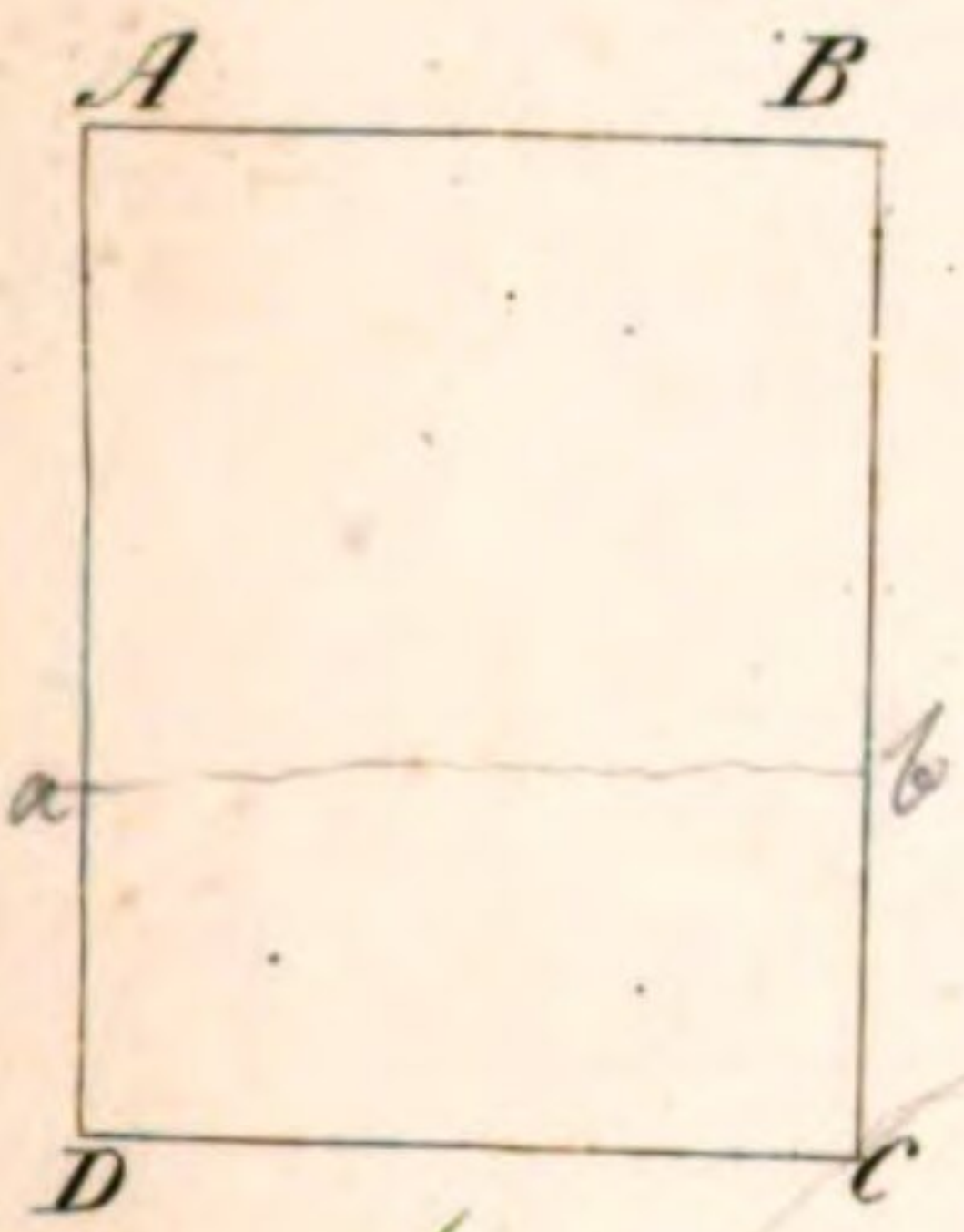
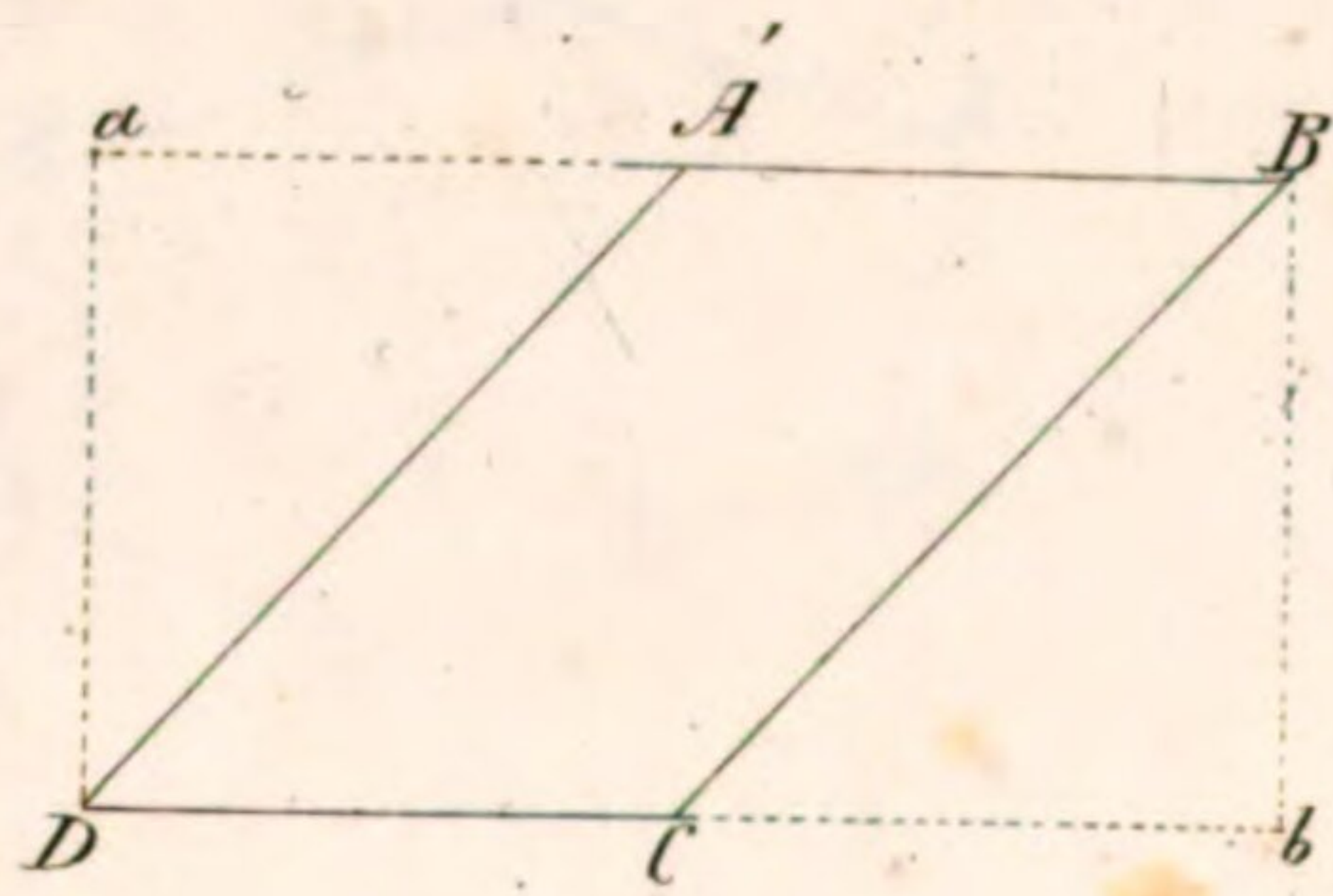
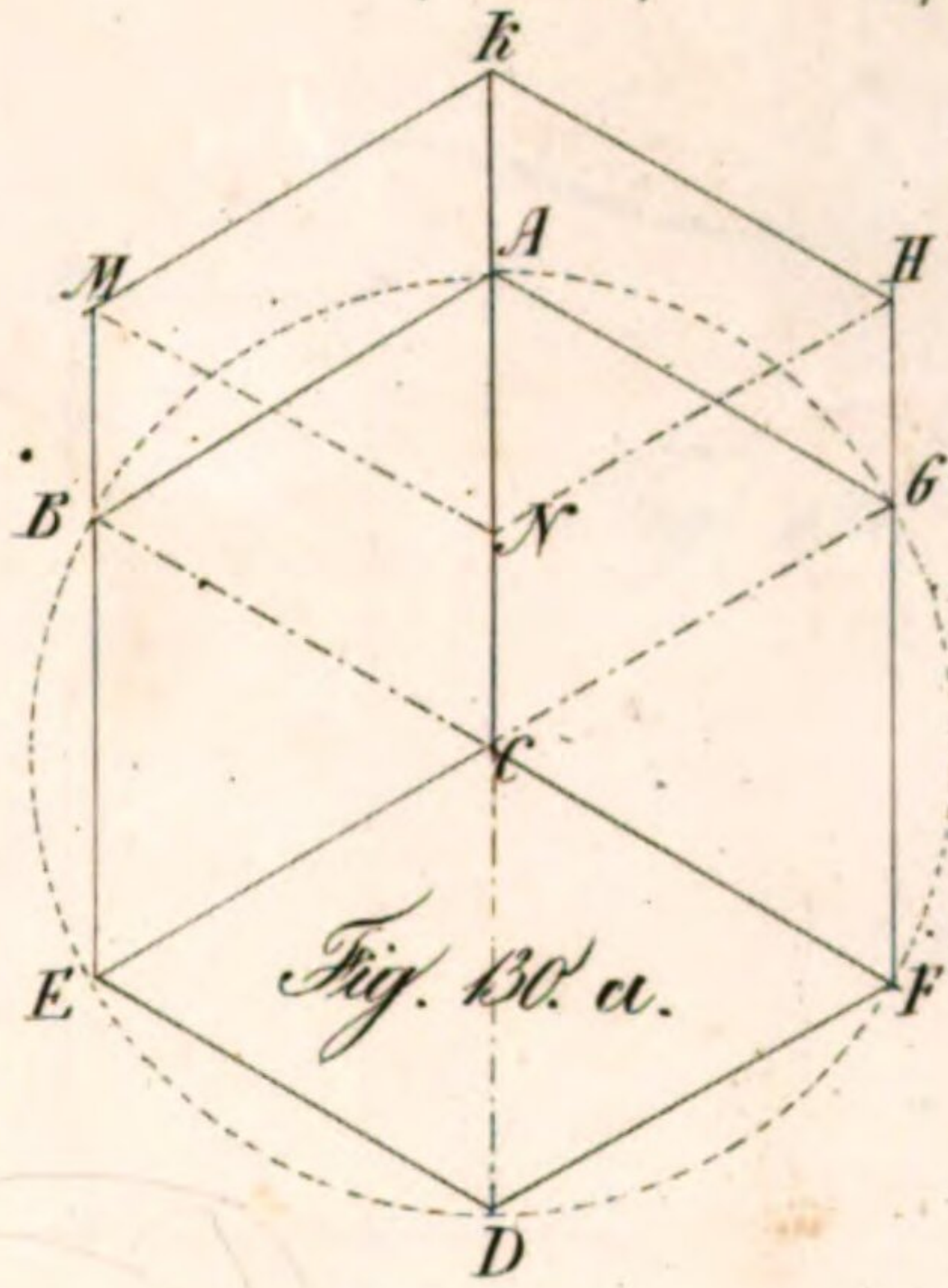
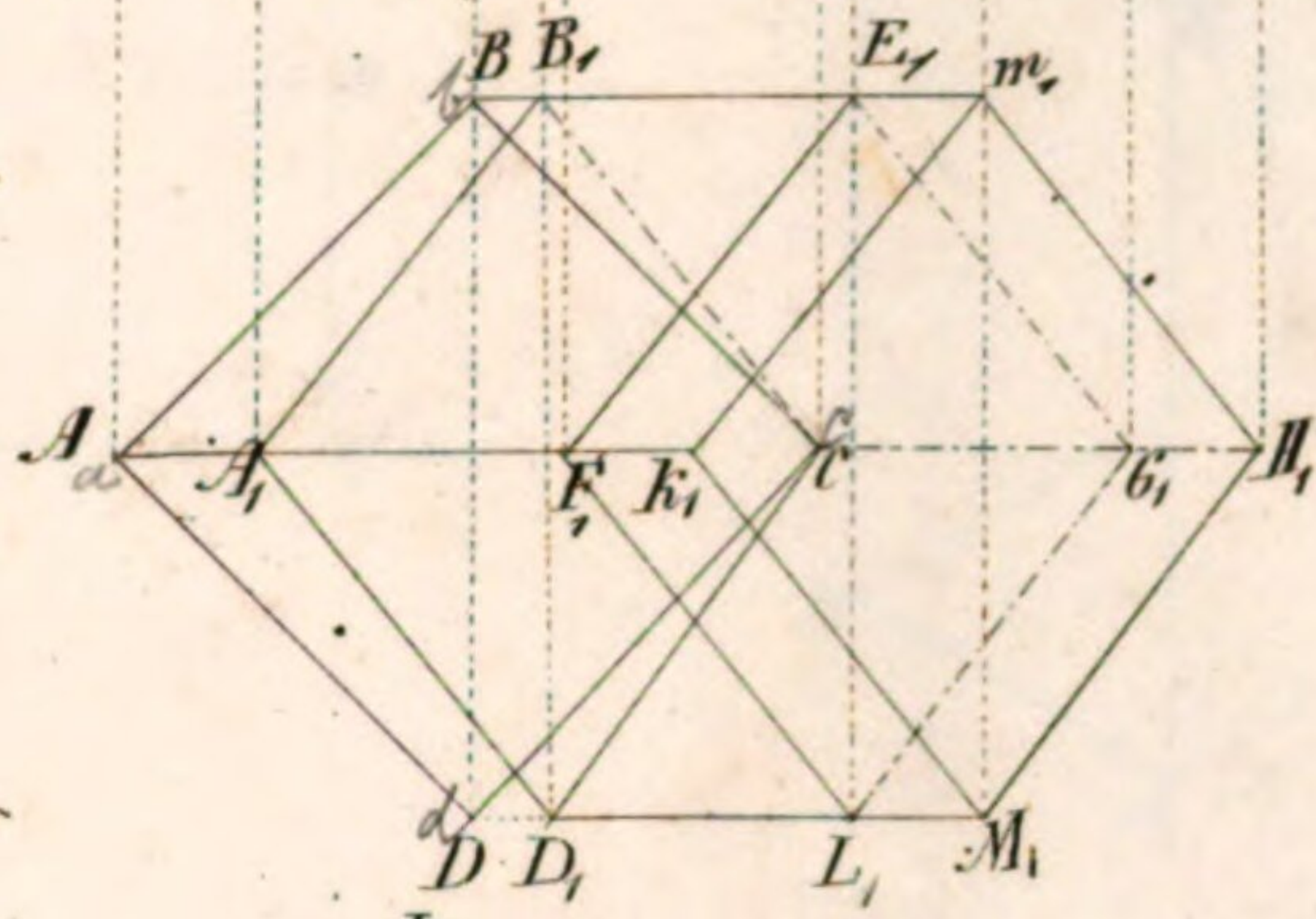
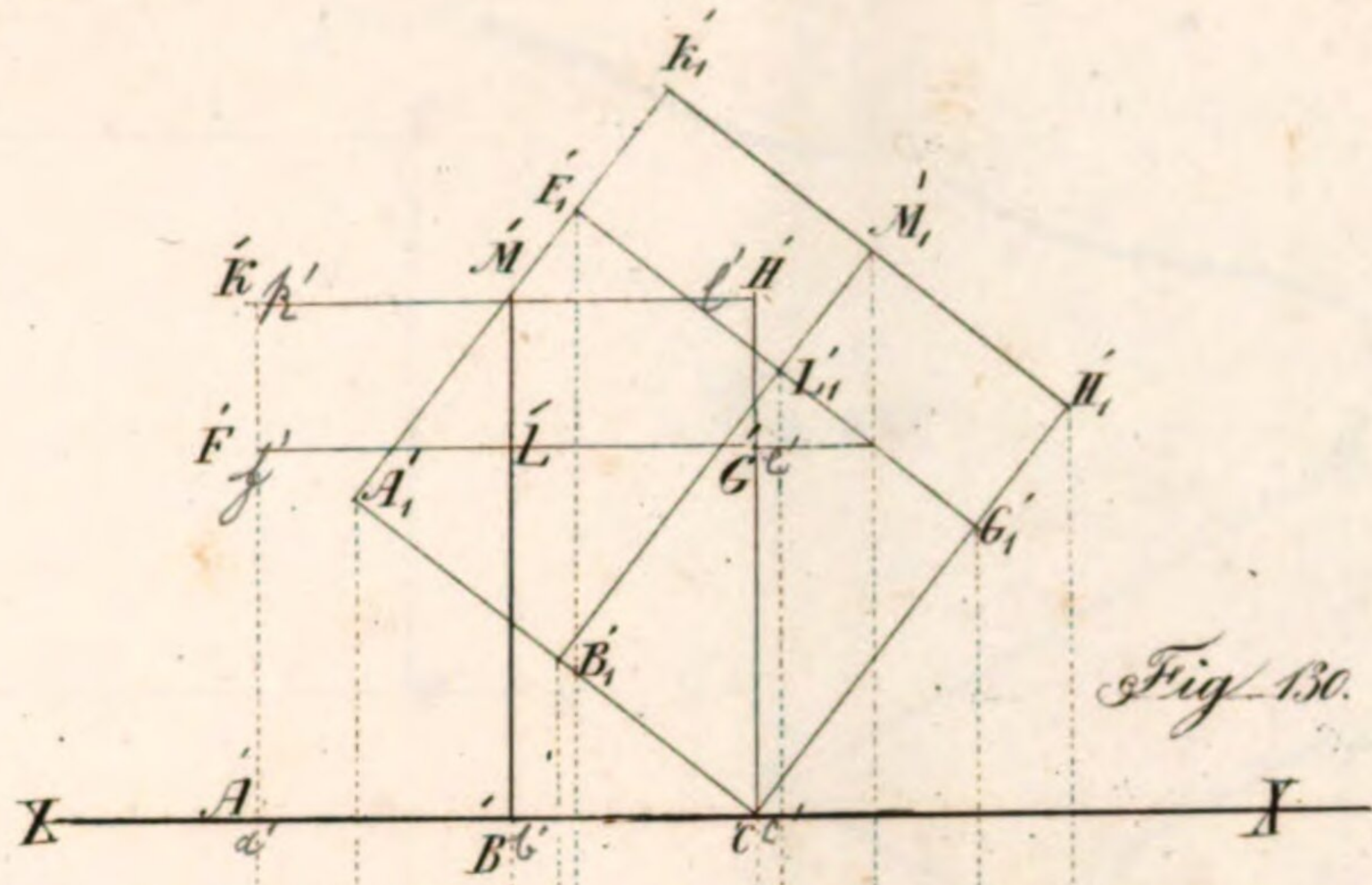


Fig. 130 b





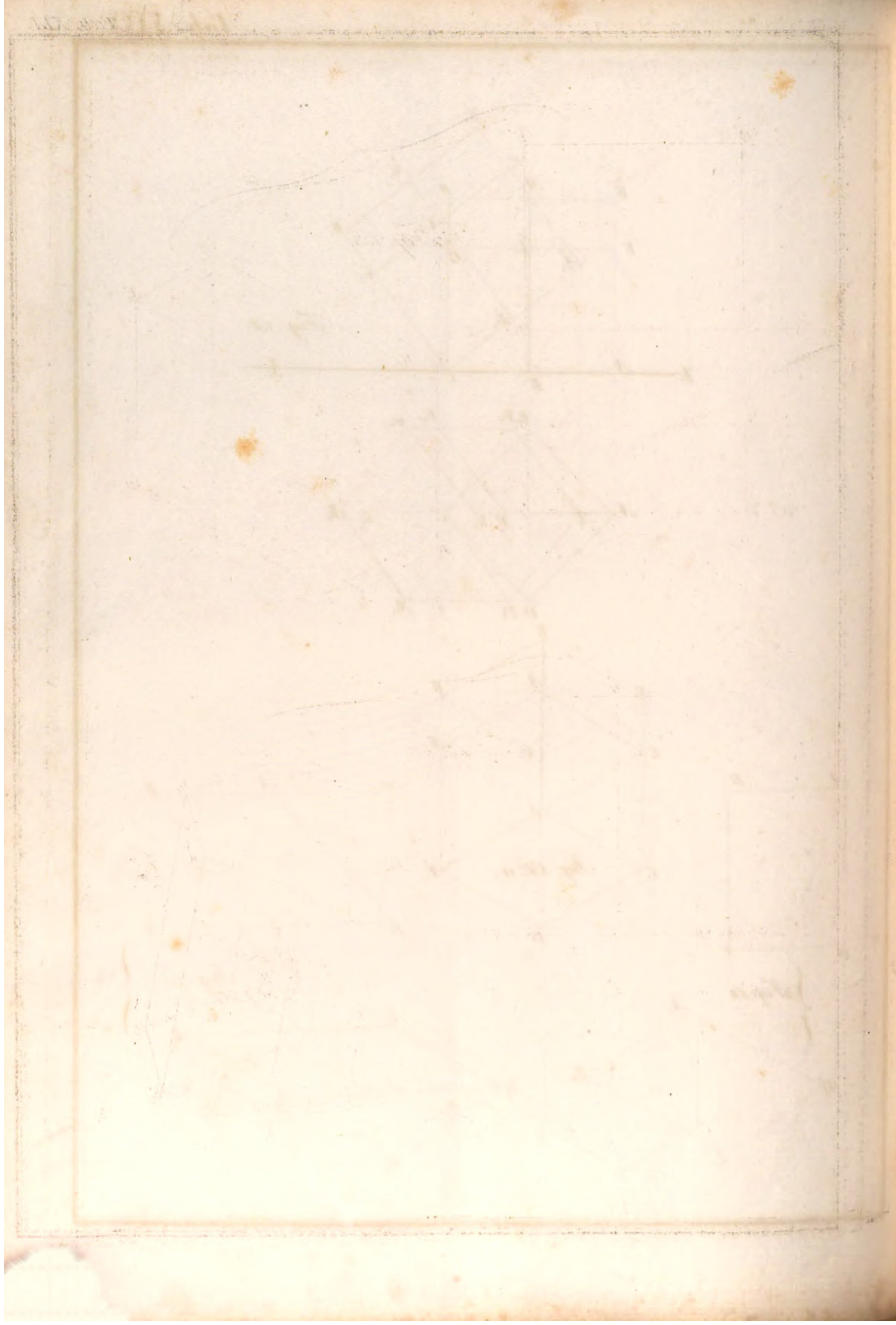


Fig. 133.

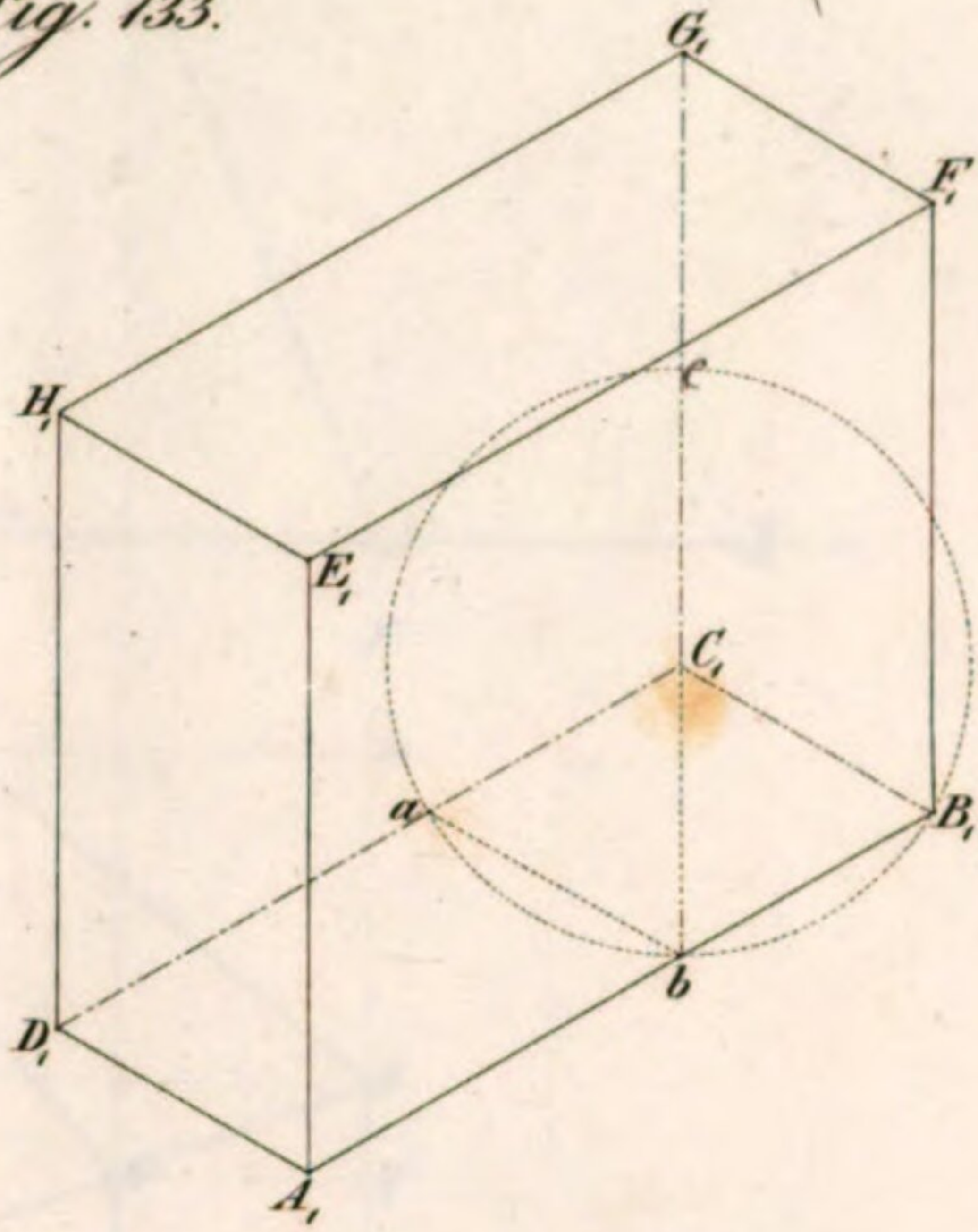
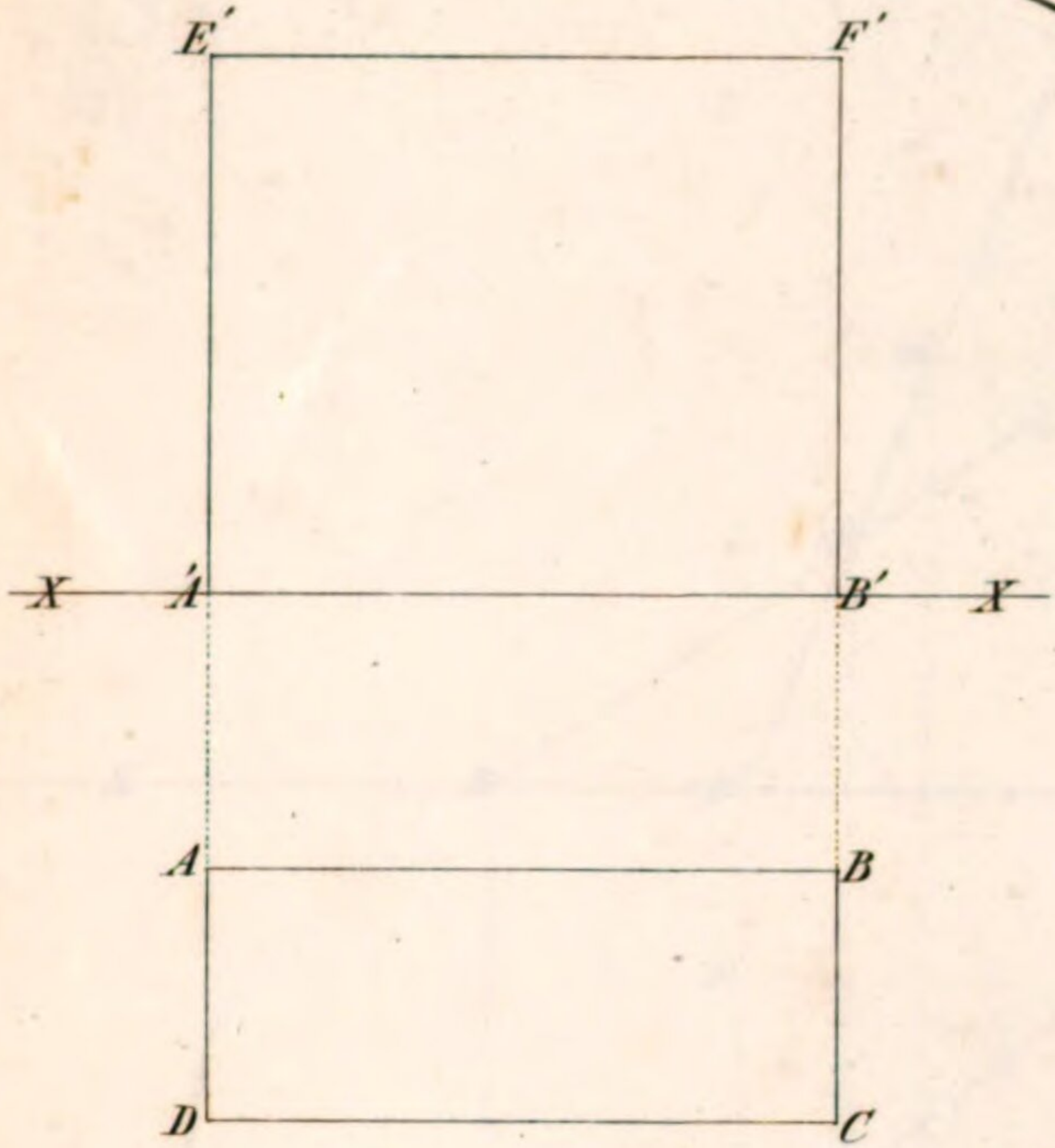
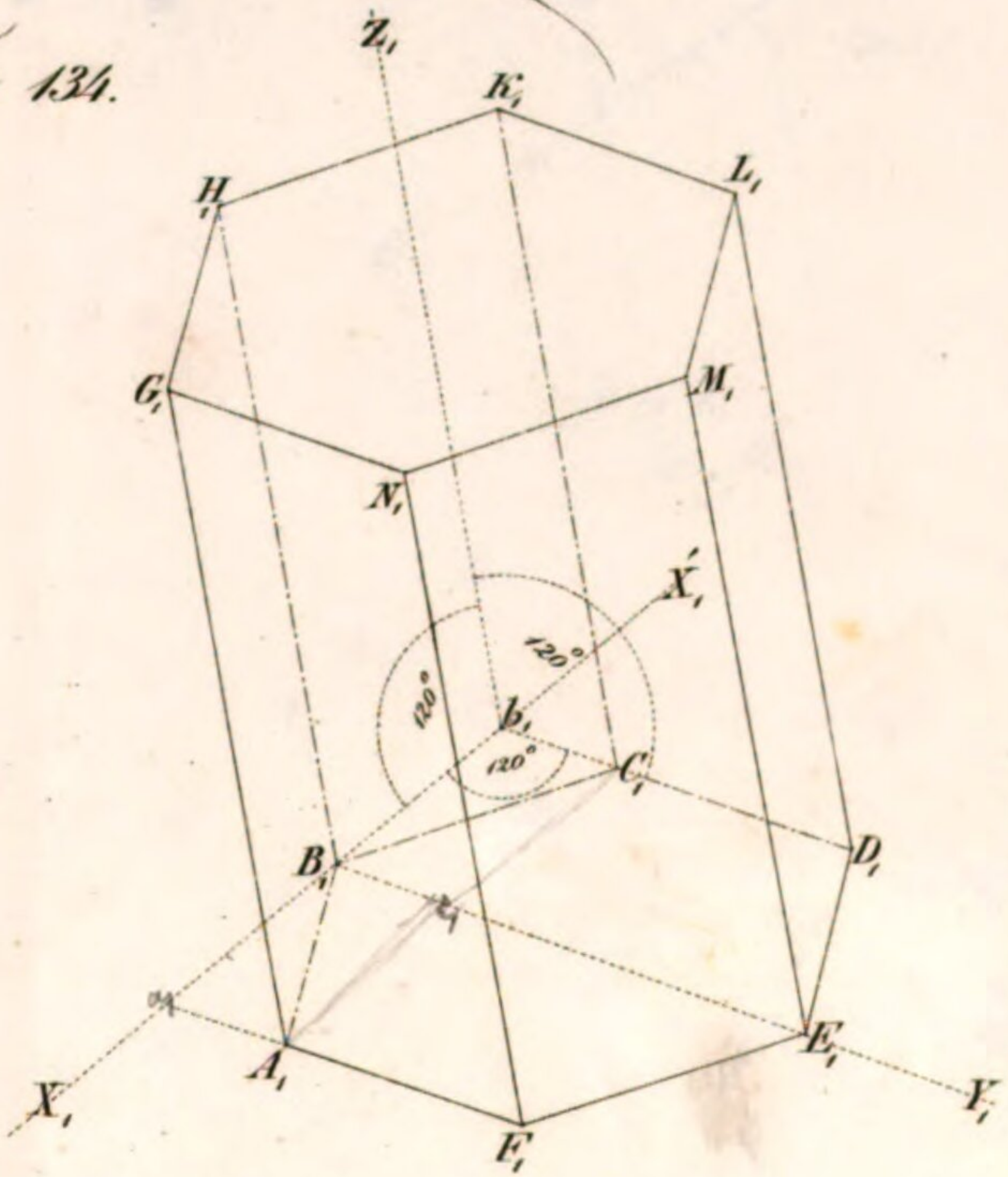
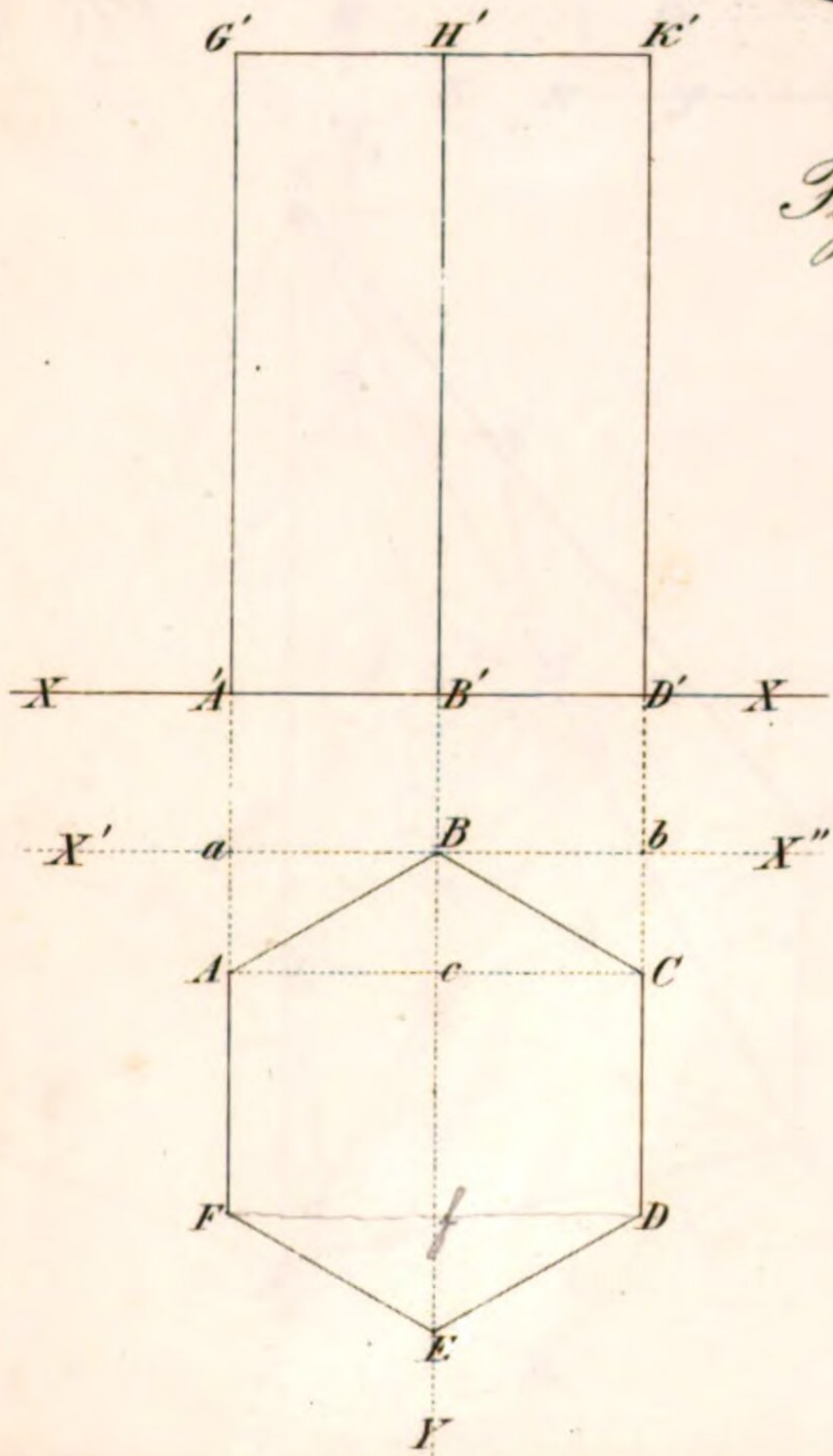
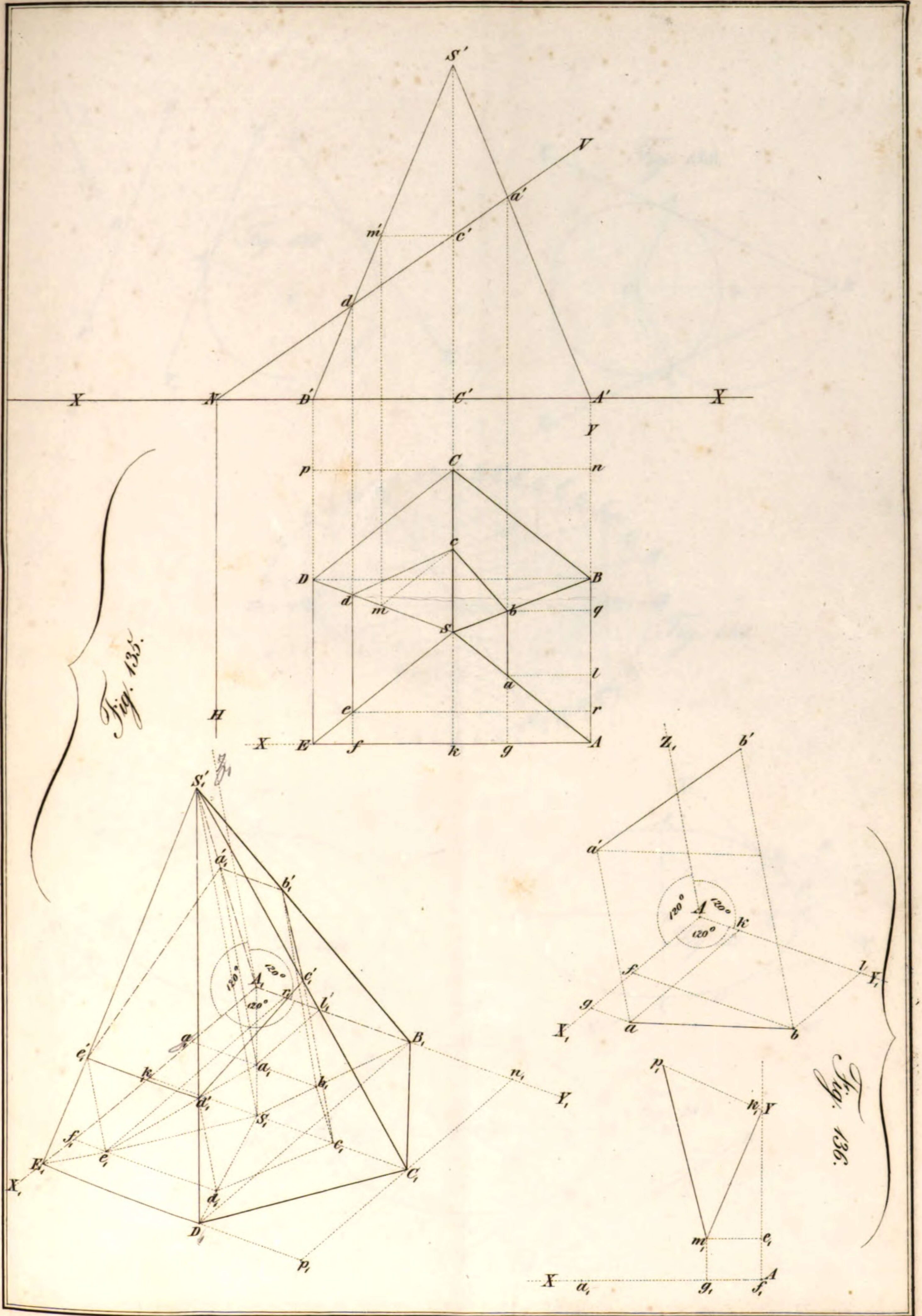


Fig. 134.

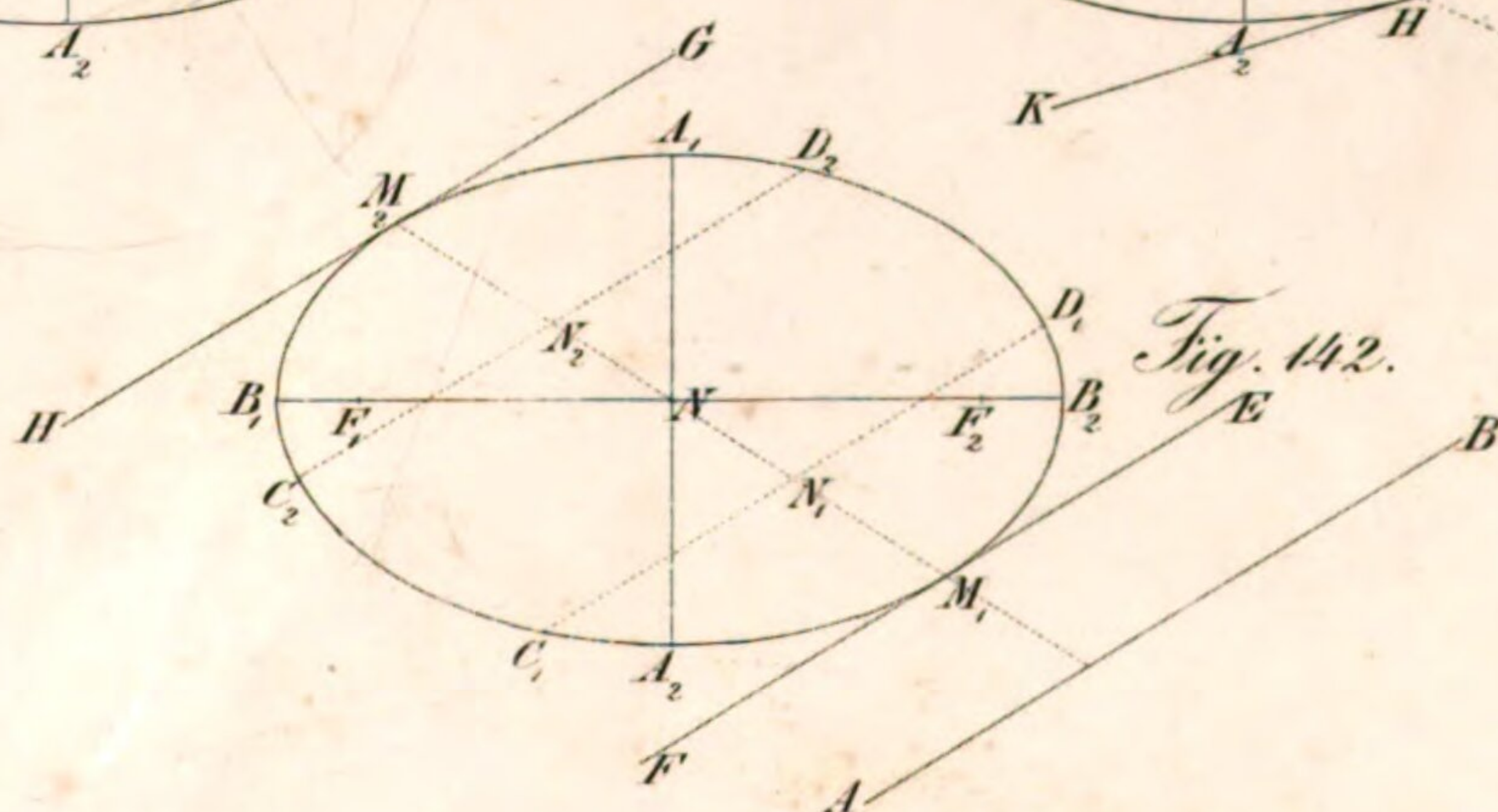
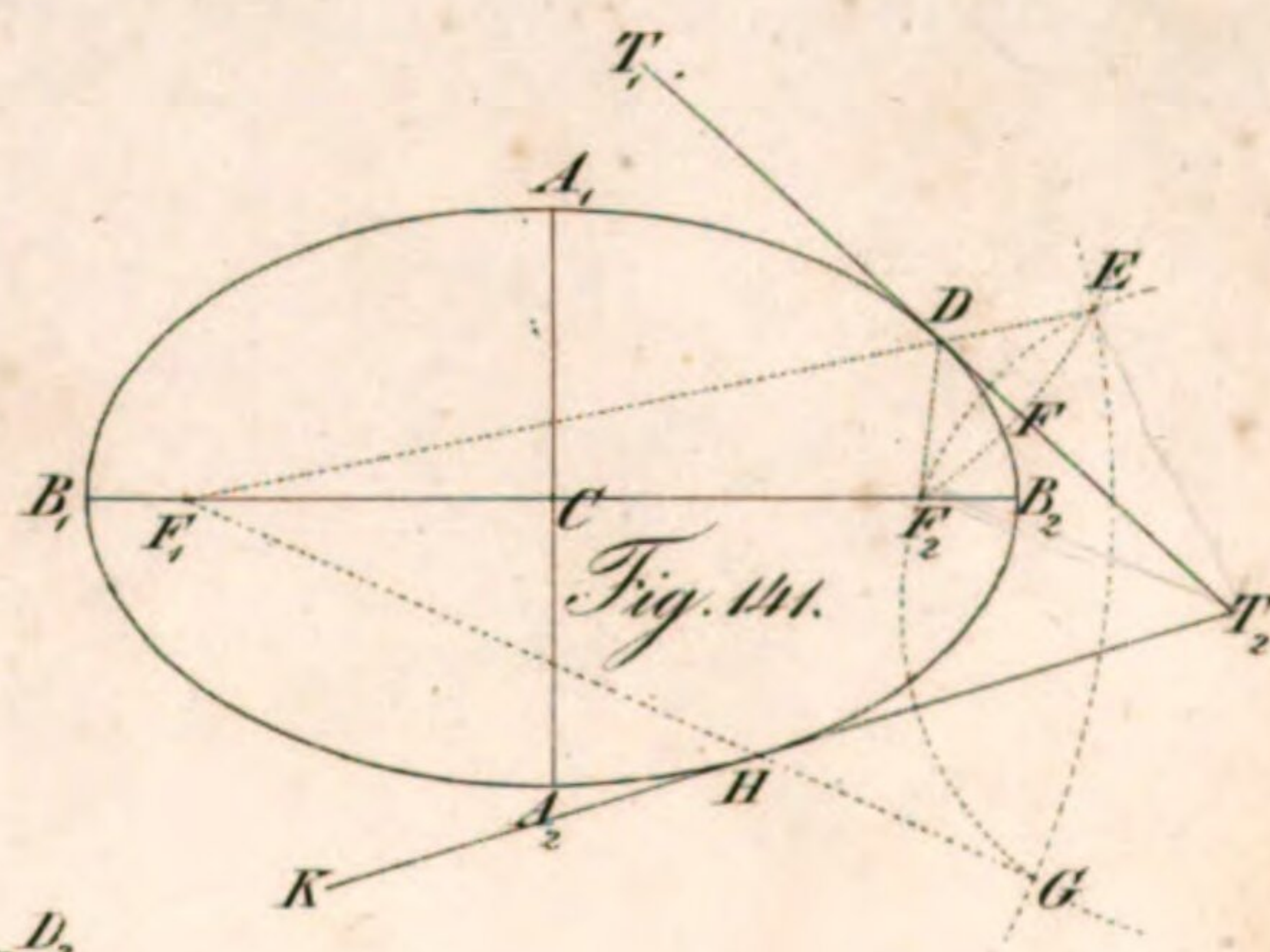
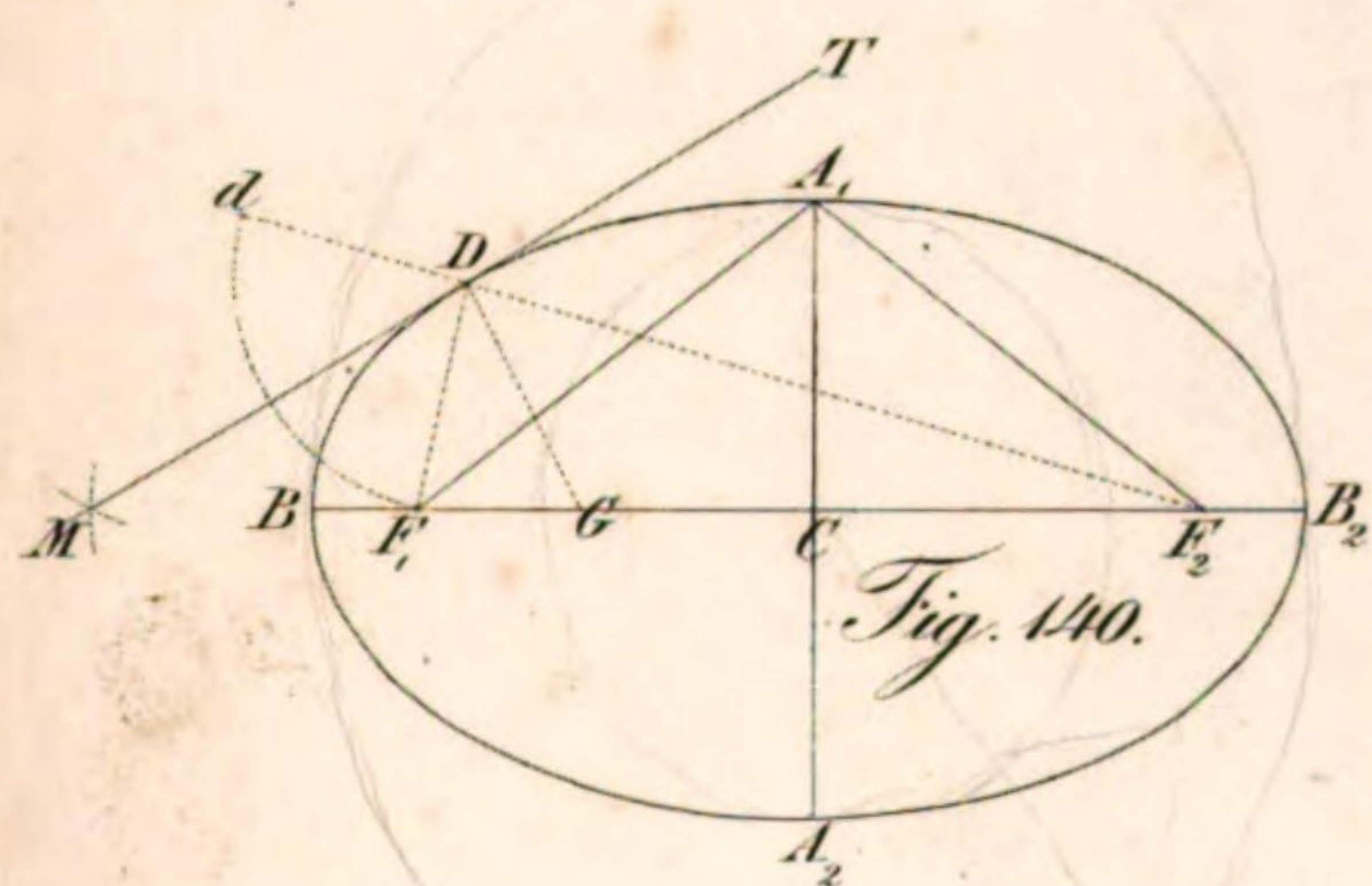
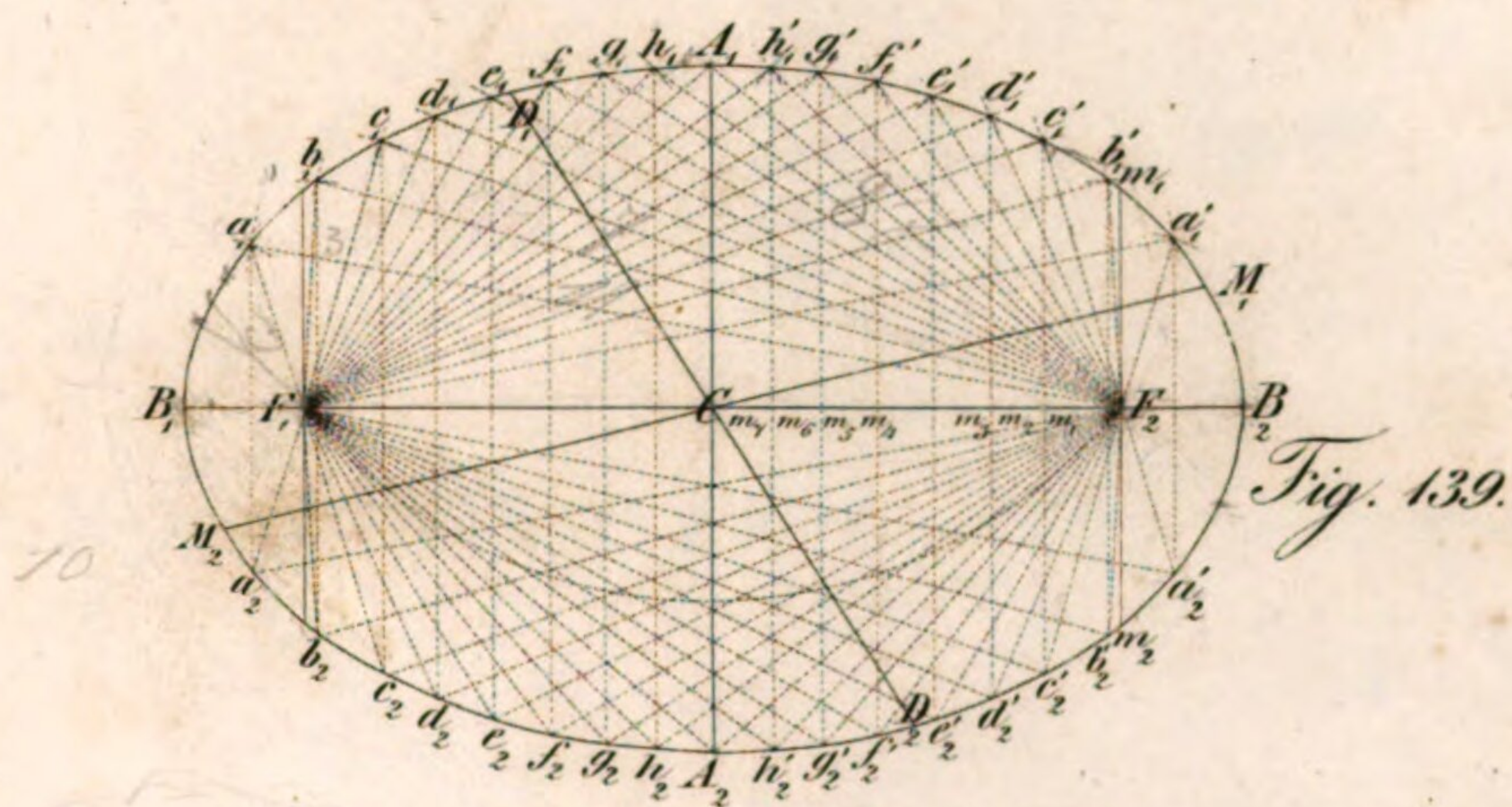
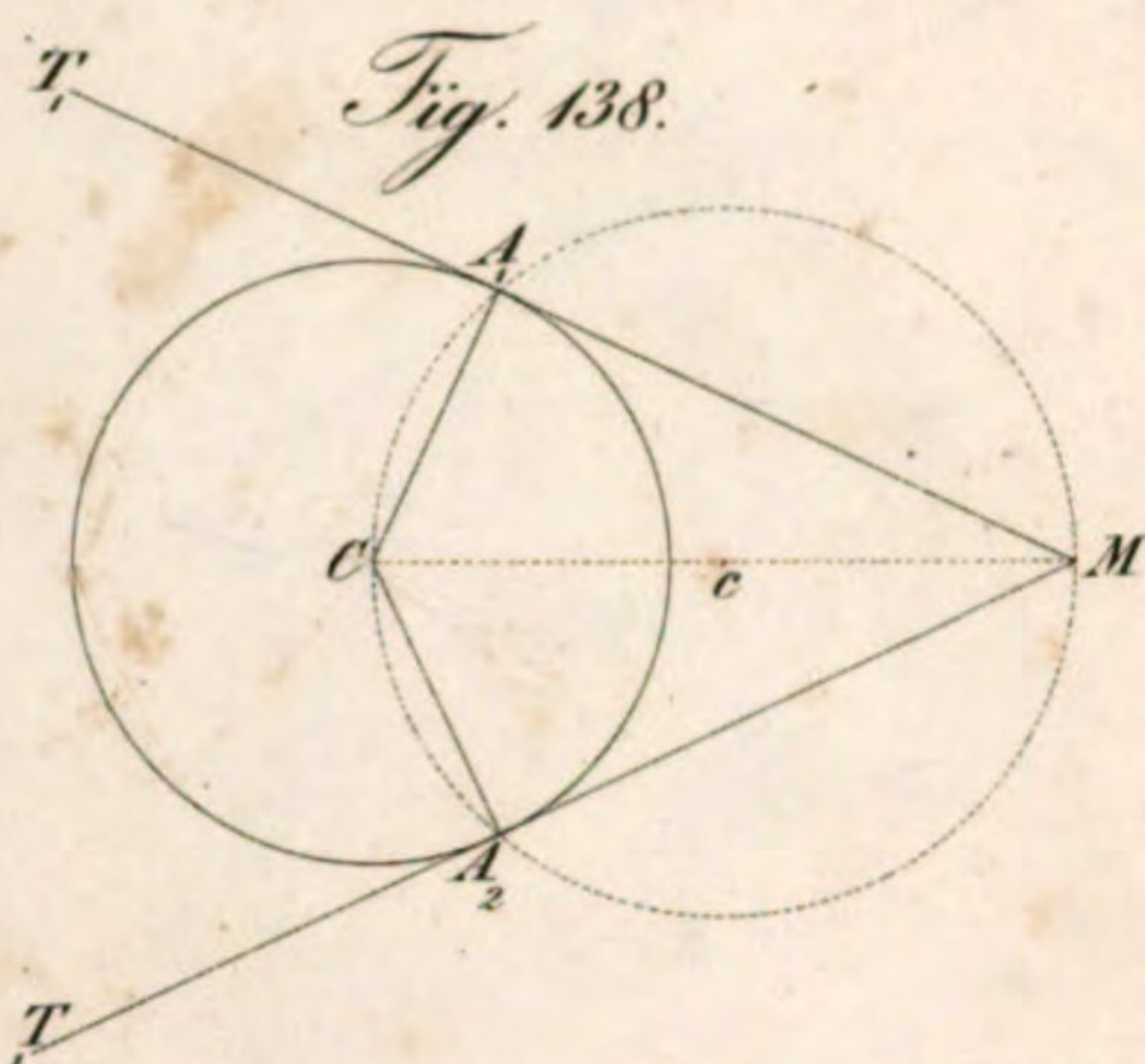
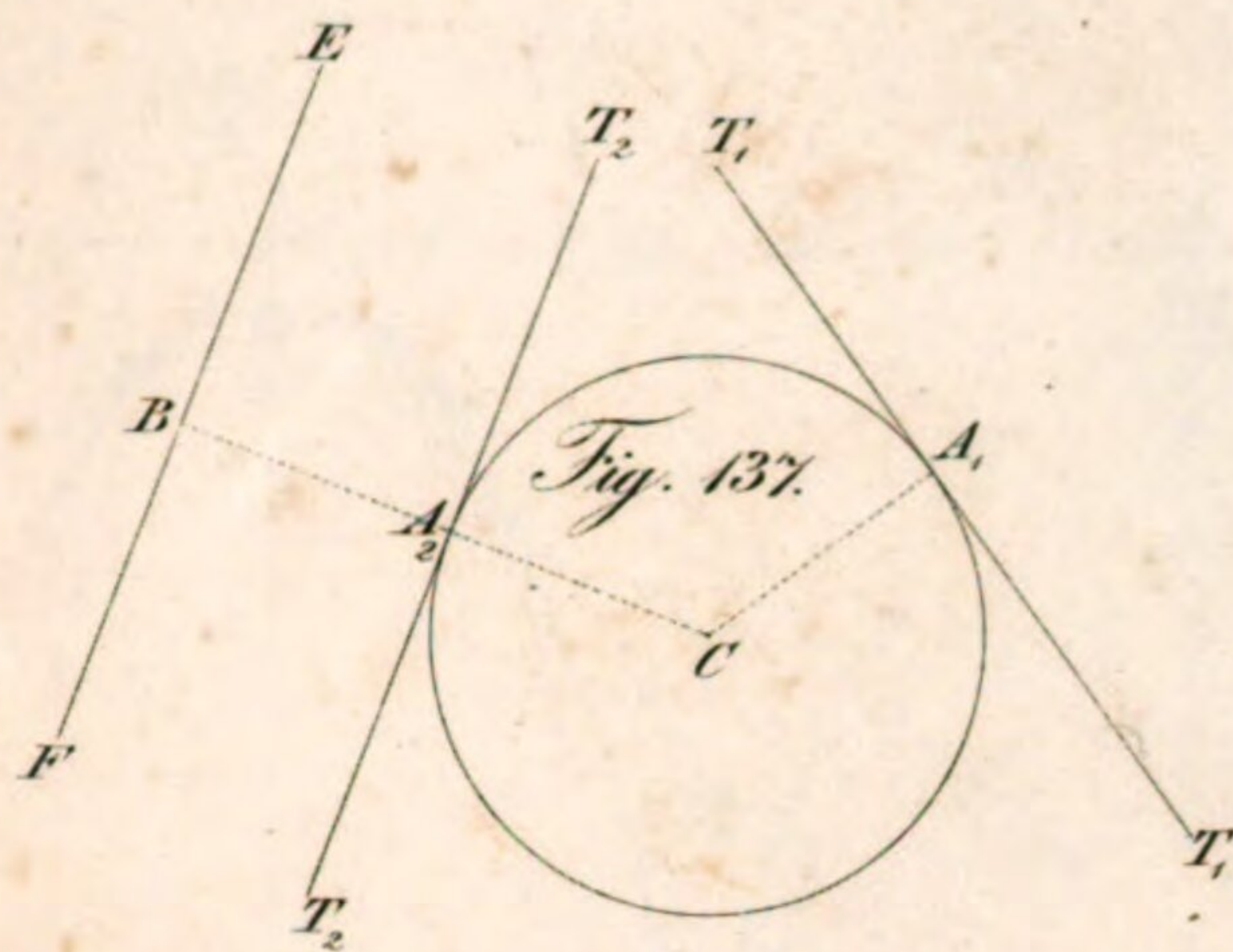






81
11
71

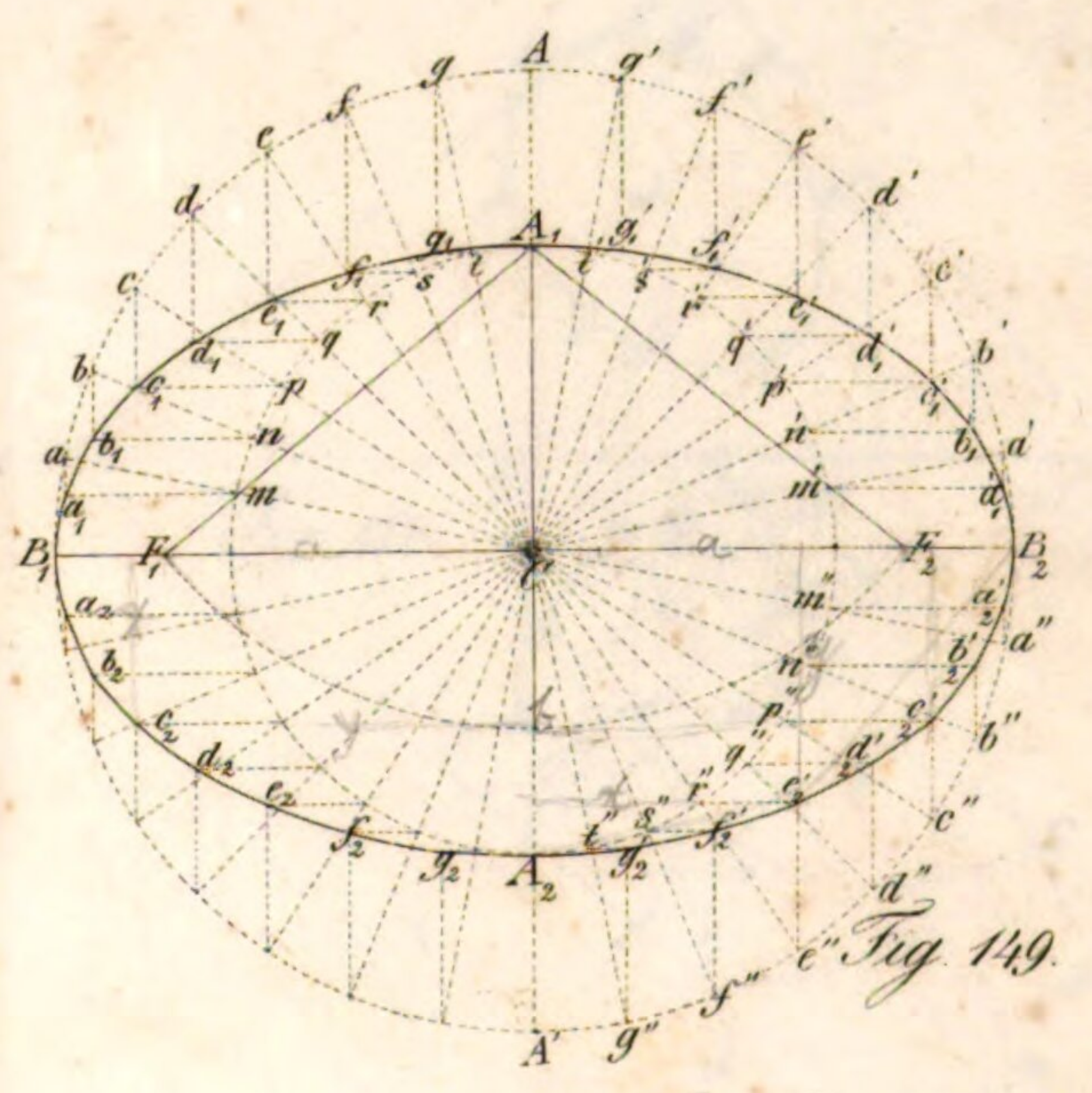
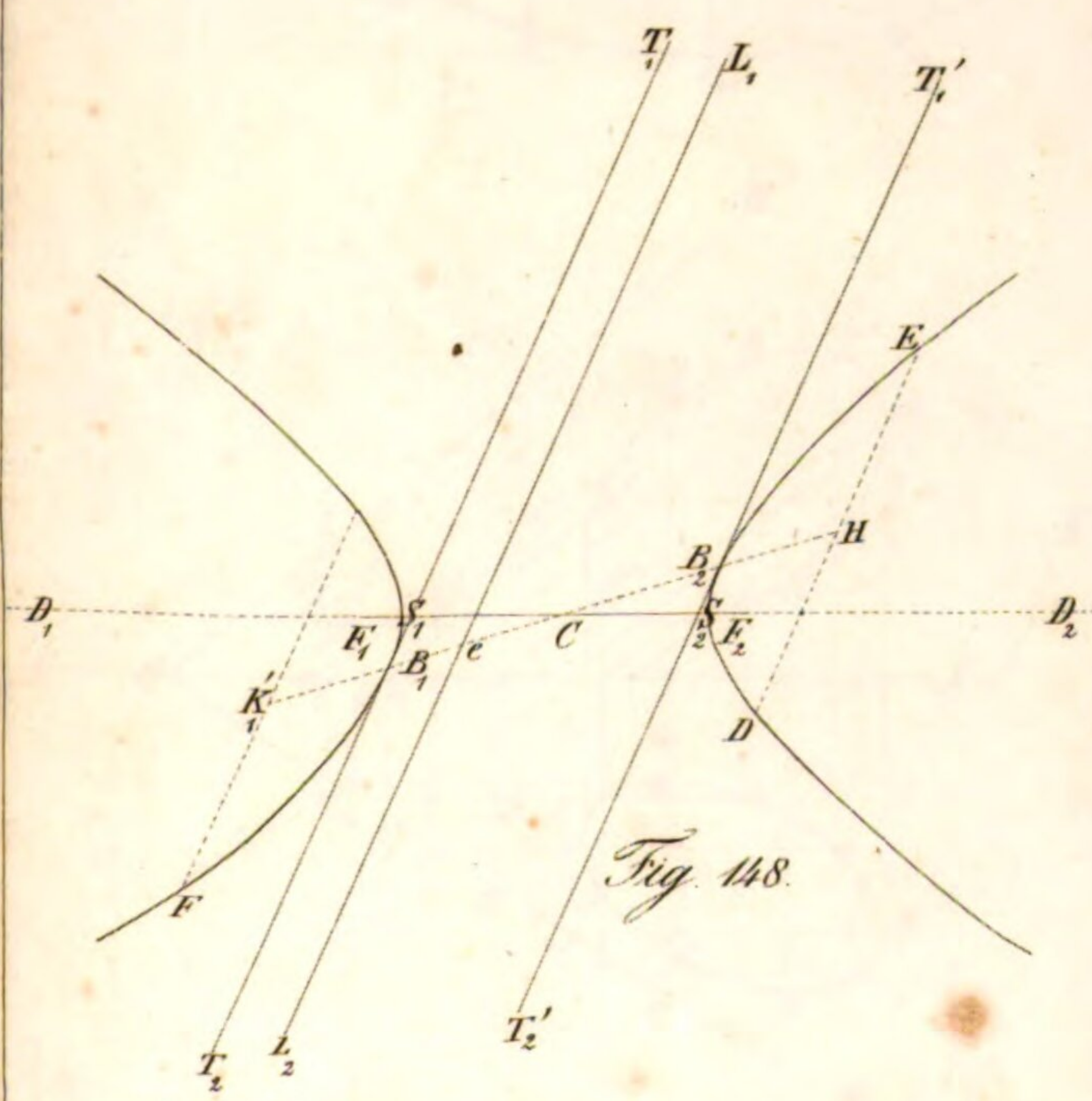
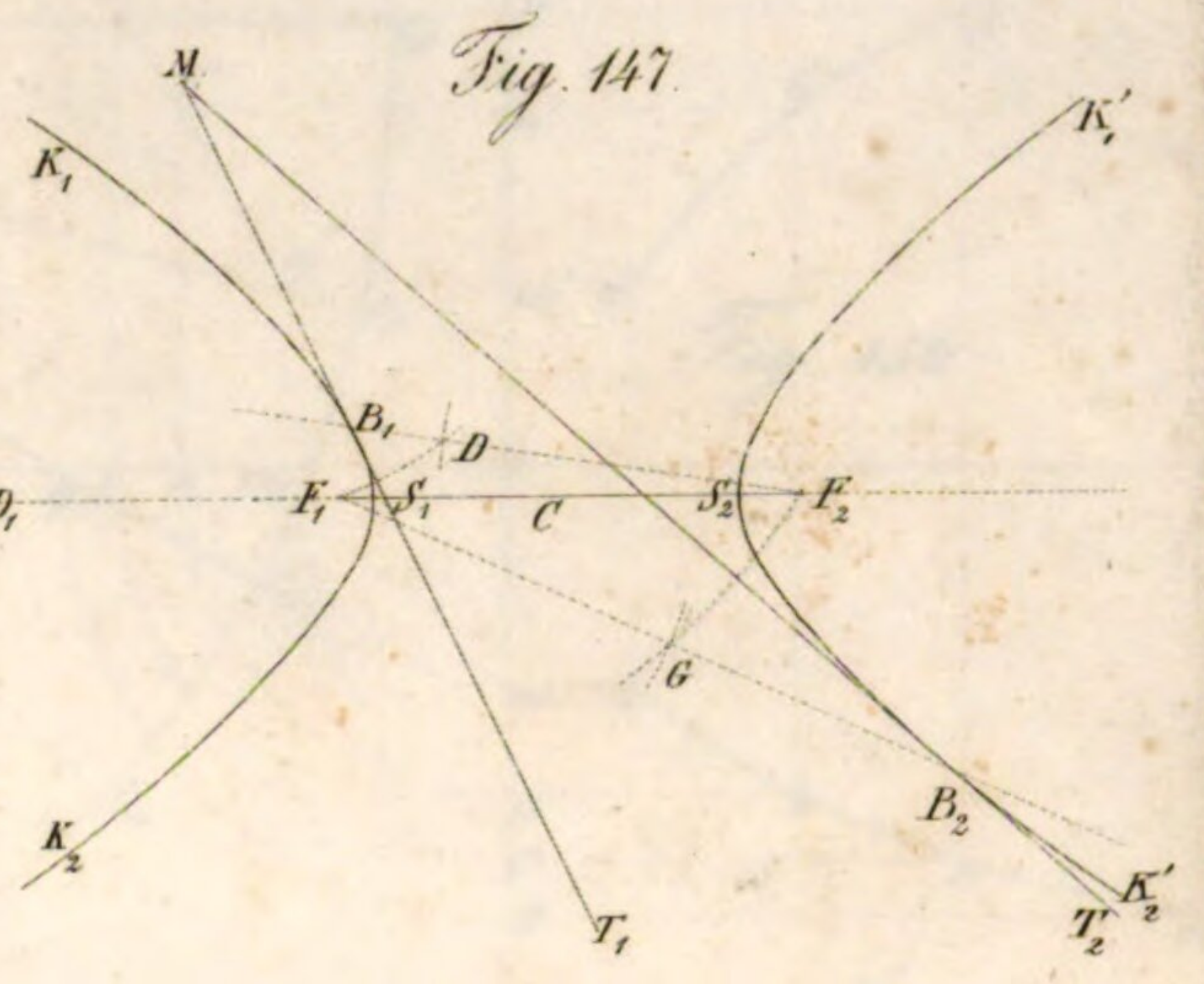
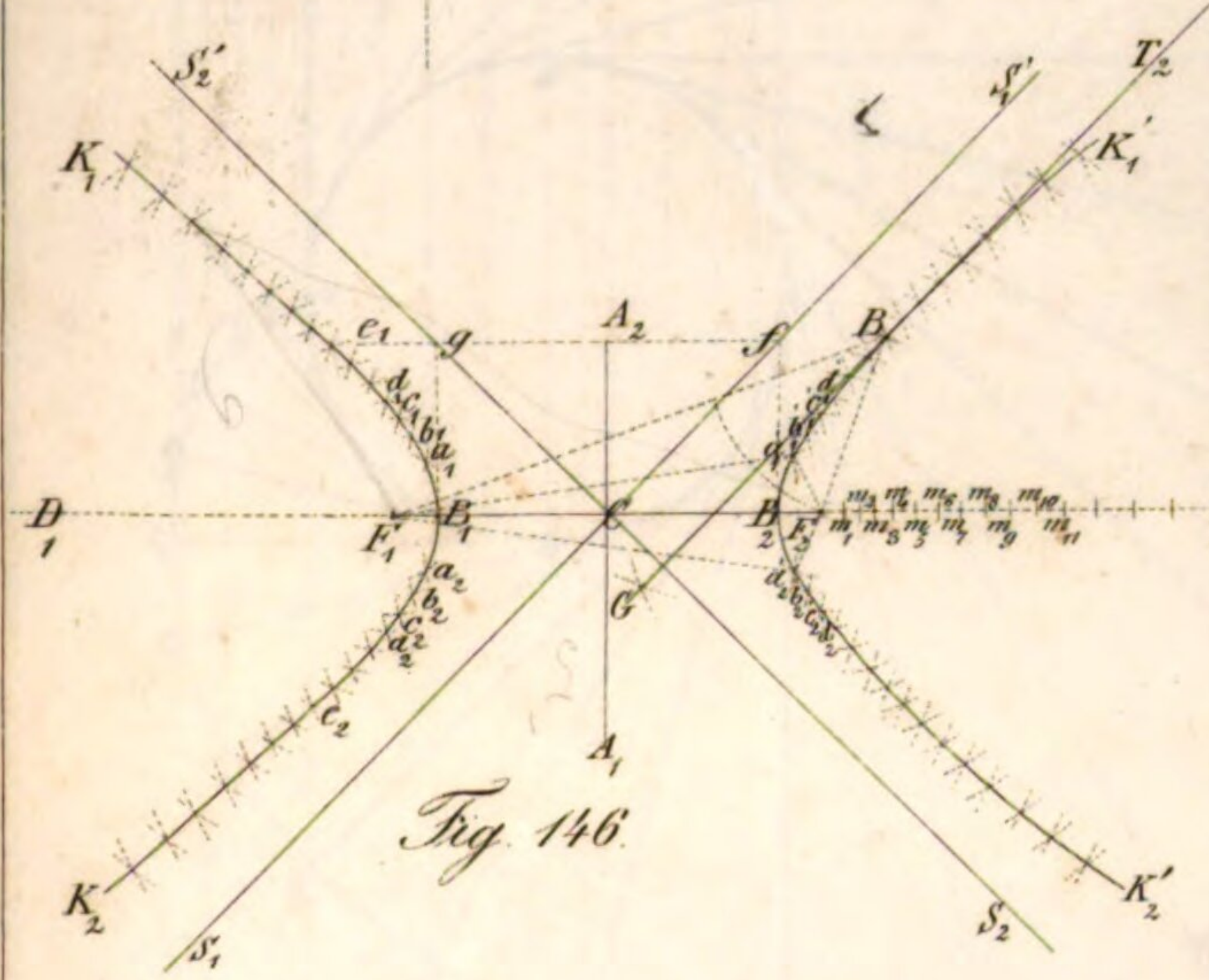
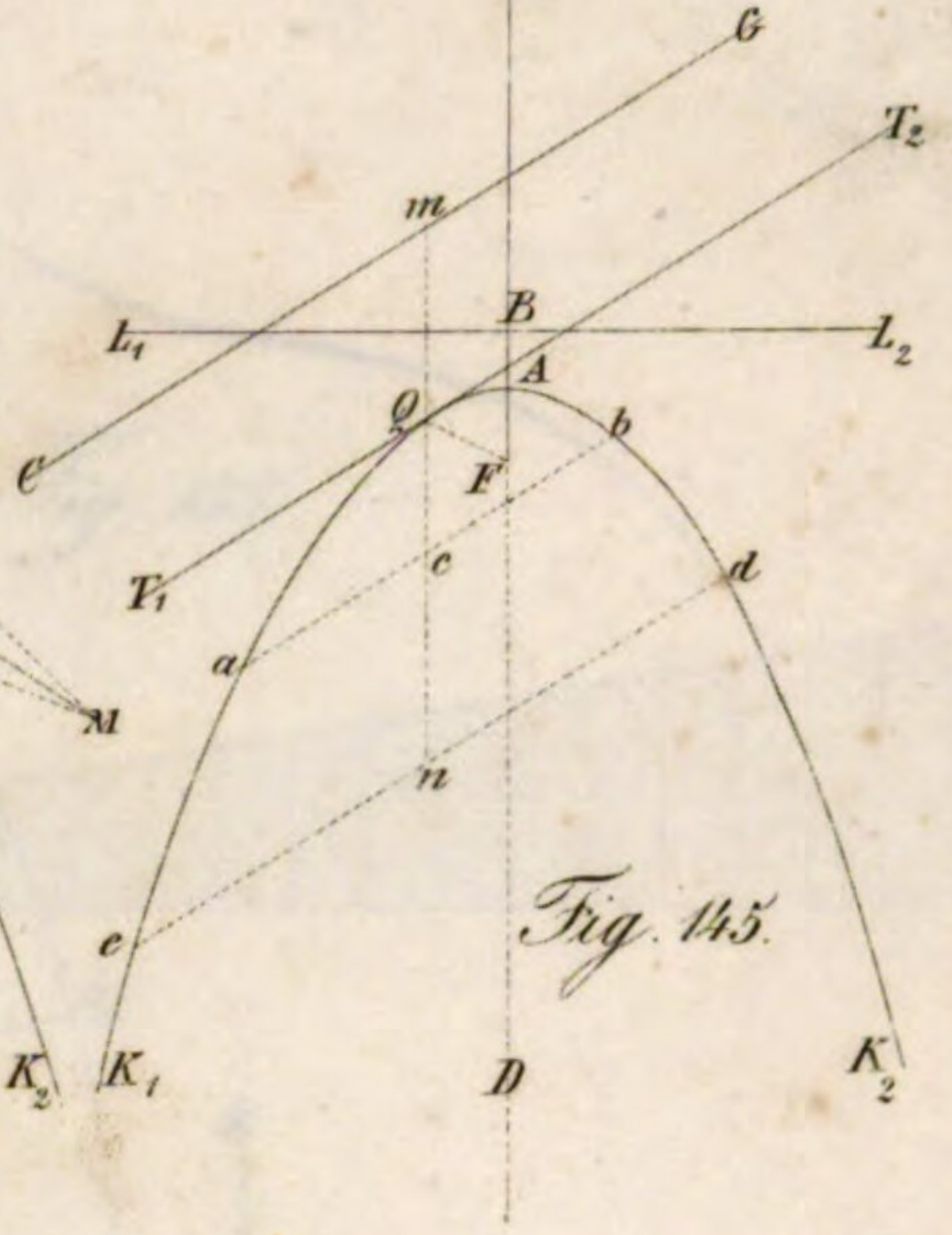
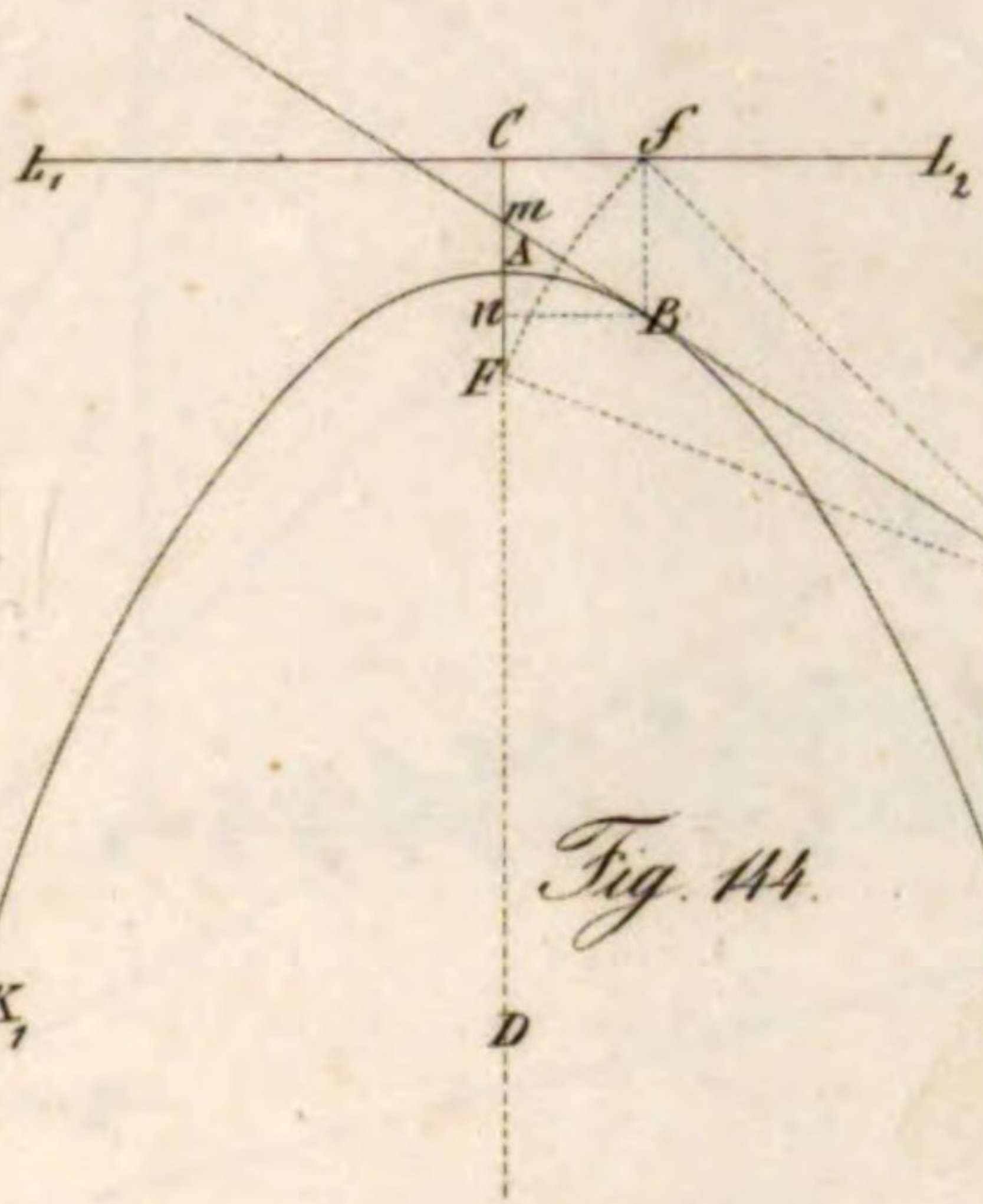
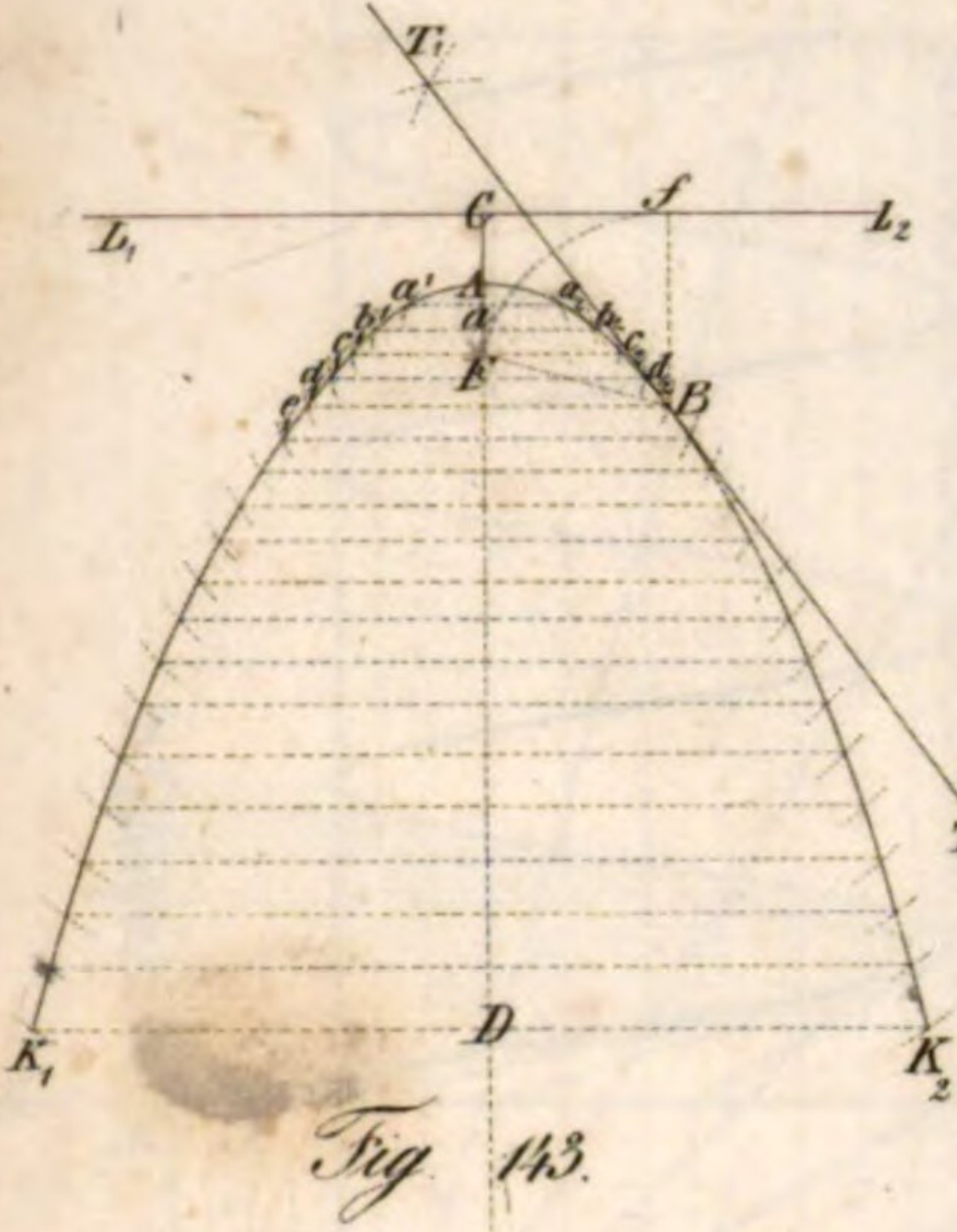




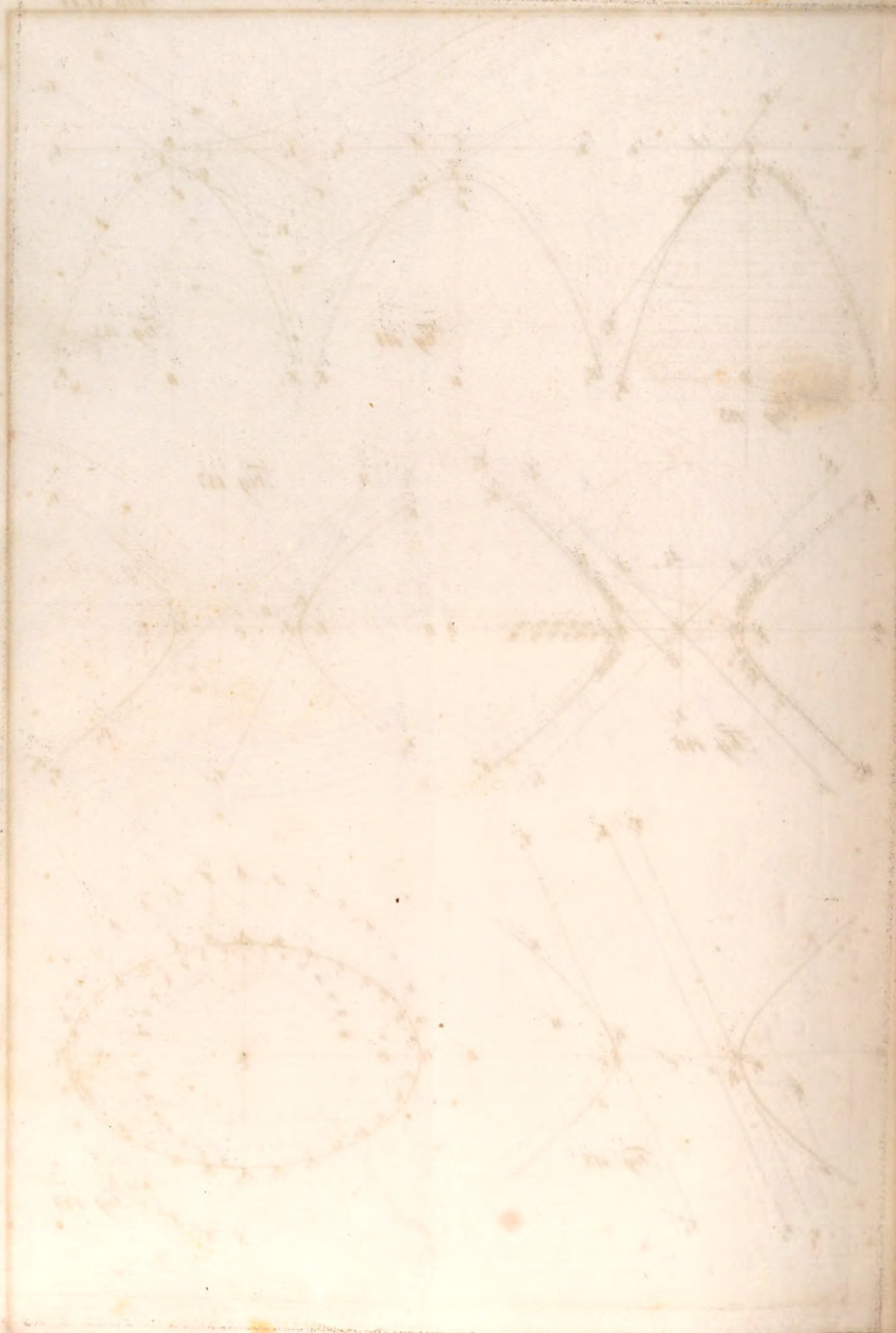
14. 11. 1881

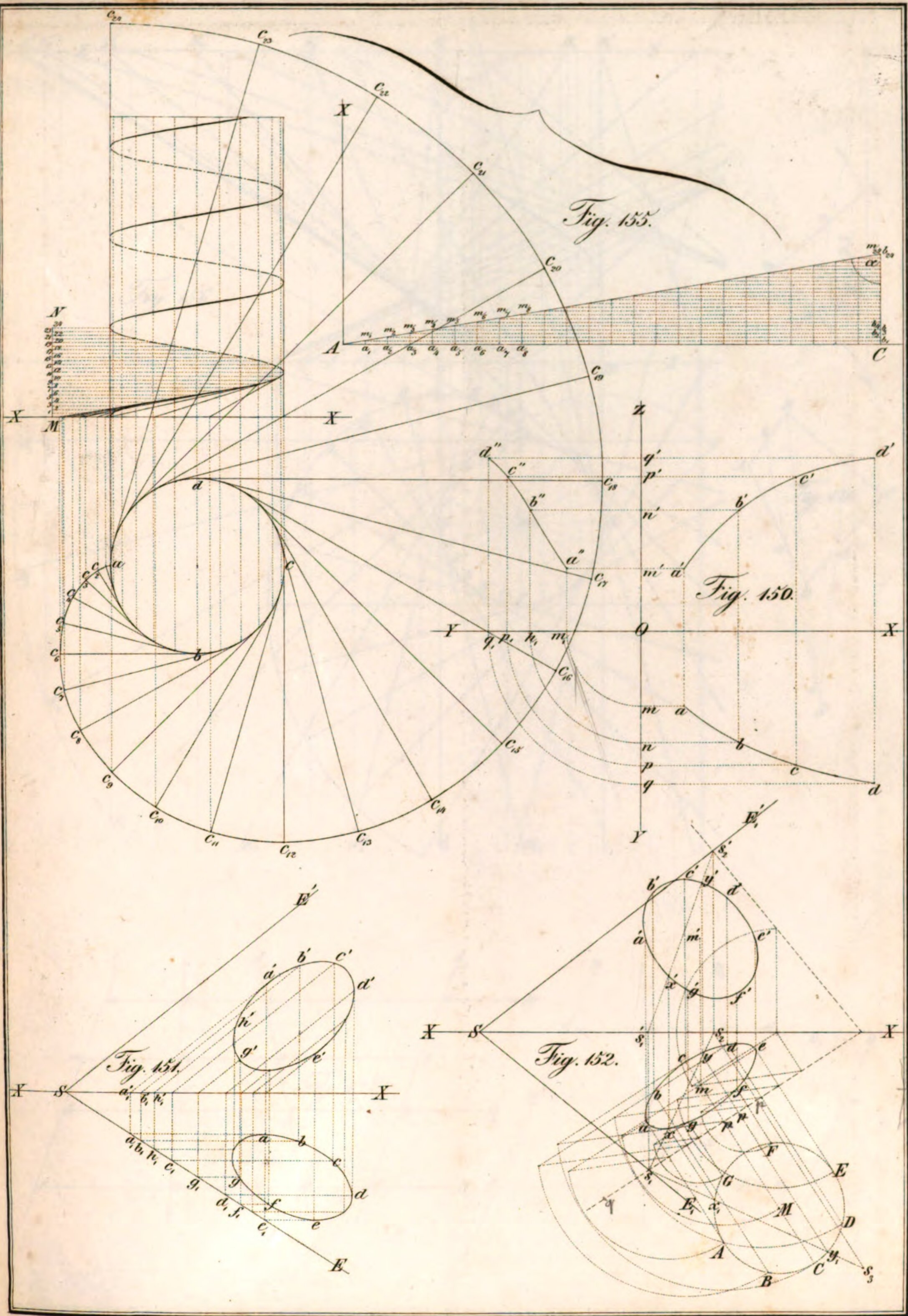


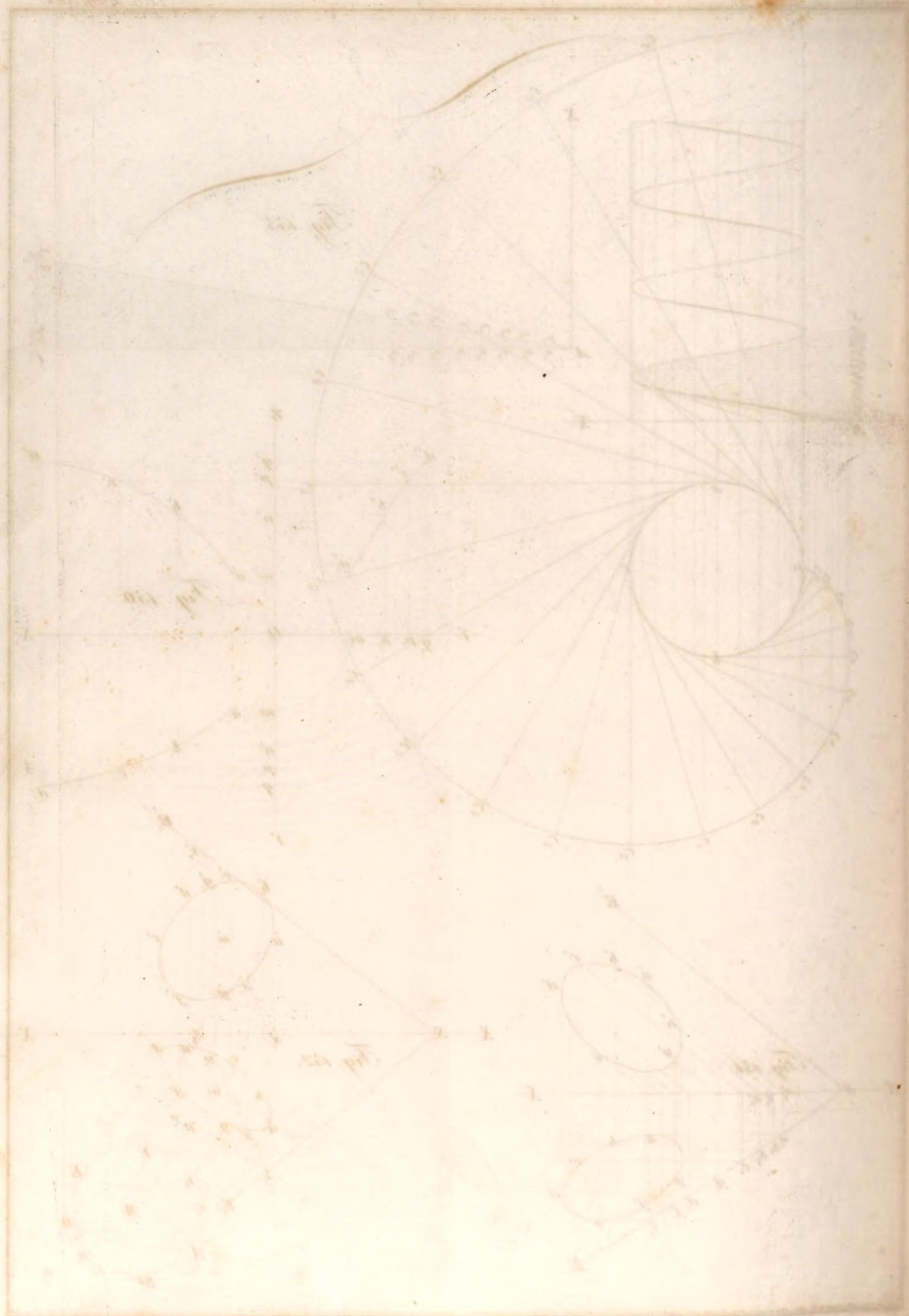
14. 11. 1881



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$







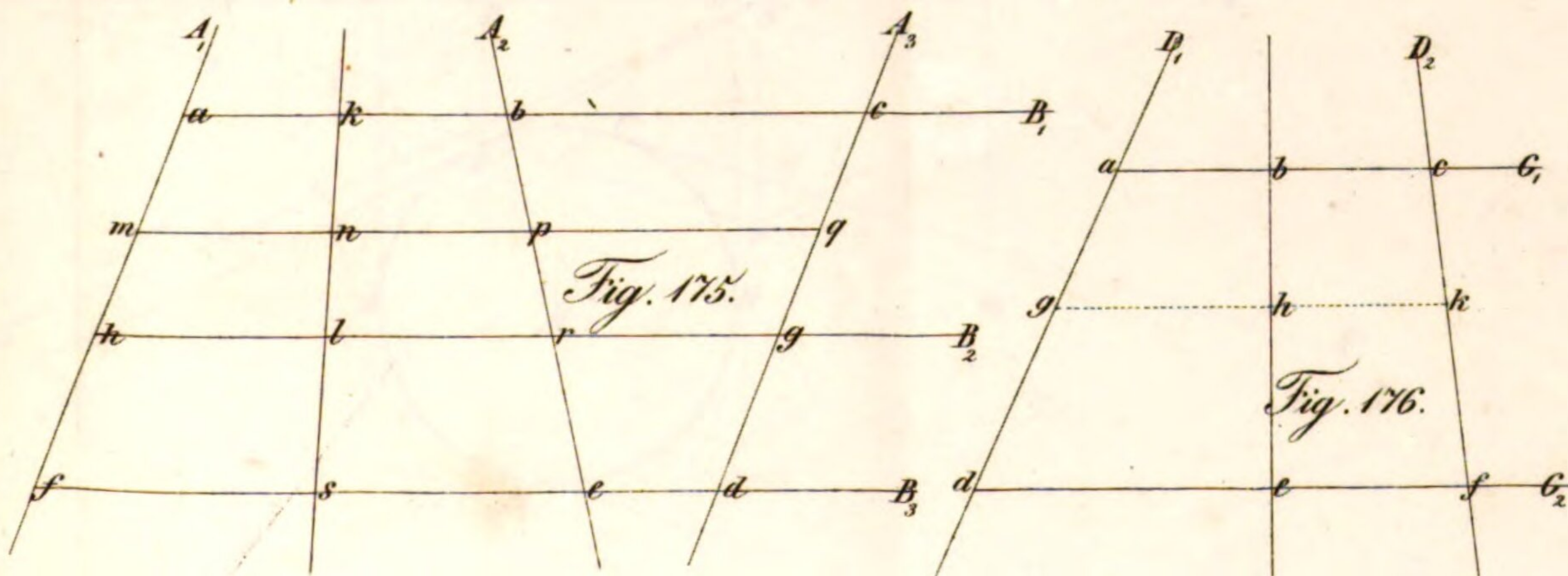
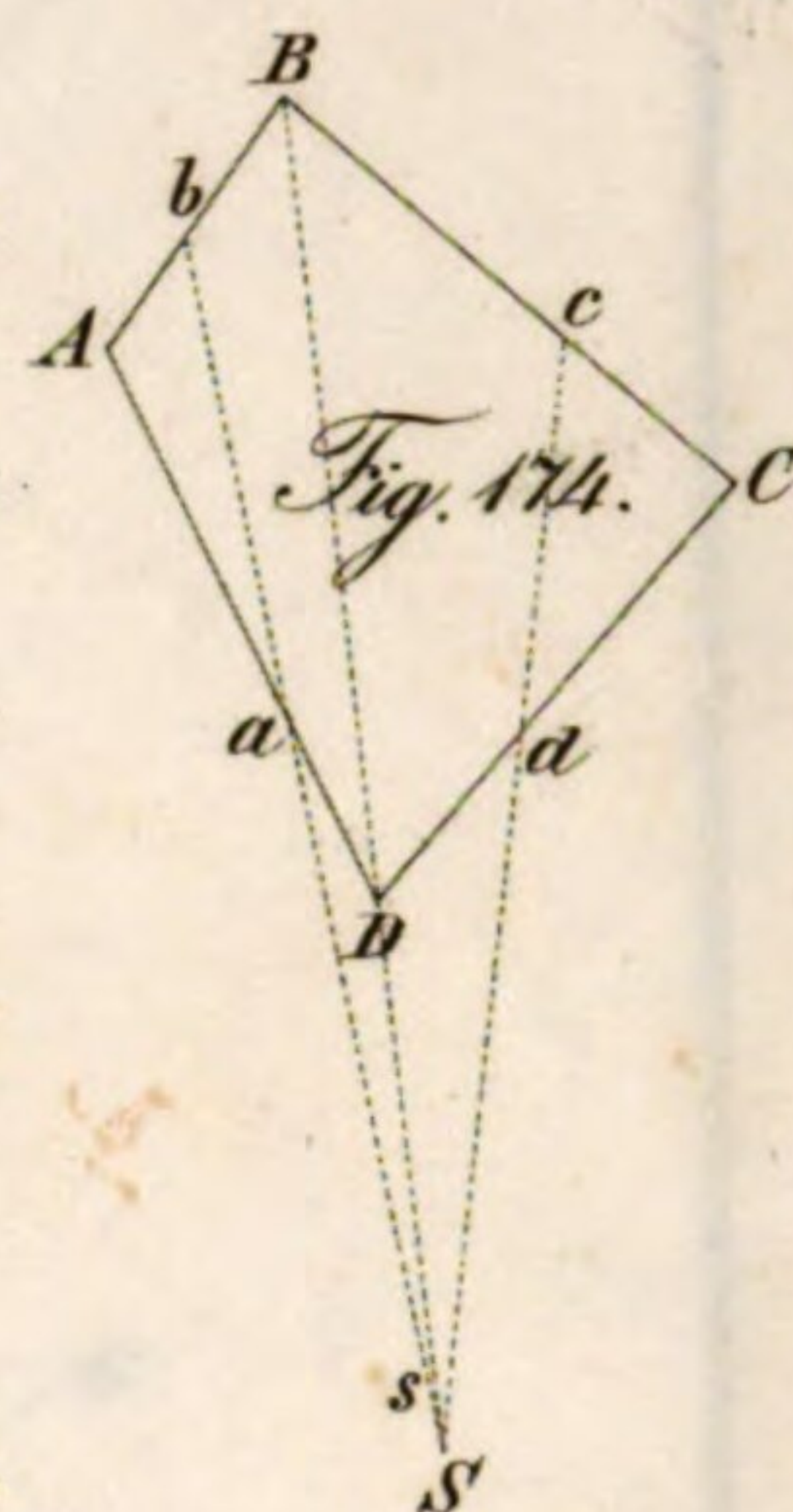
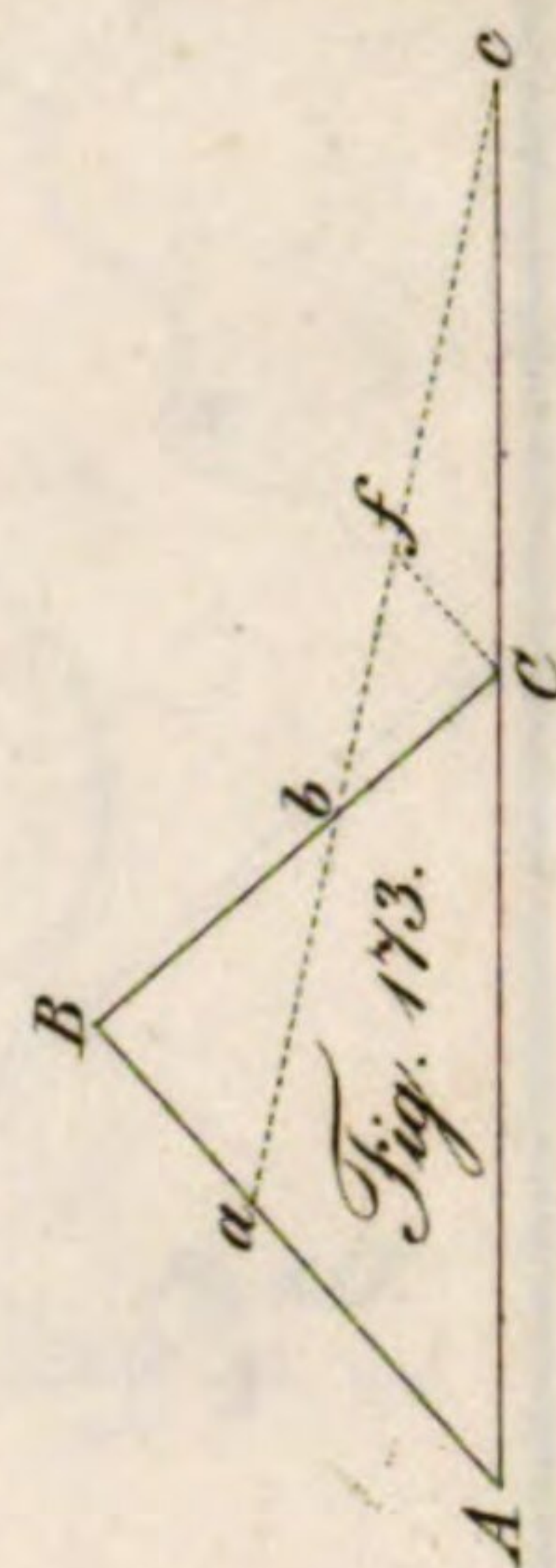
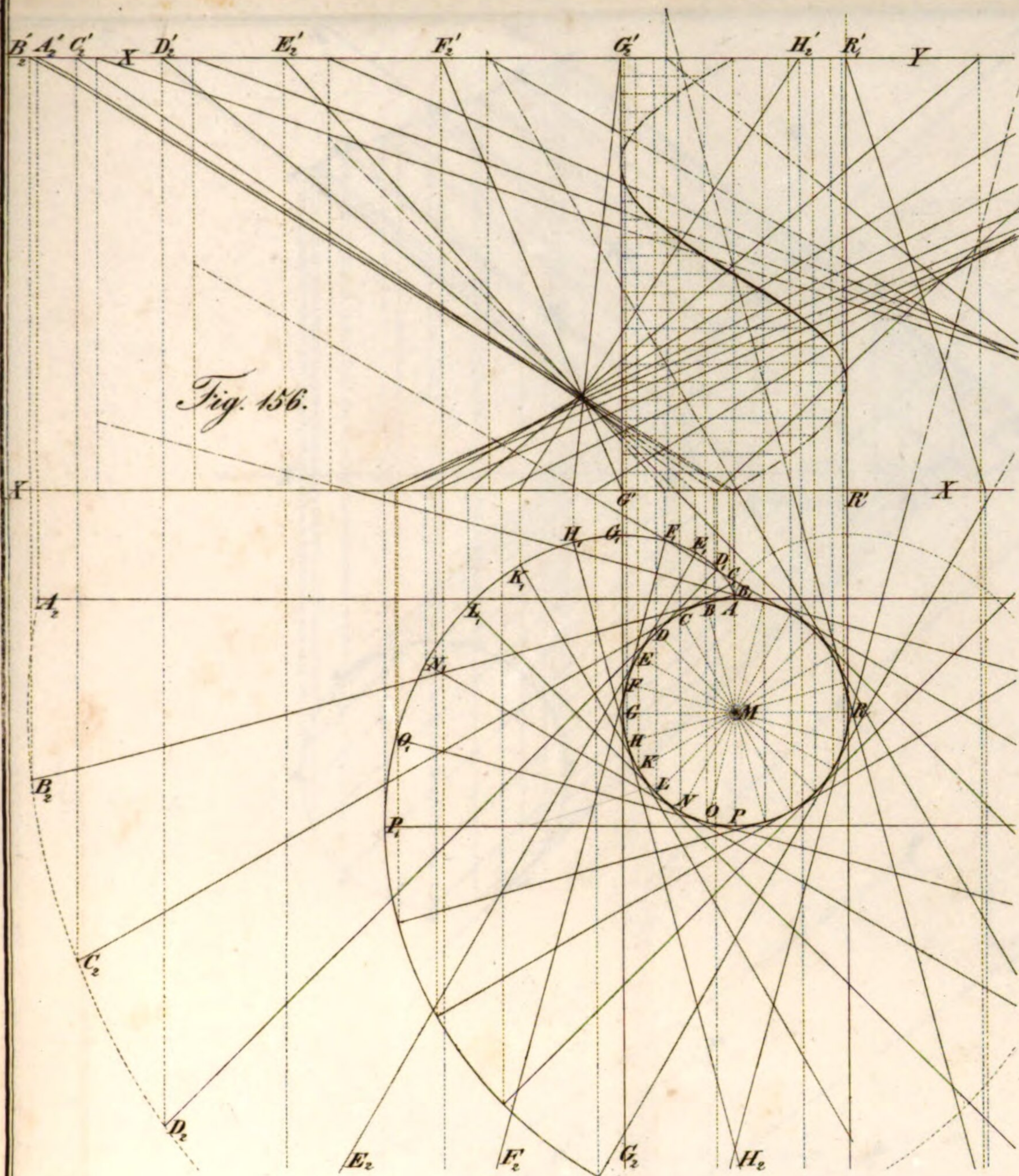
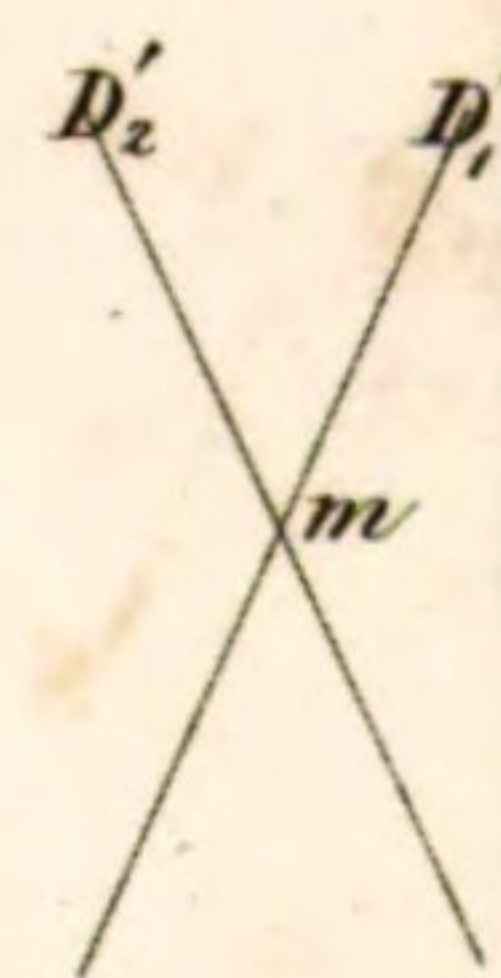


Fig. 176.



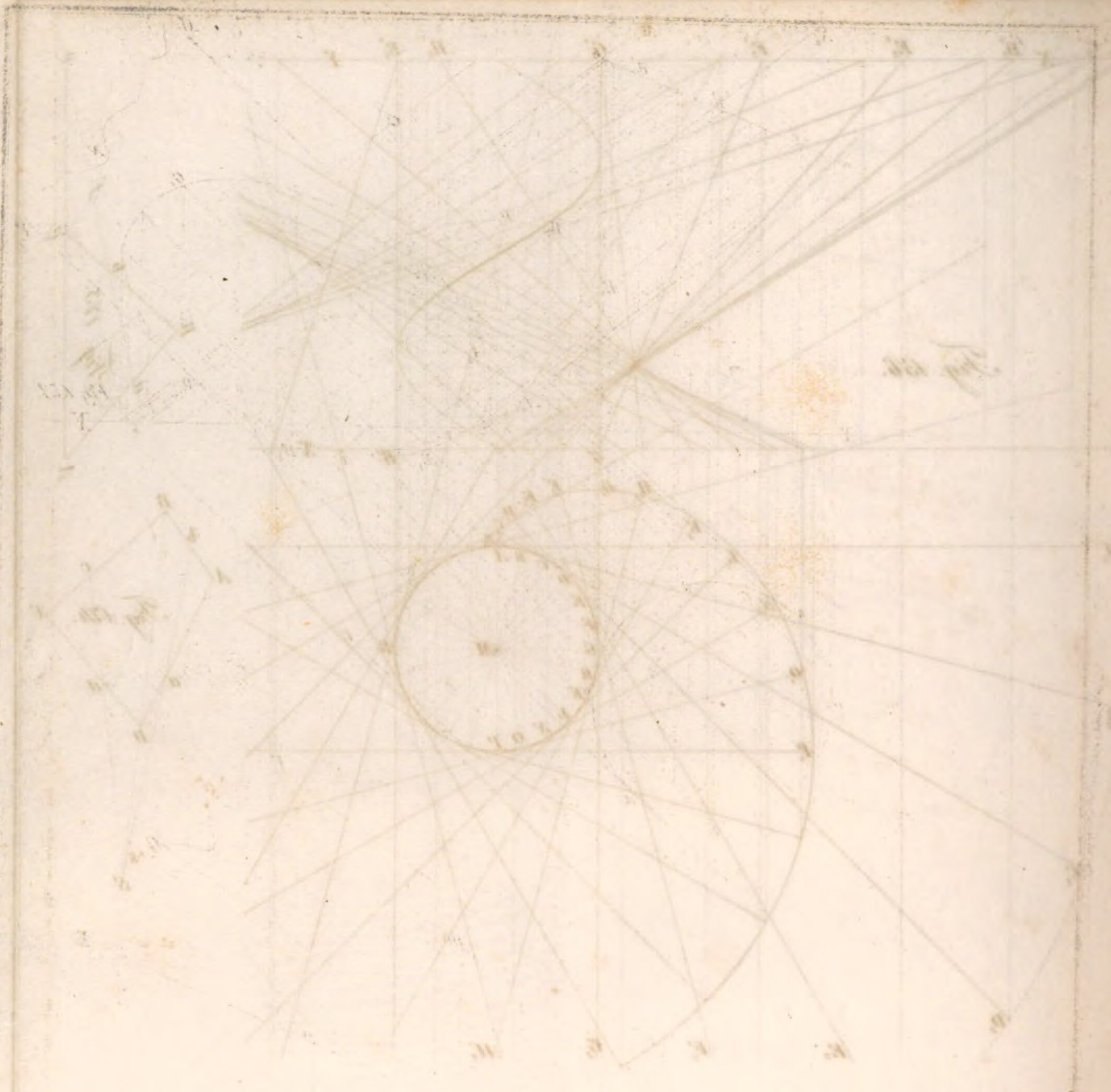


Fig. 1

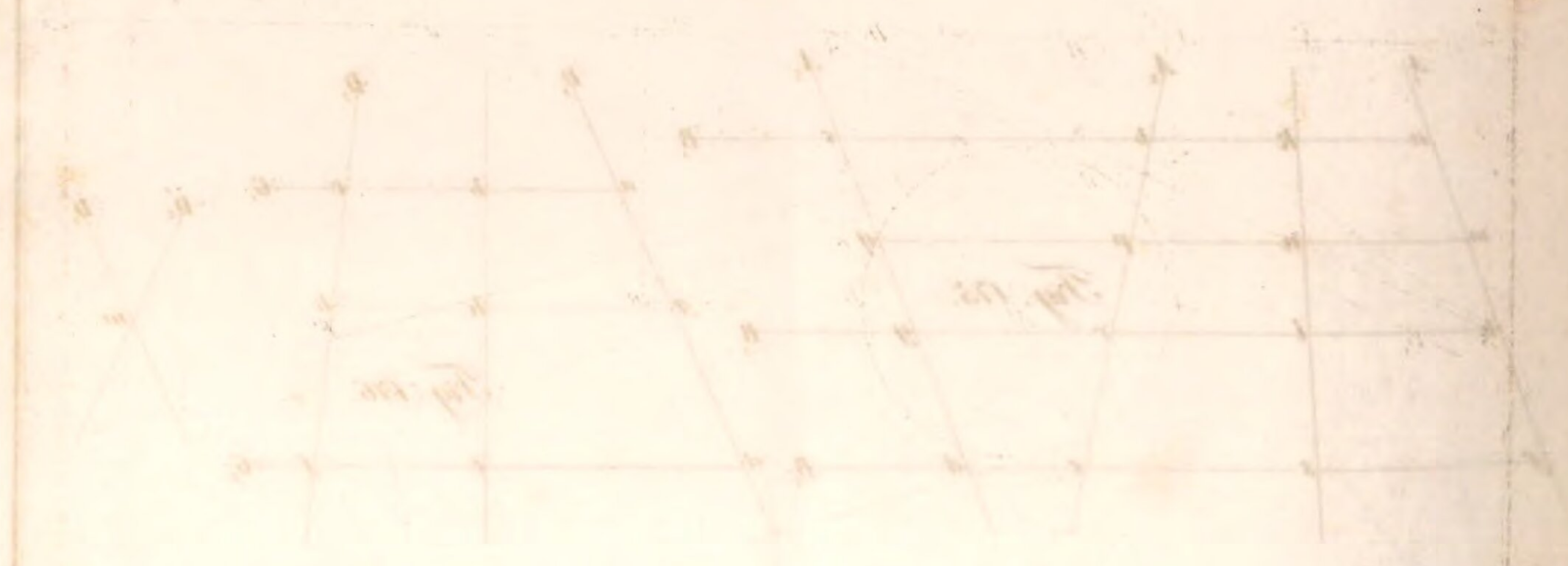
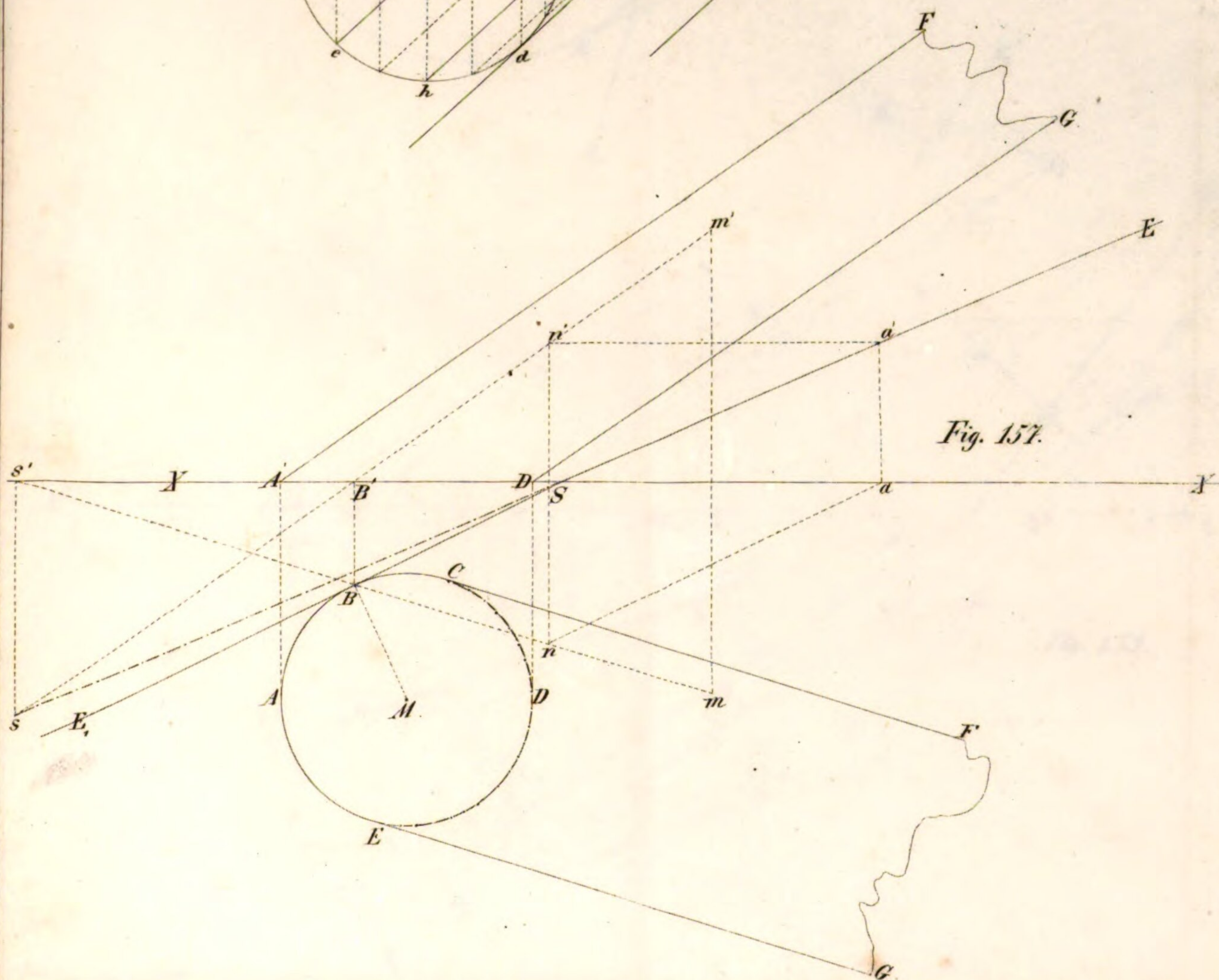
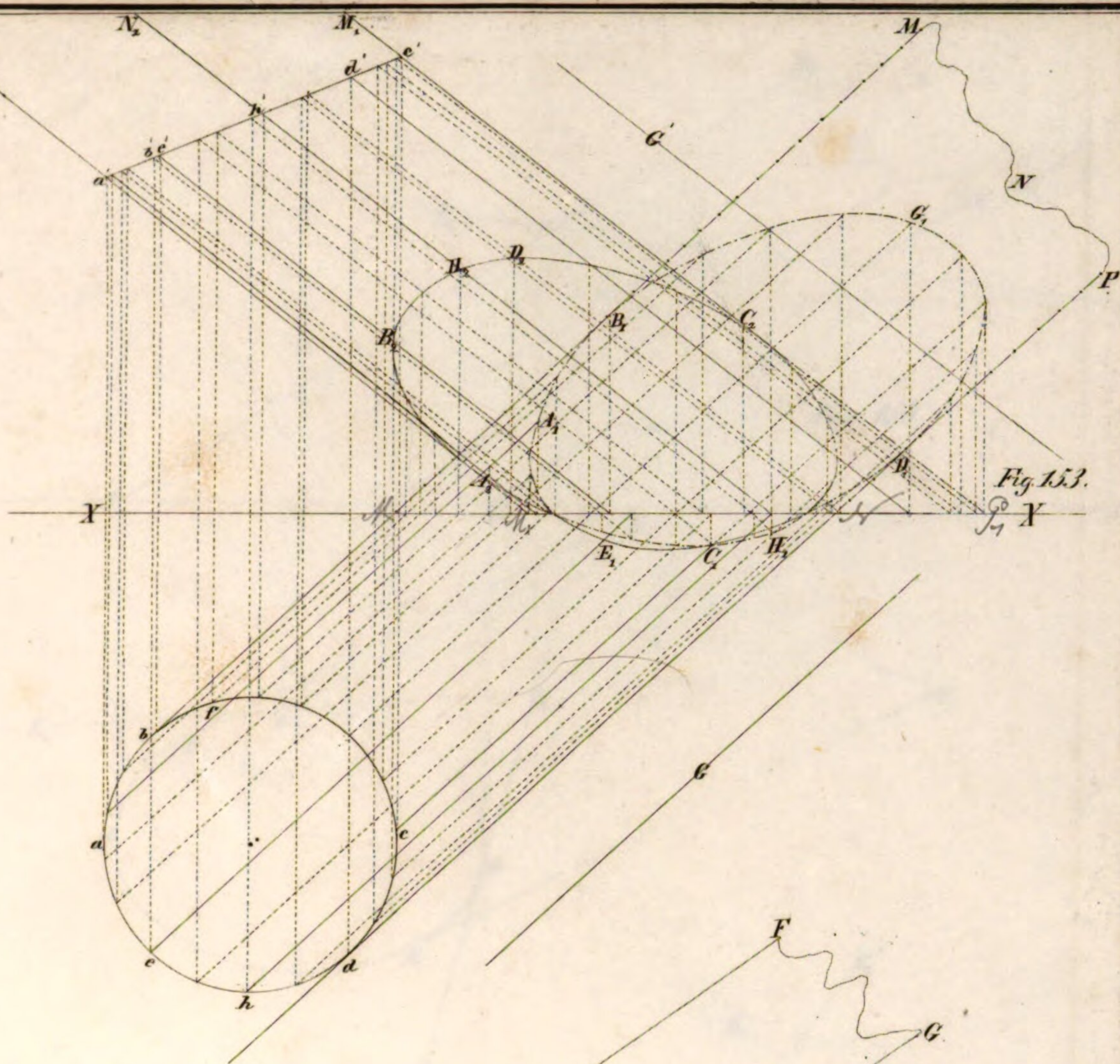
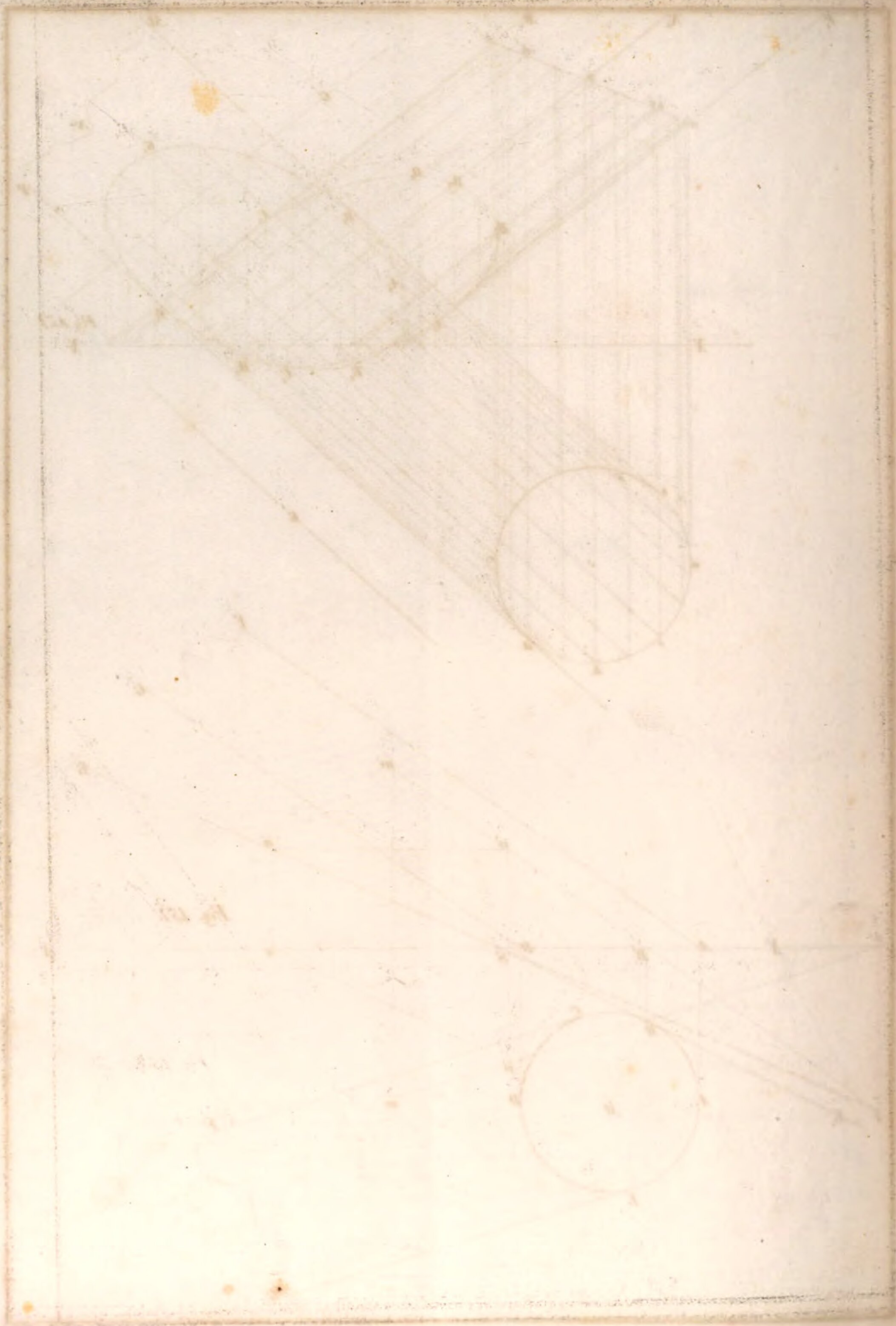
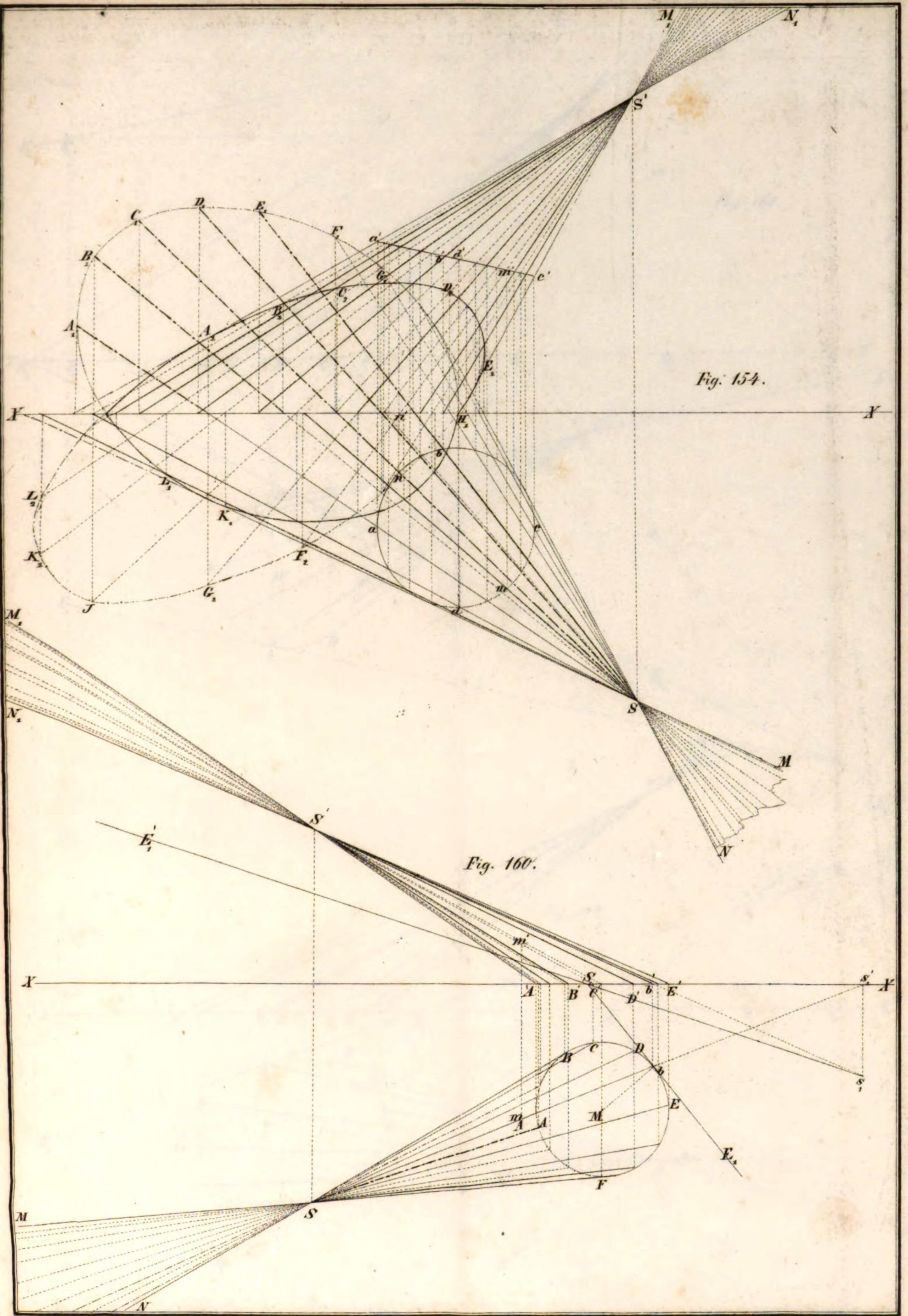


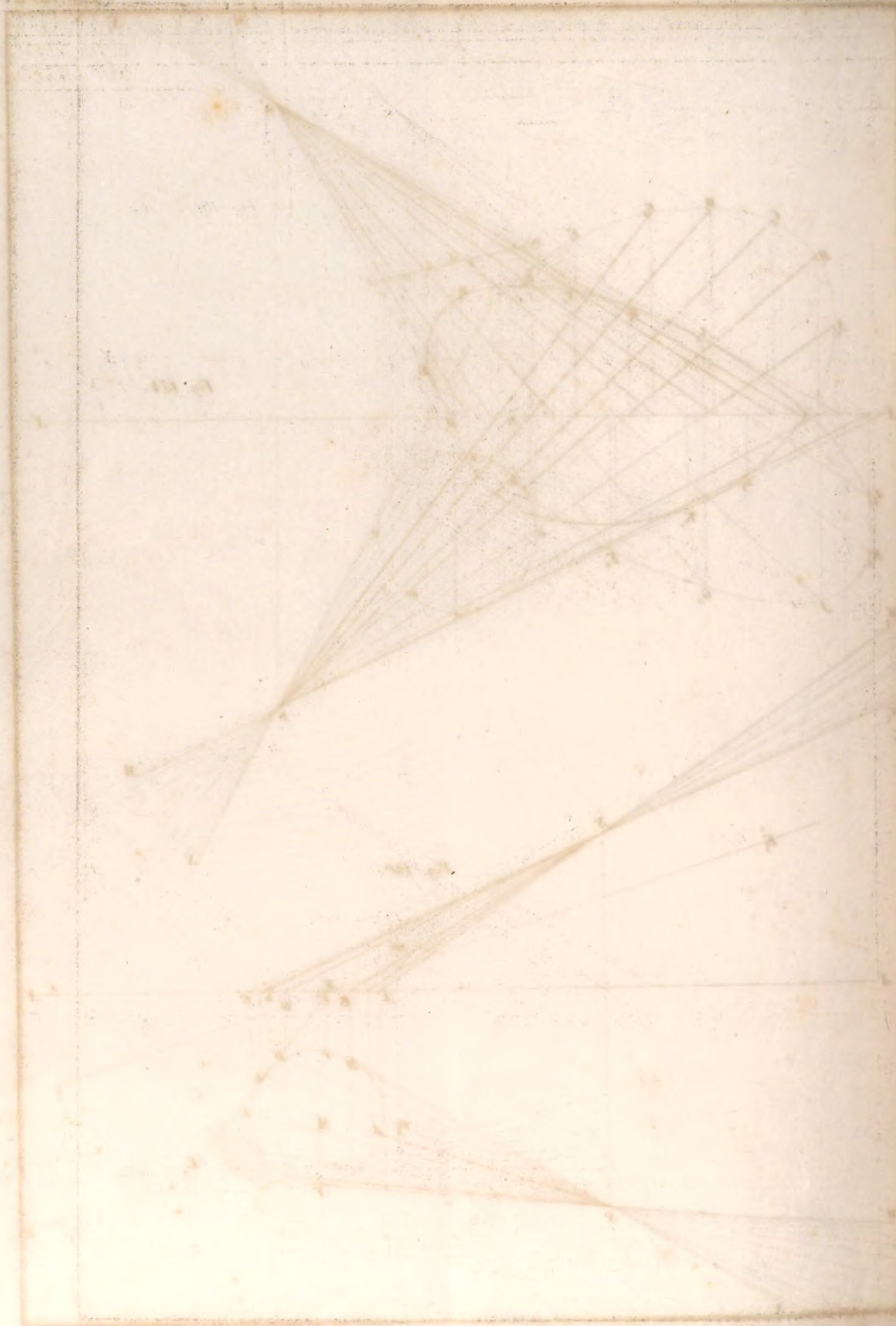
Fig. 2

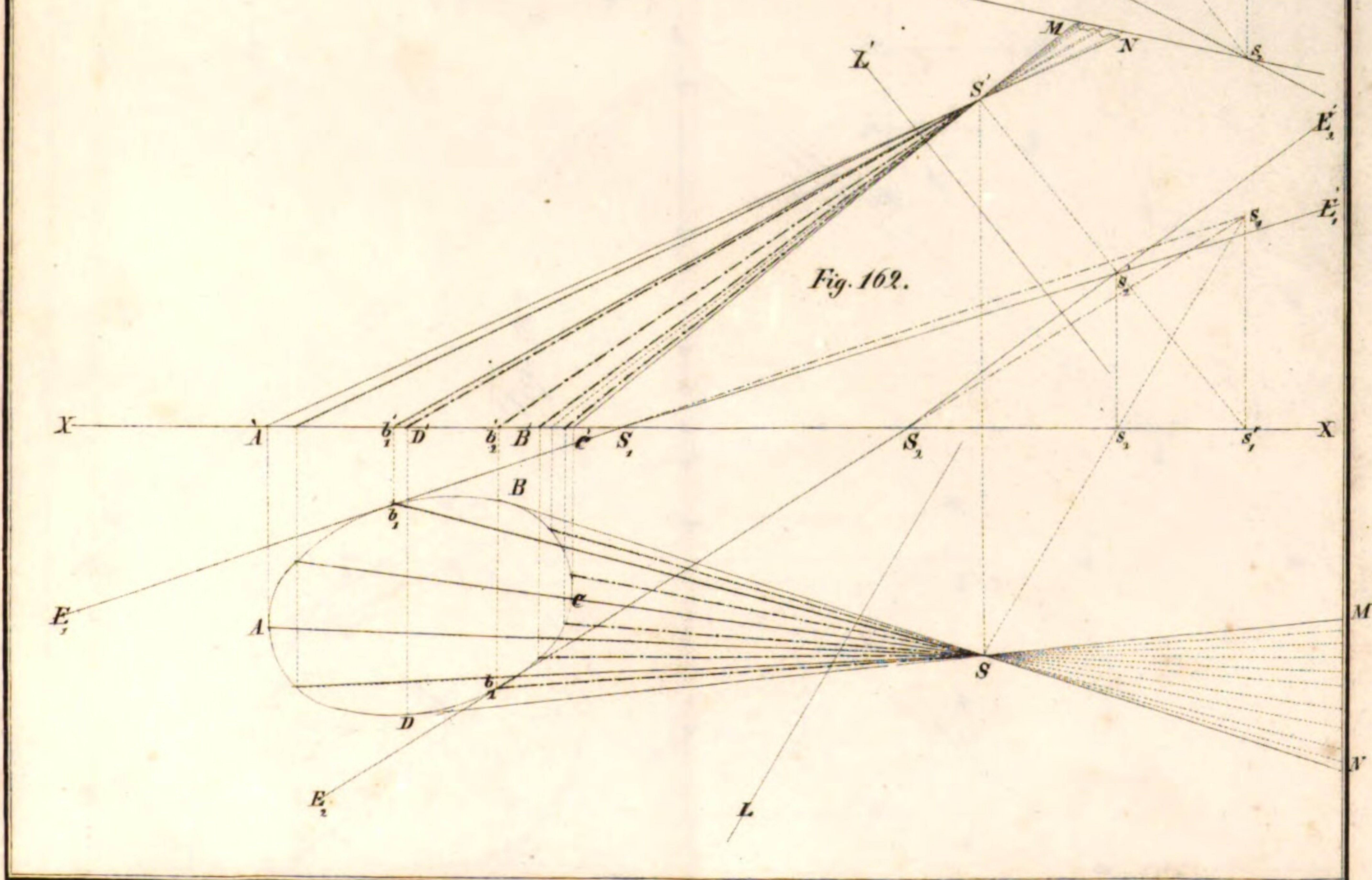
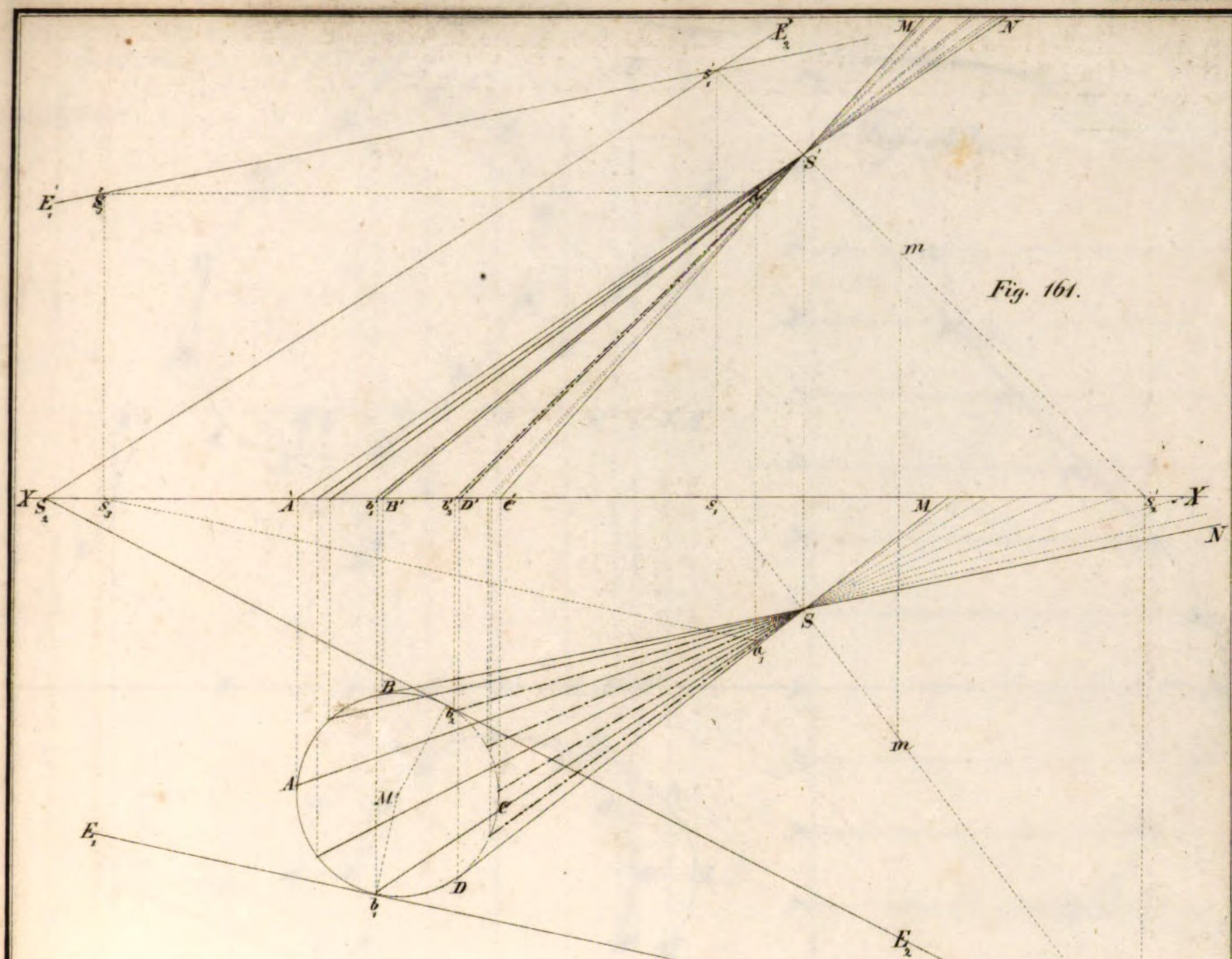


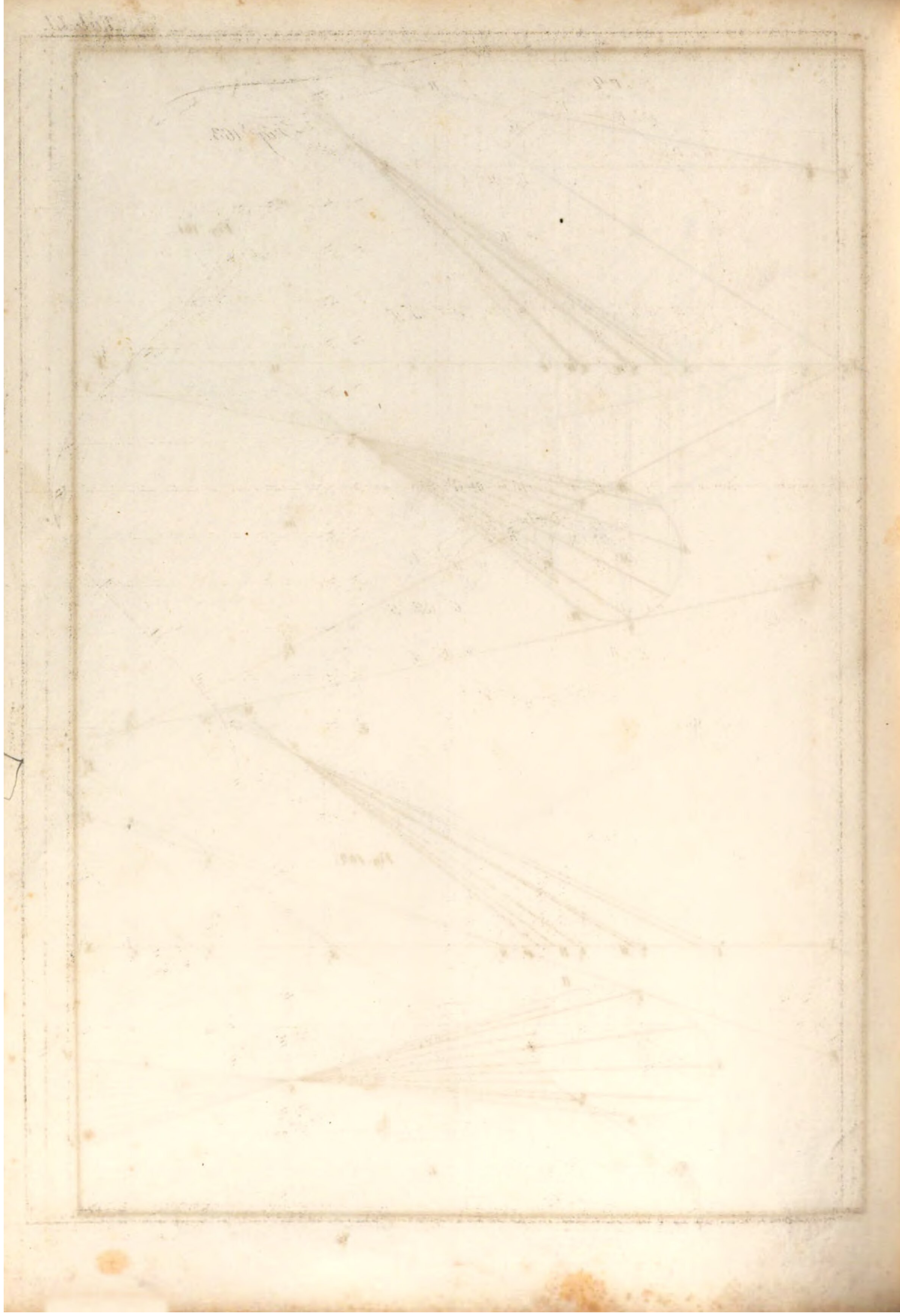


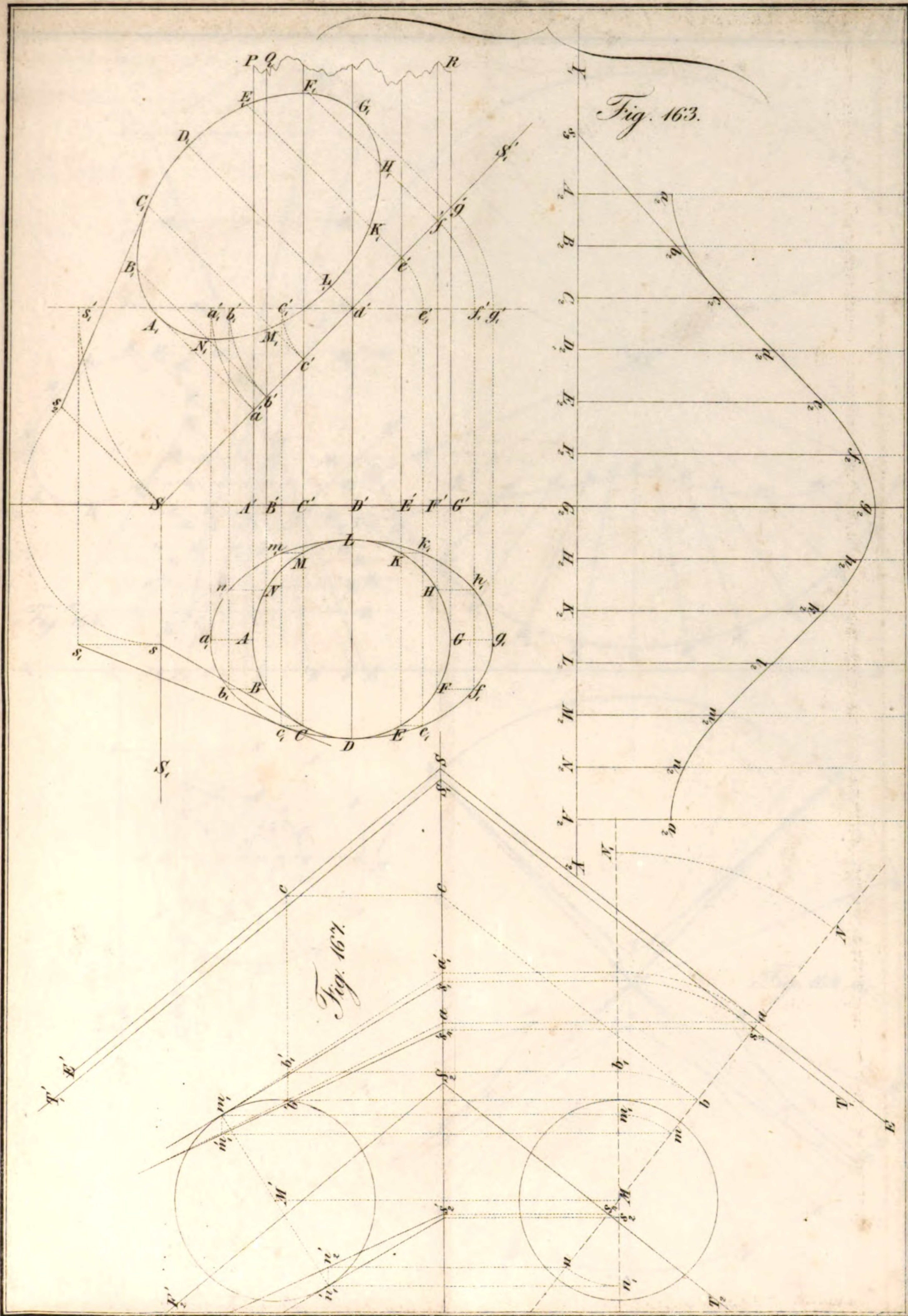


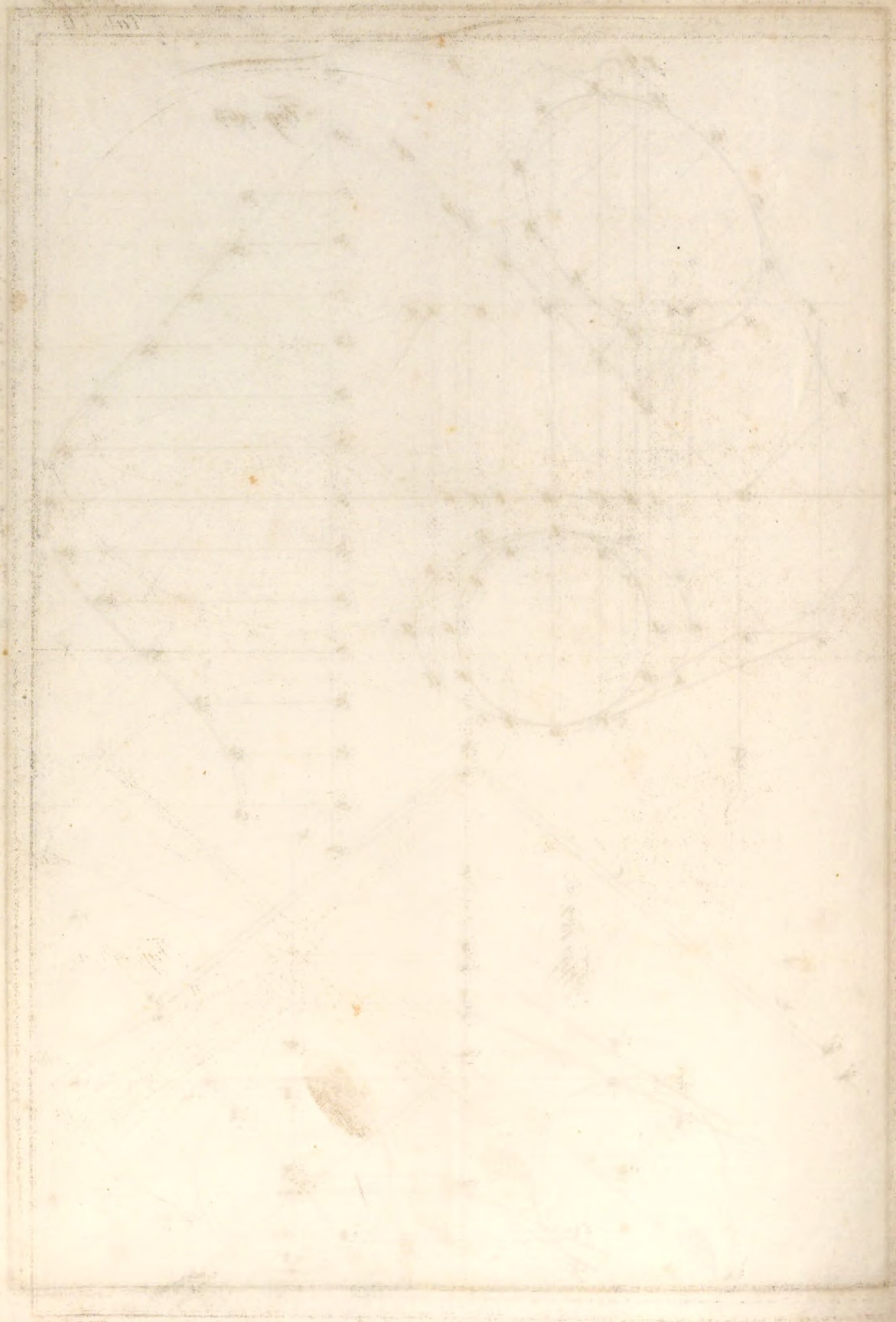


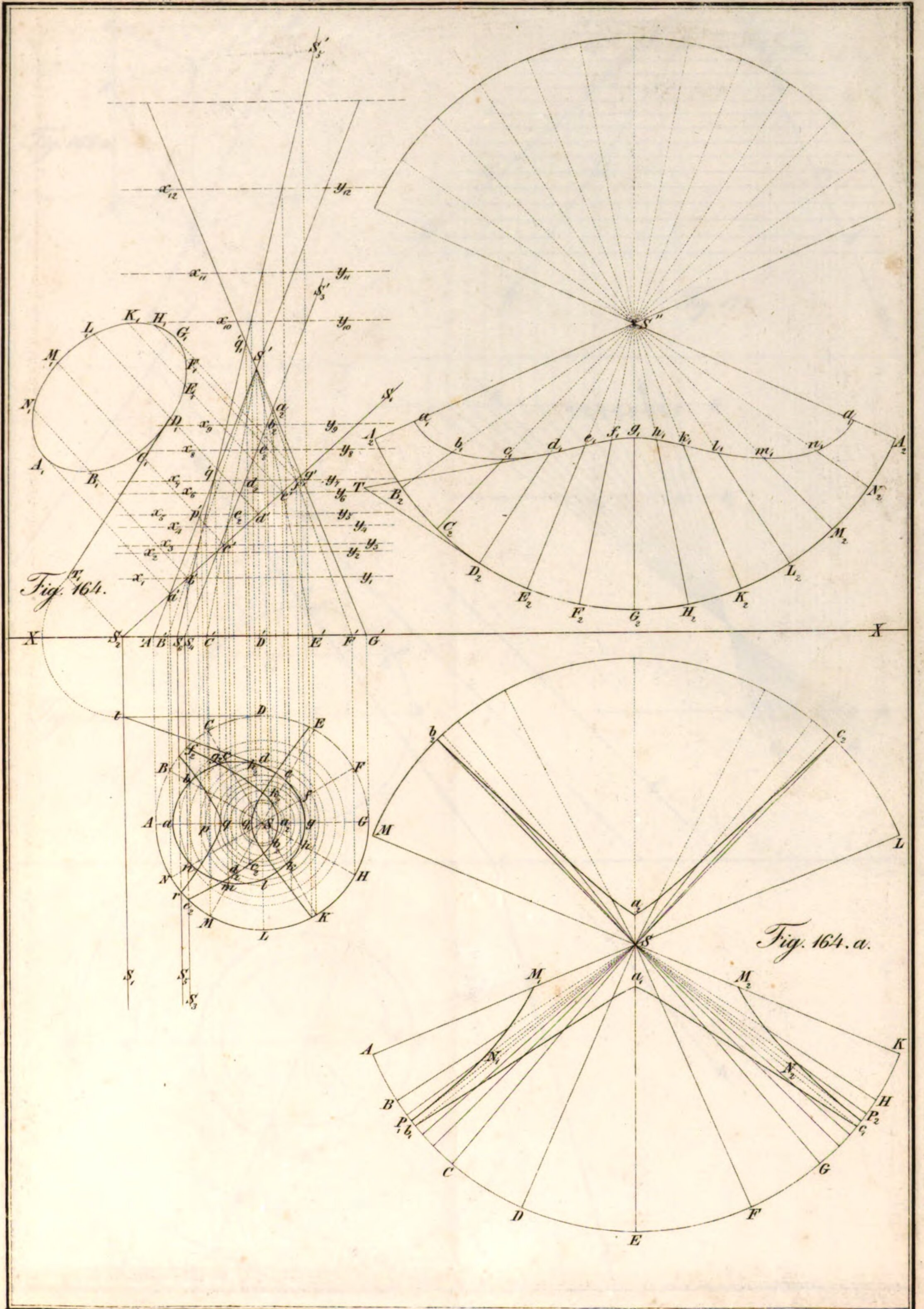




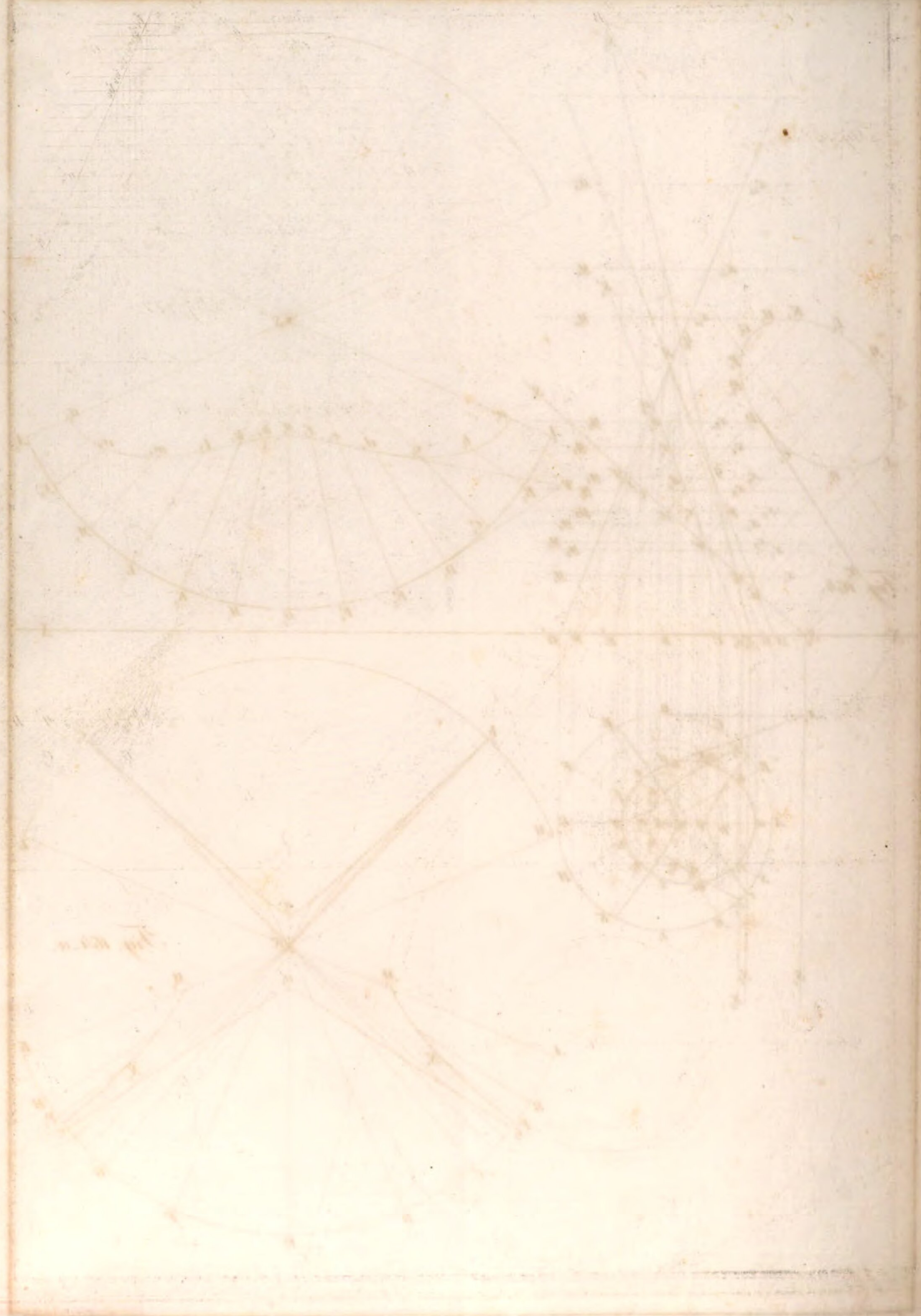








Top 11



Top 11

Fig. 168. a.

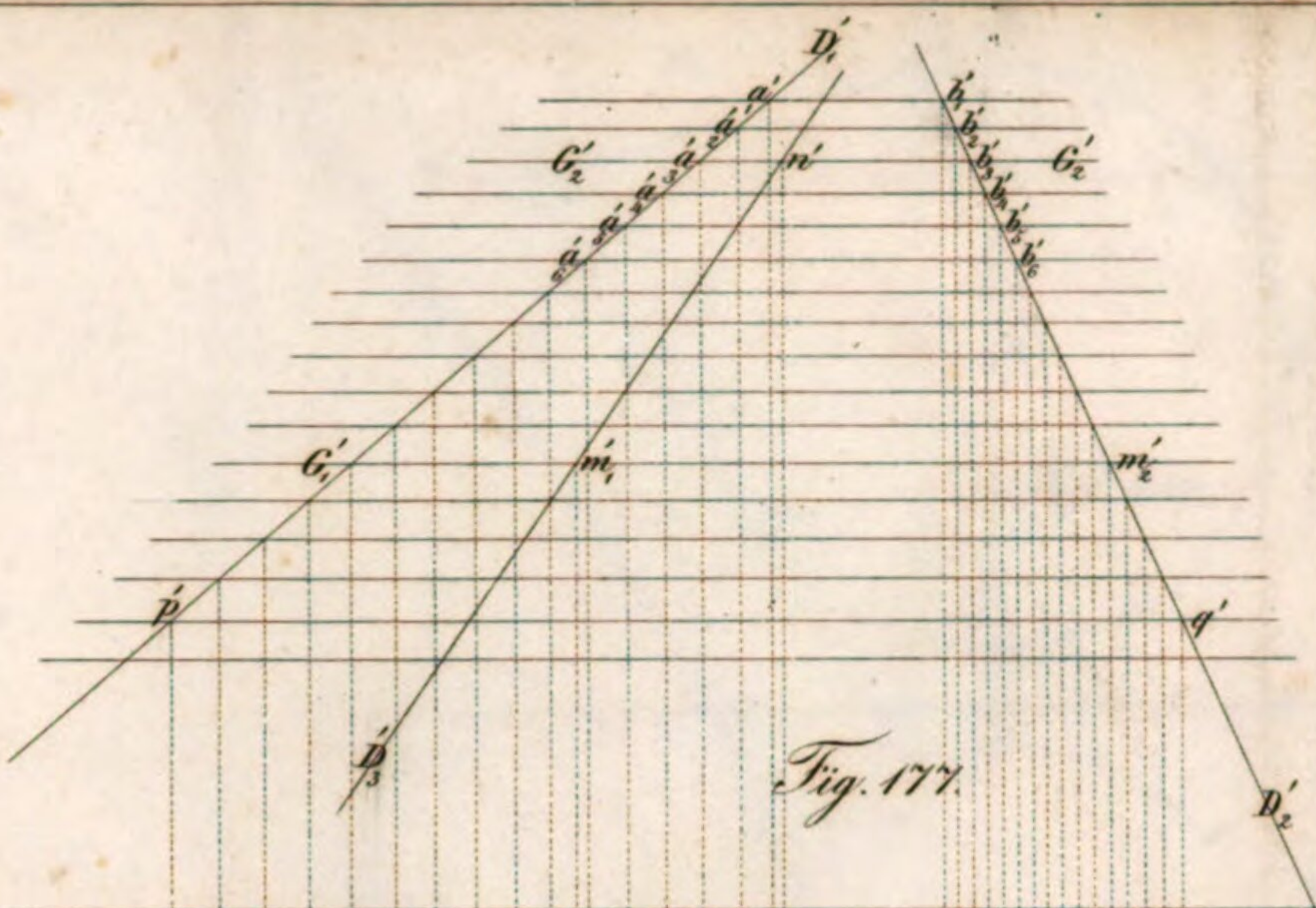
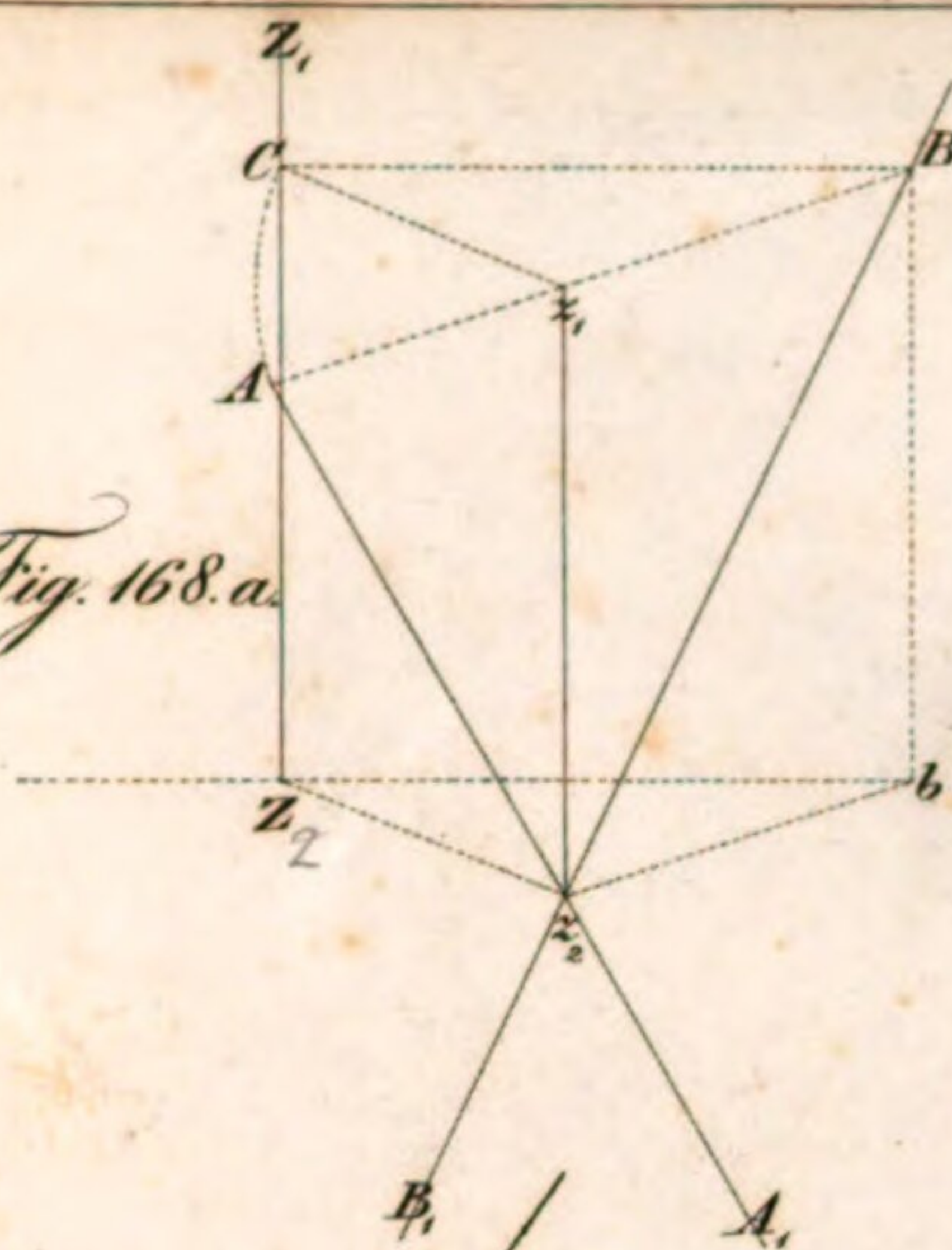
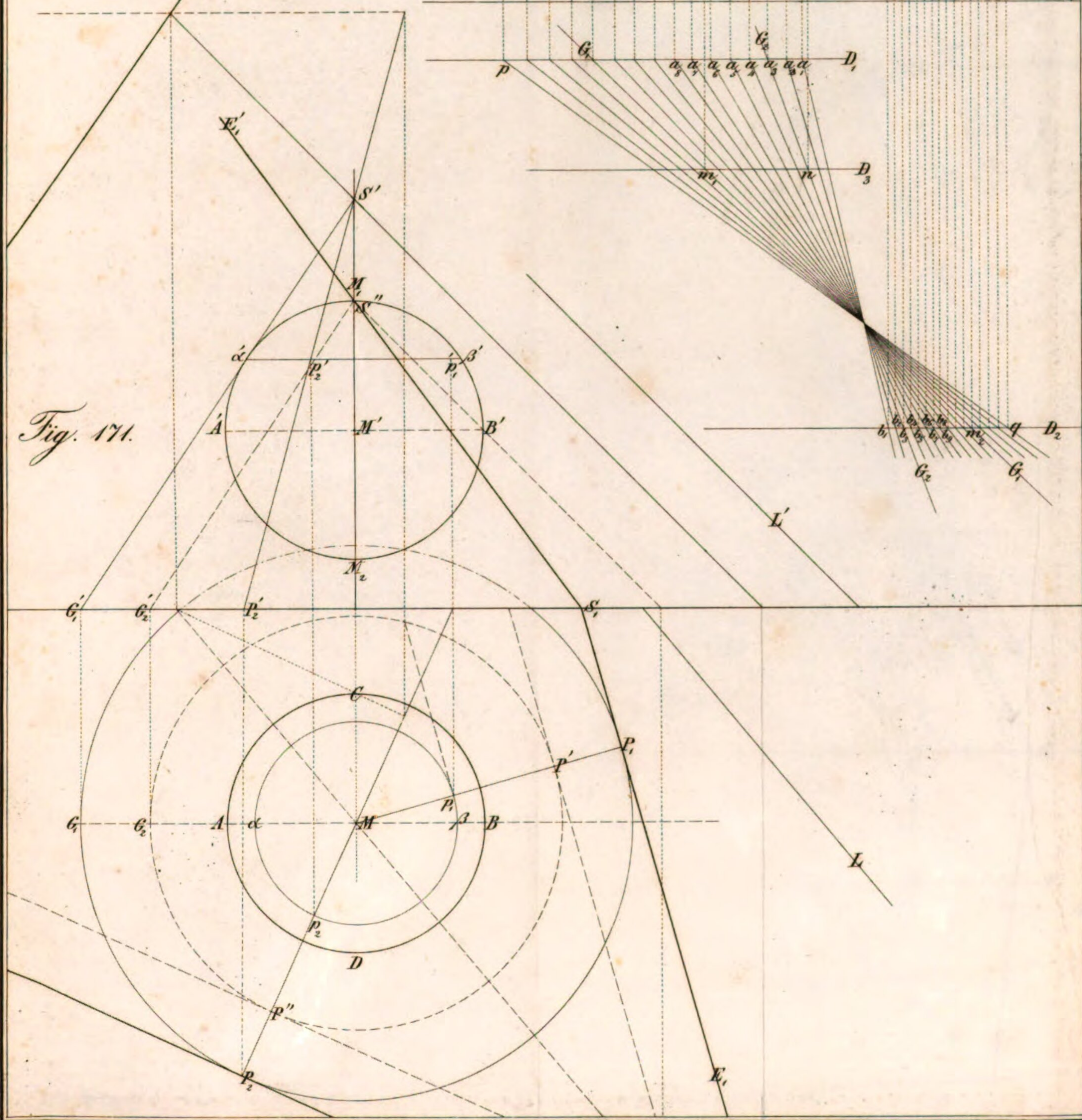
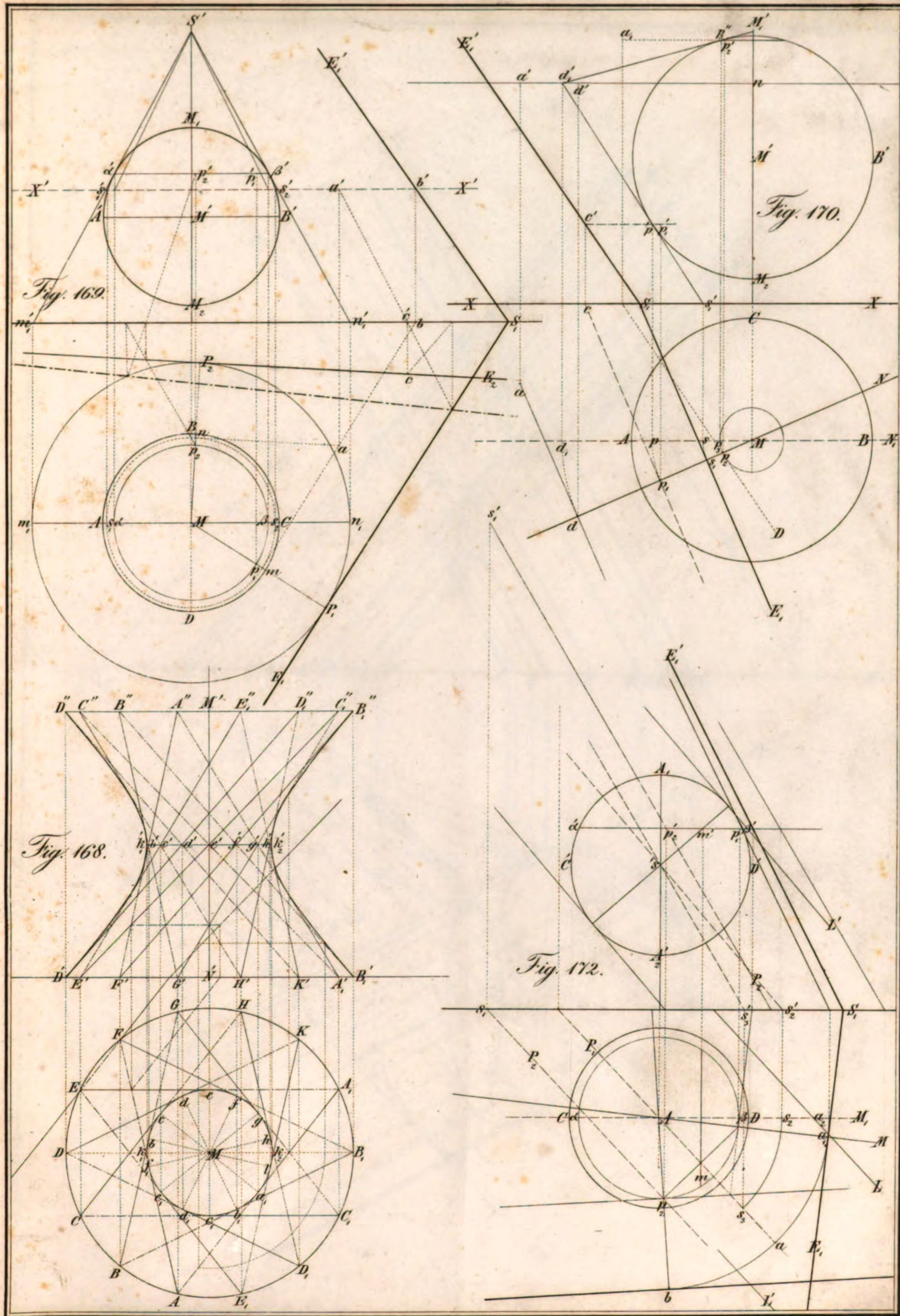


Fig. 177.

Fig. 171.







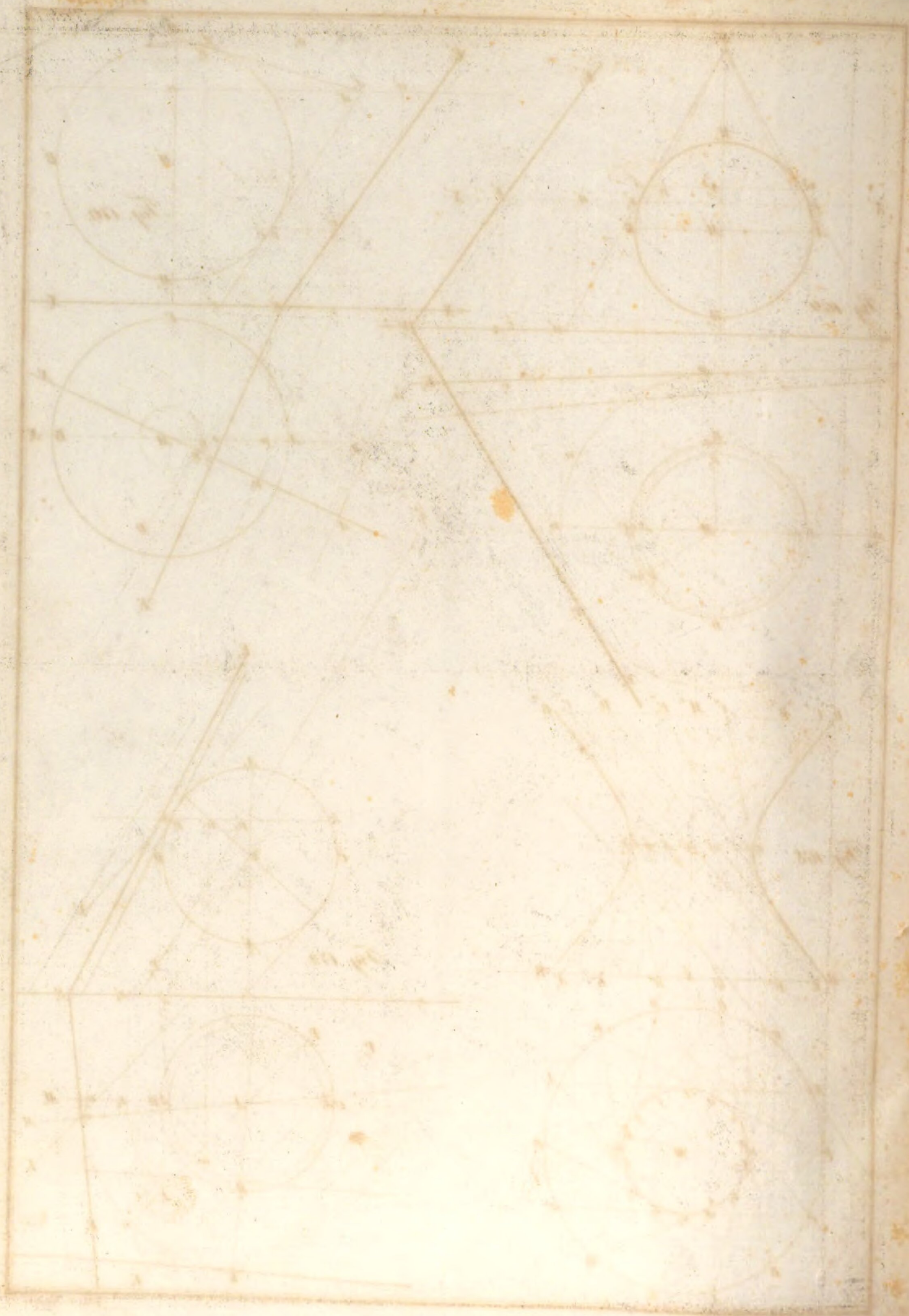
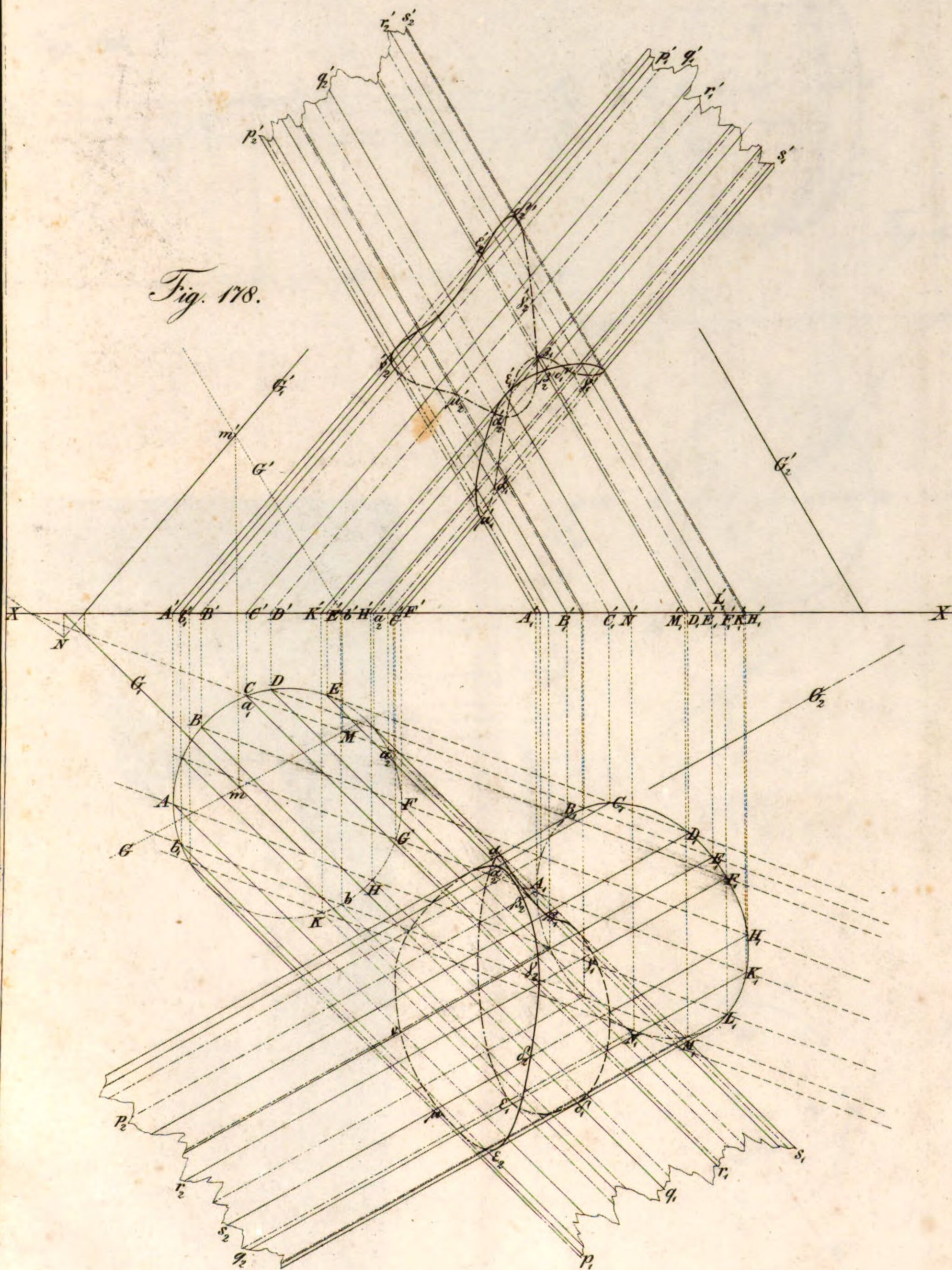


Fig. 178.



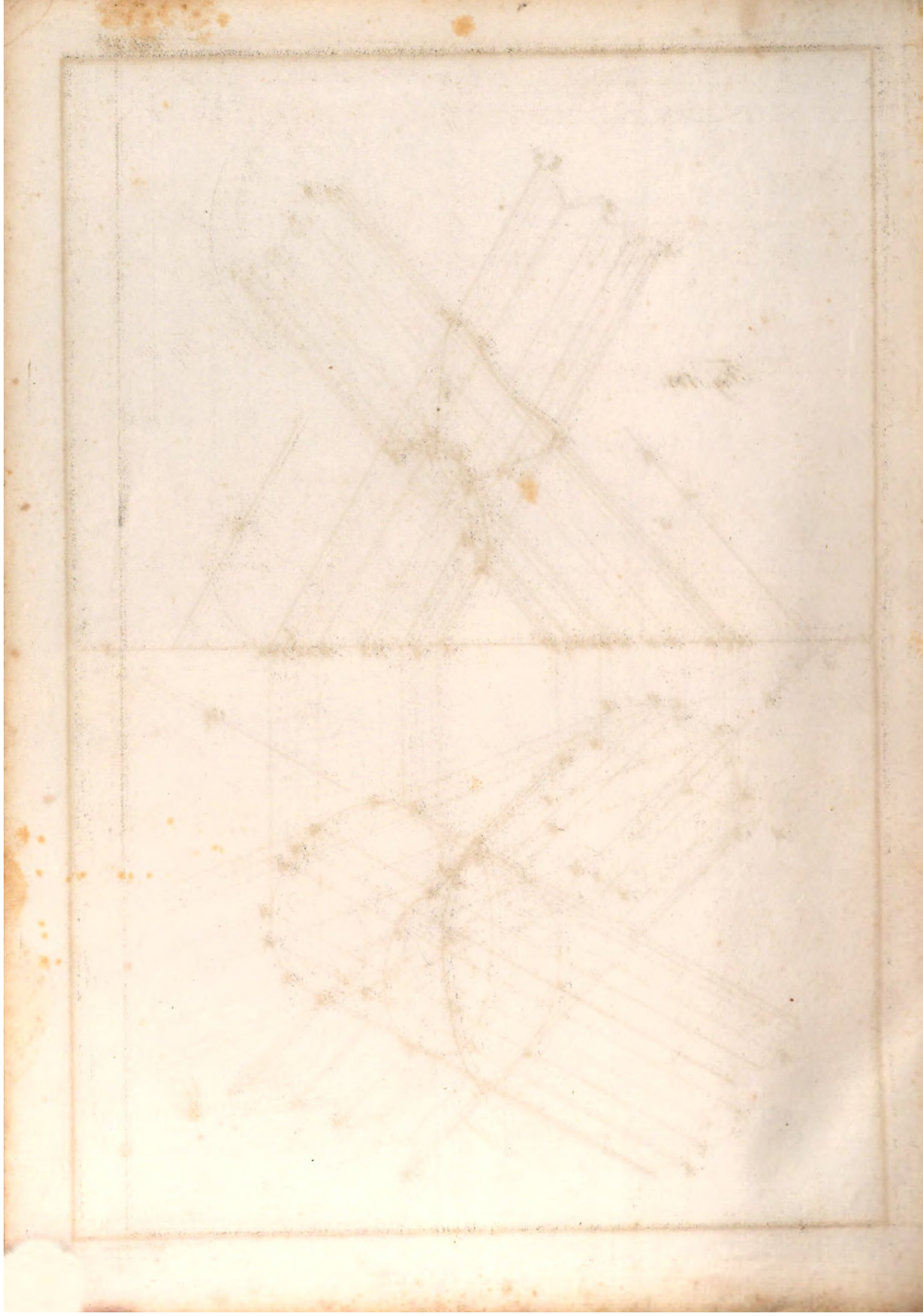


Fig. 179.

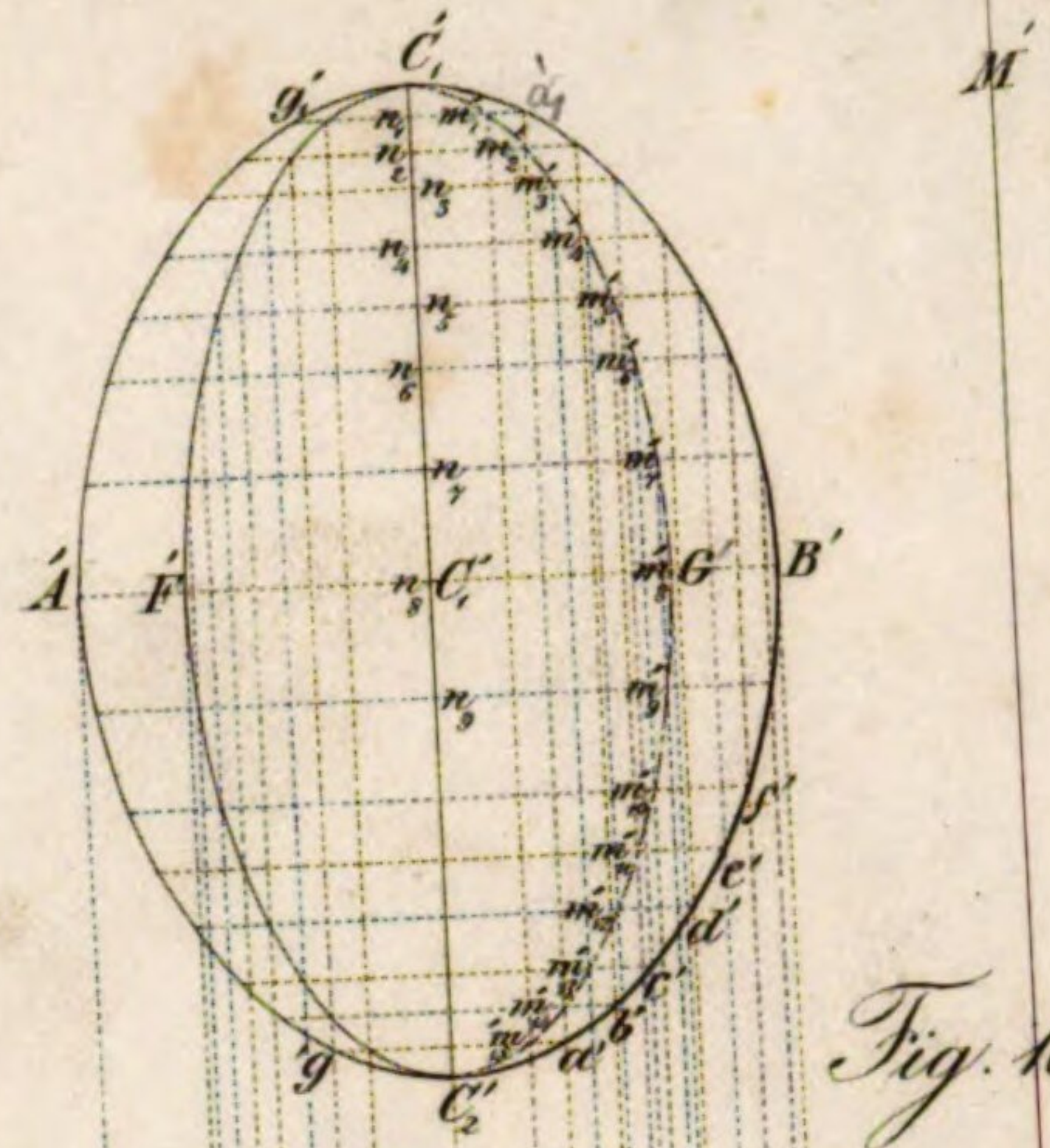
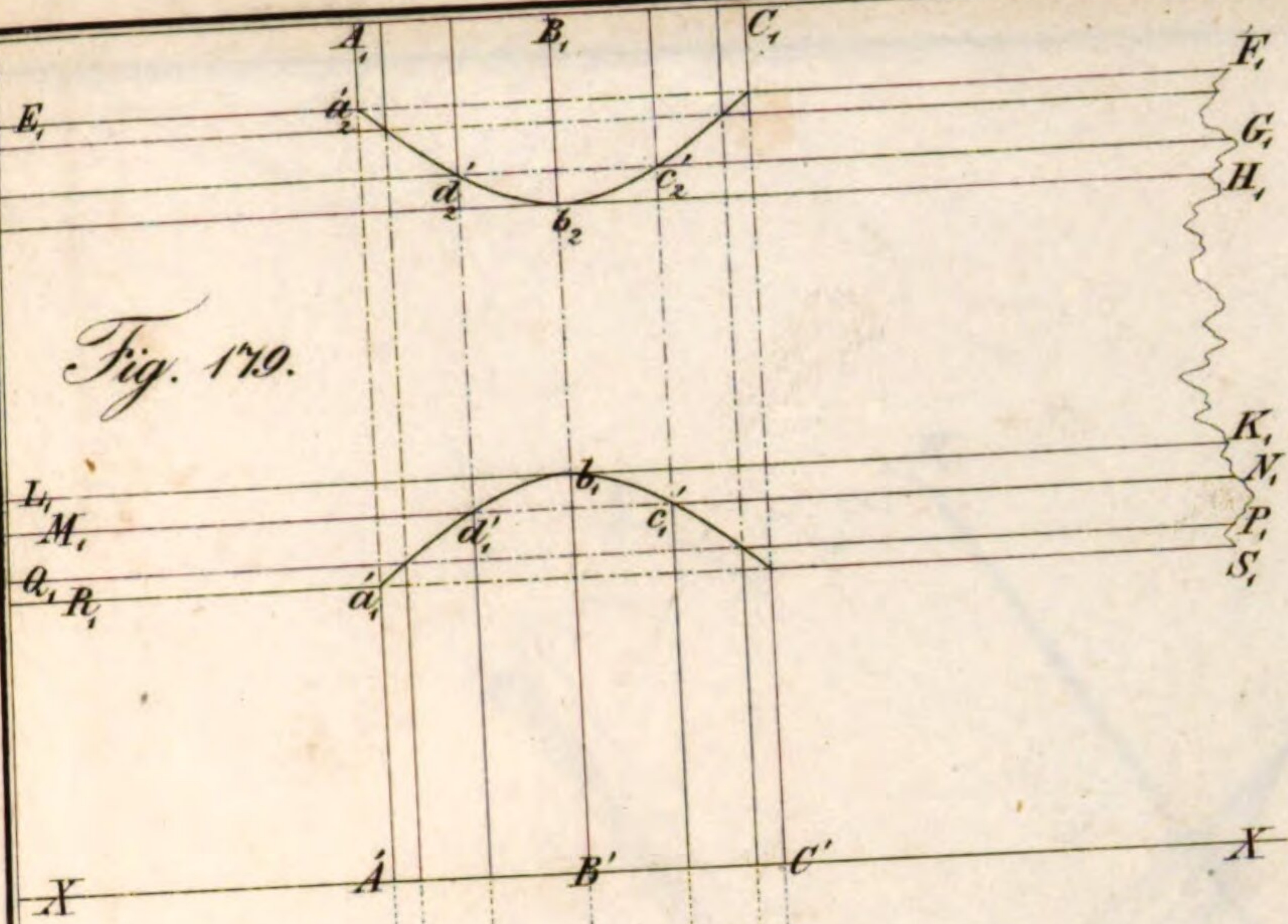


Fig. 165.

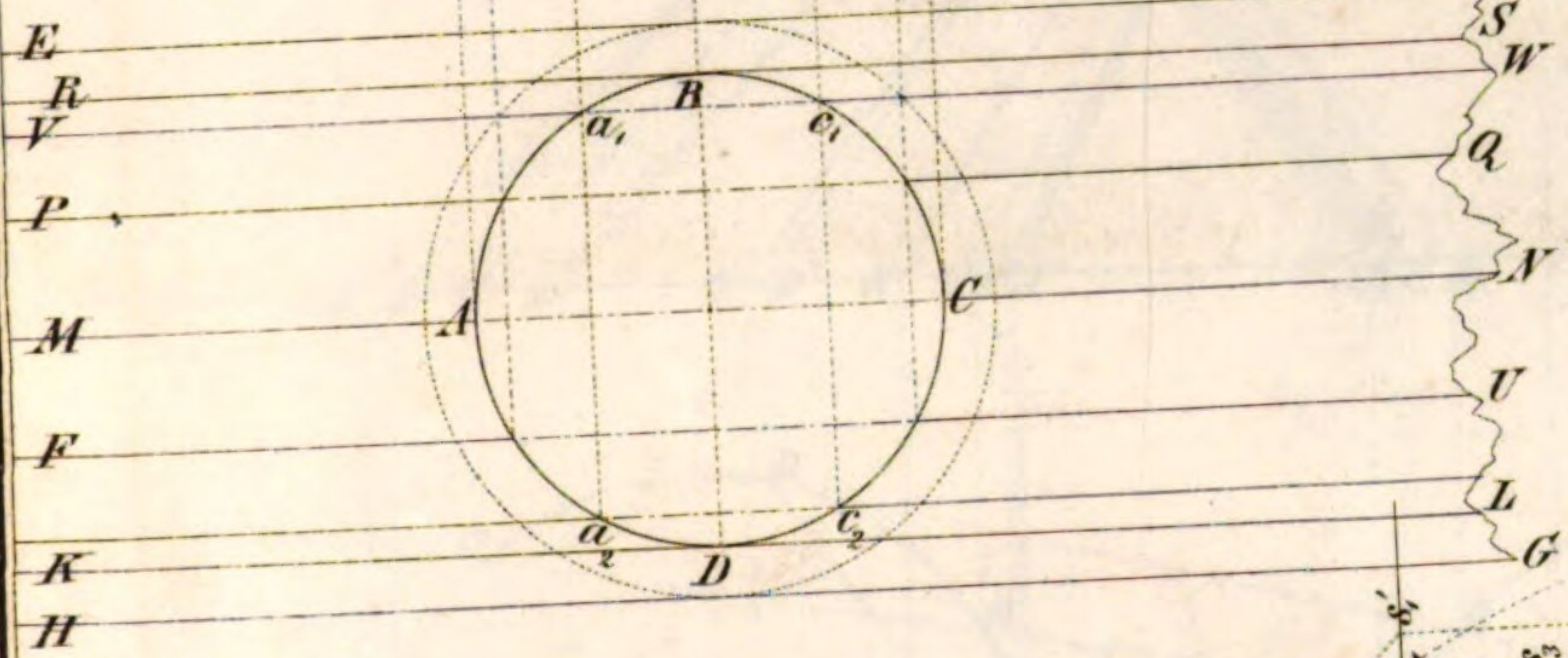
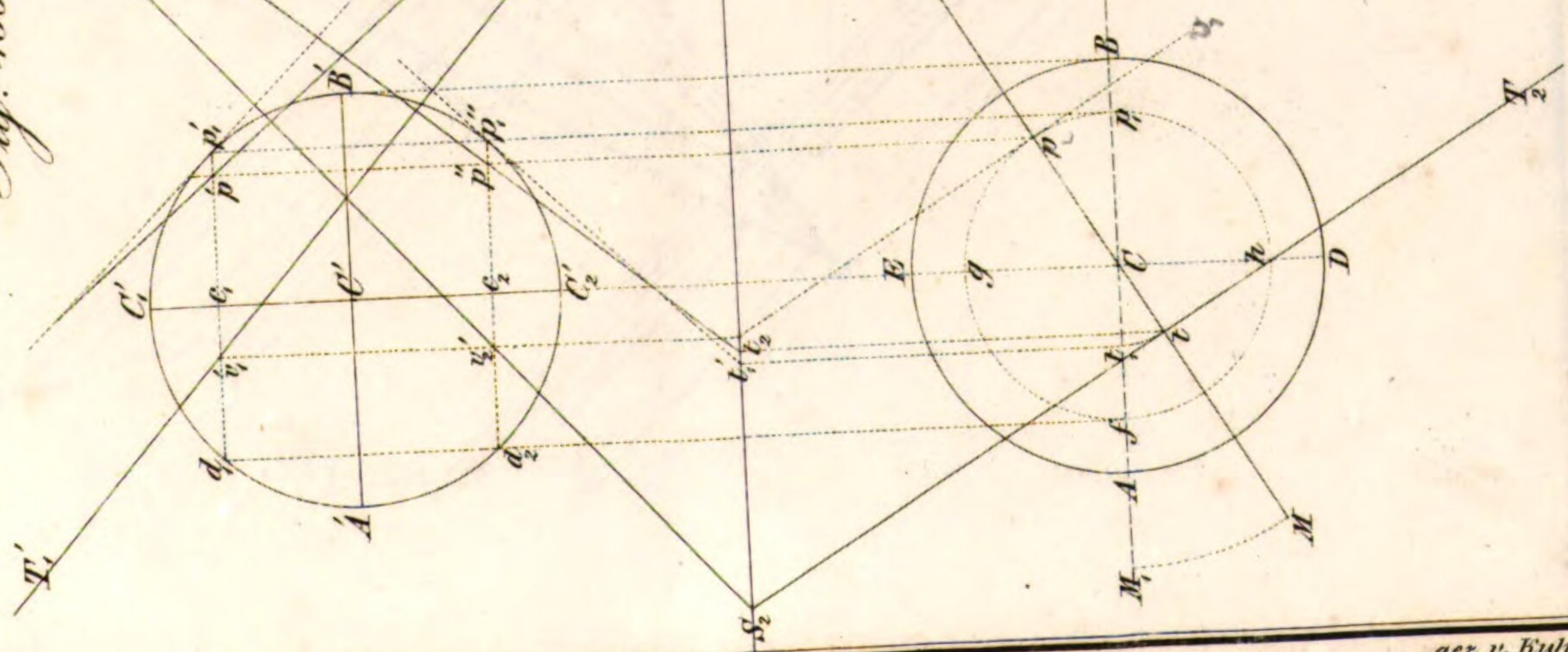
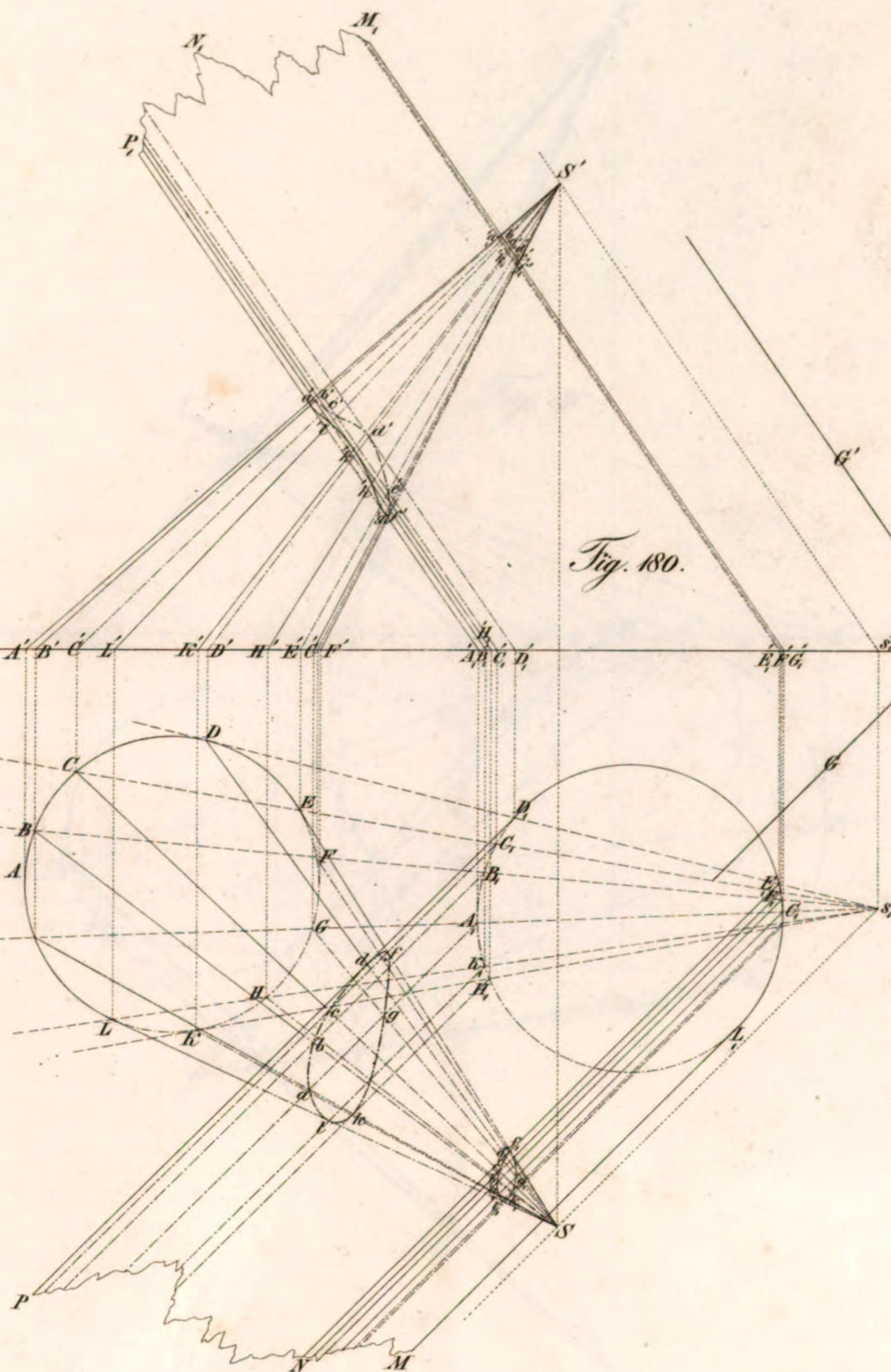
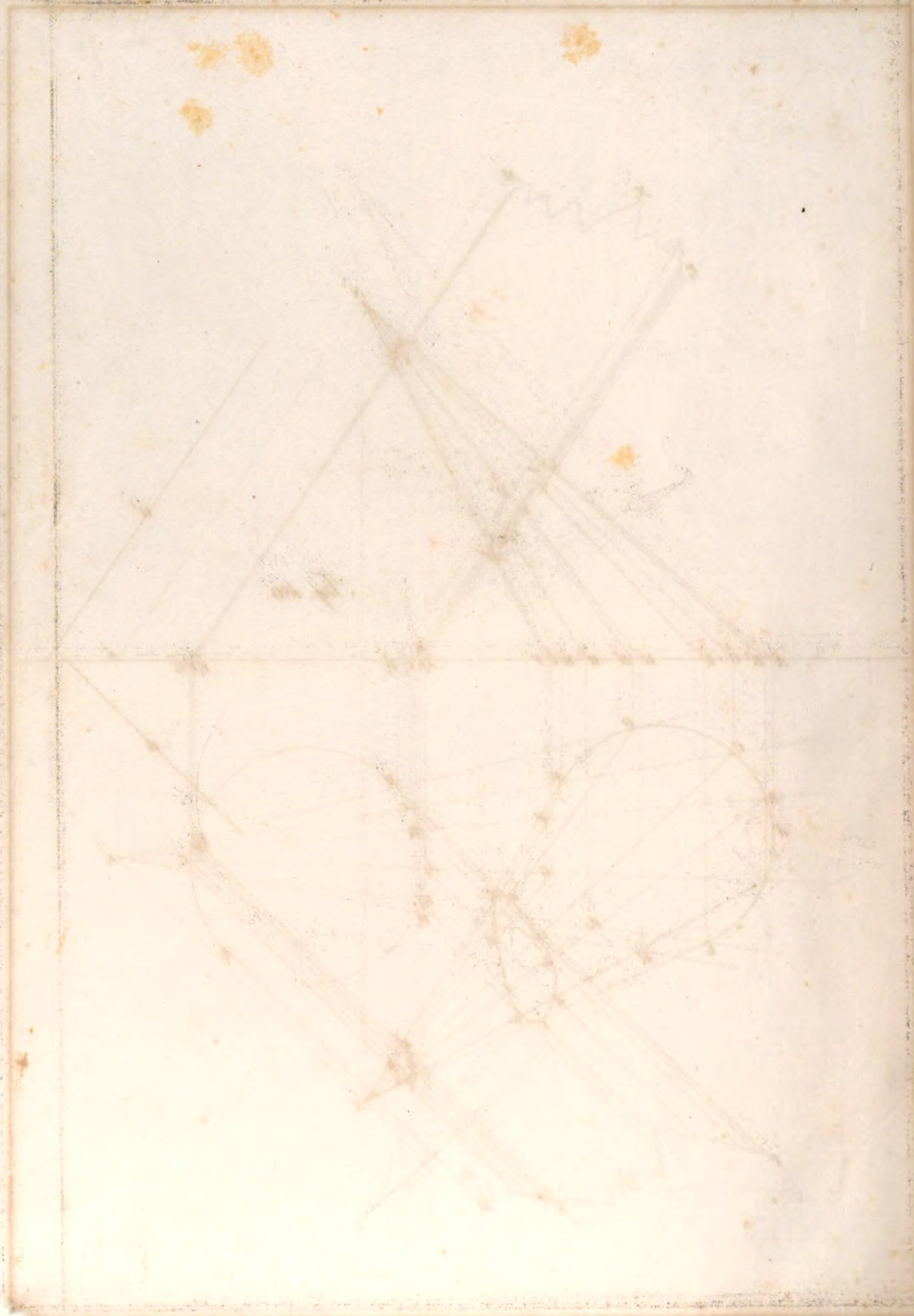


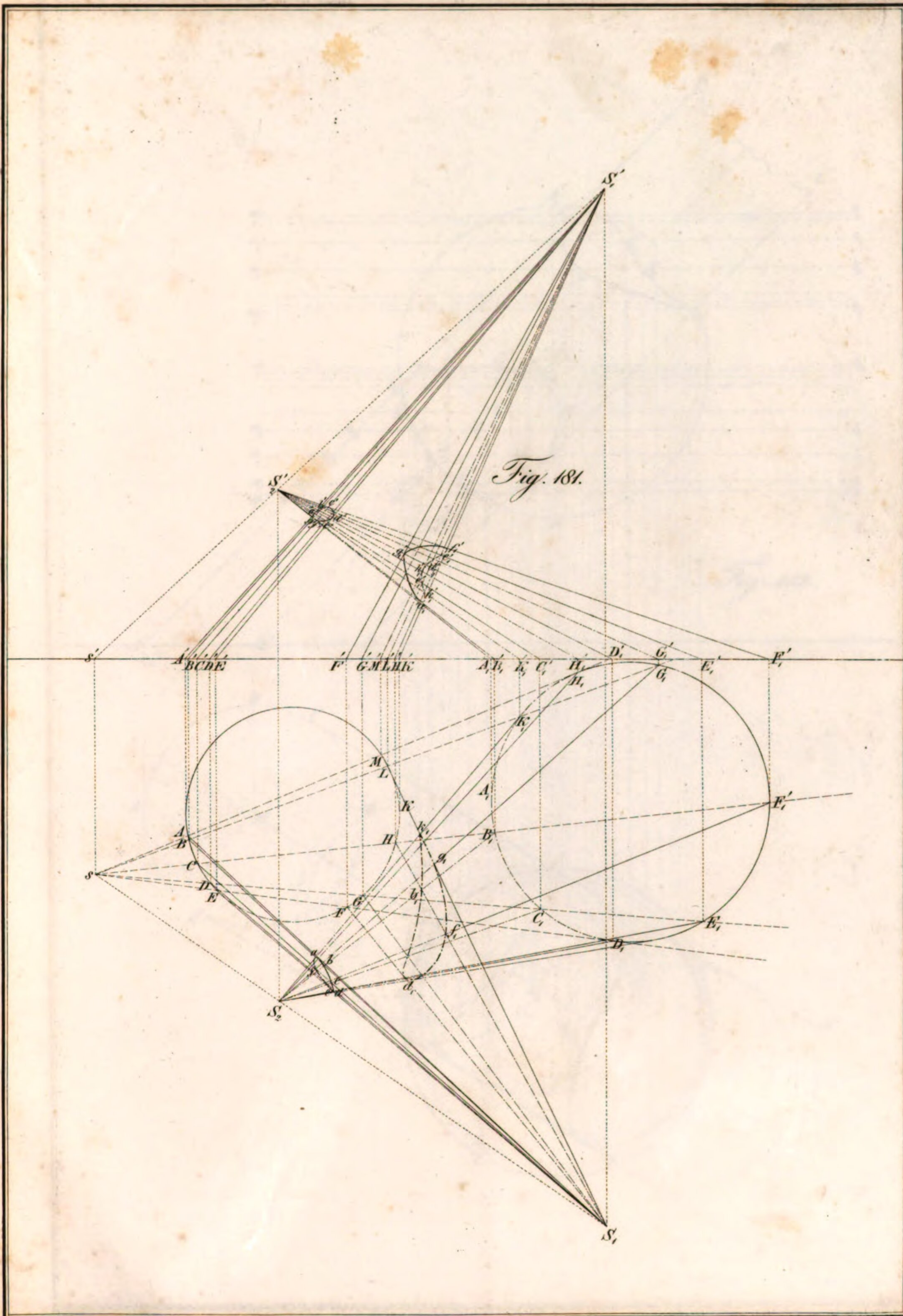
Fig. 166.

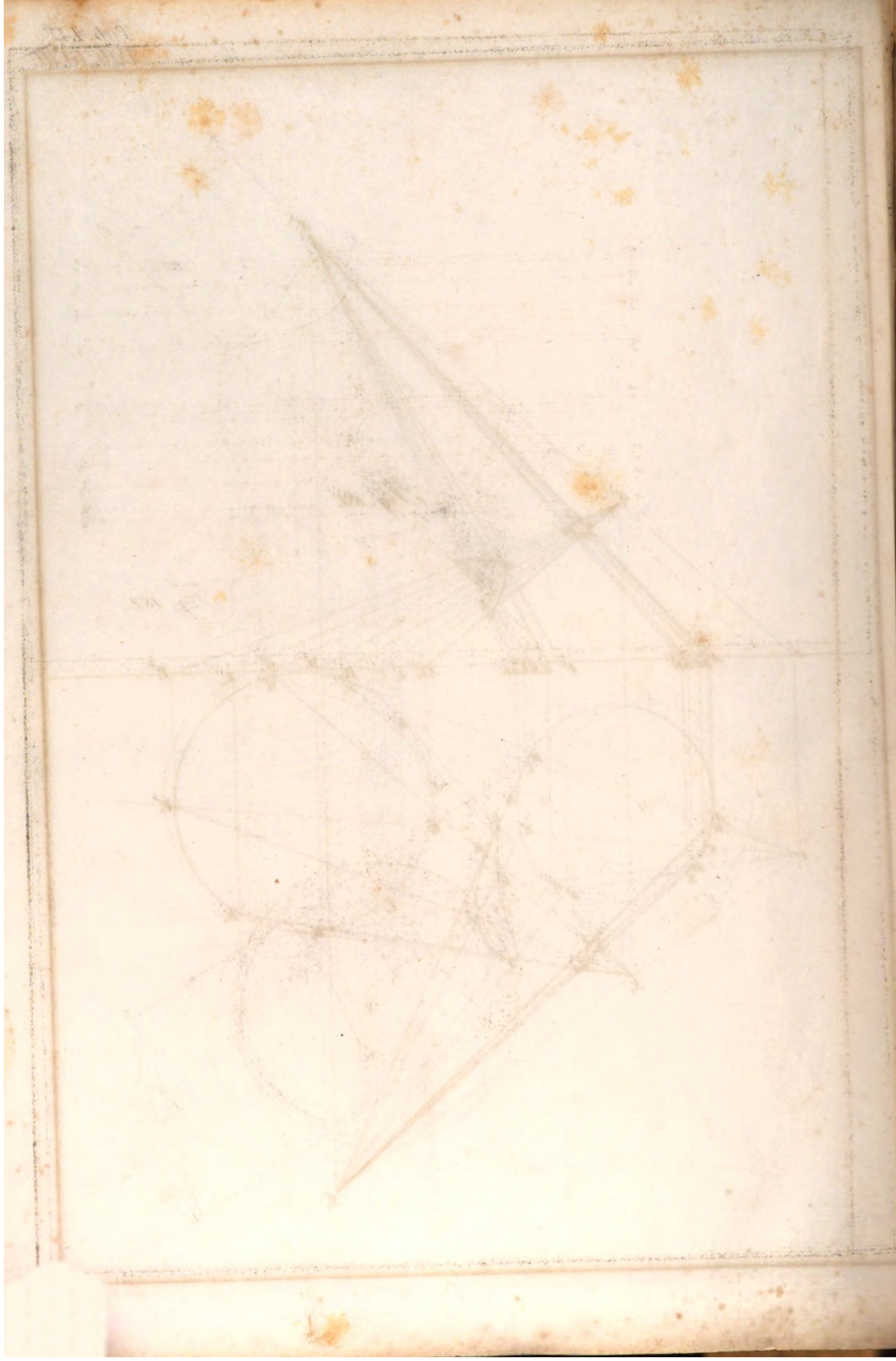












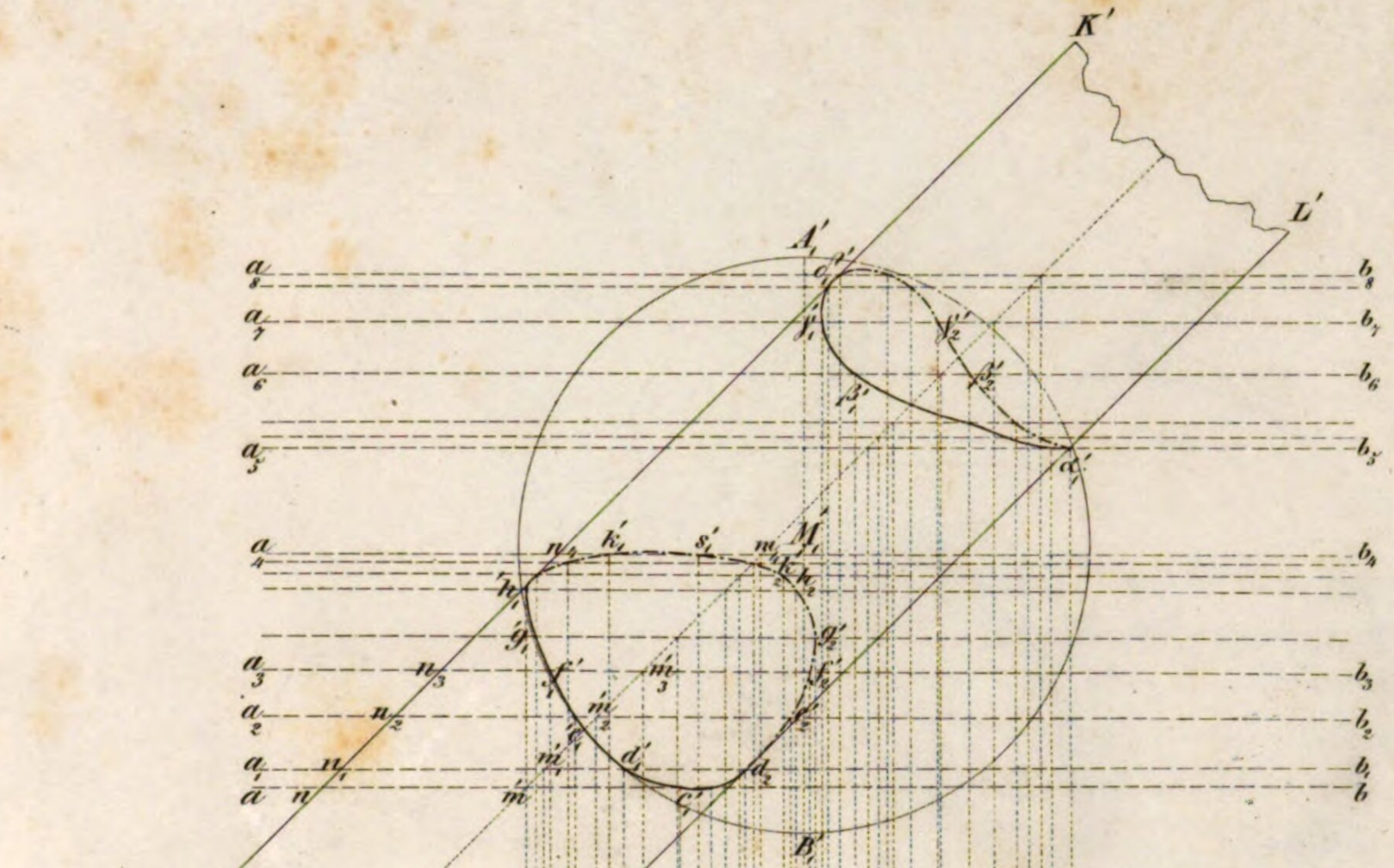
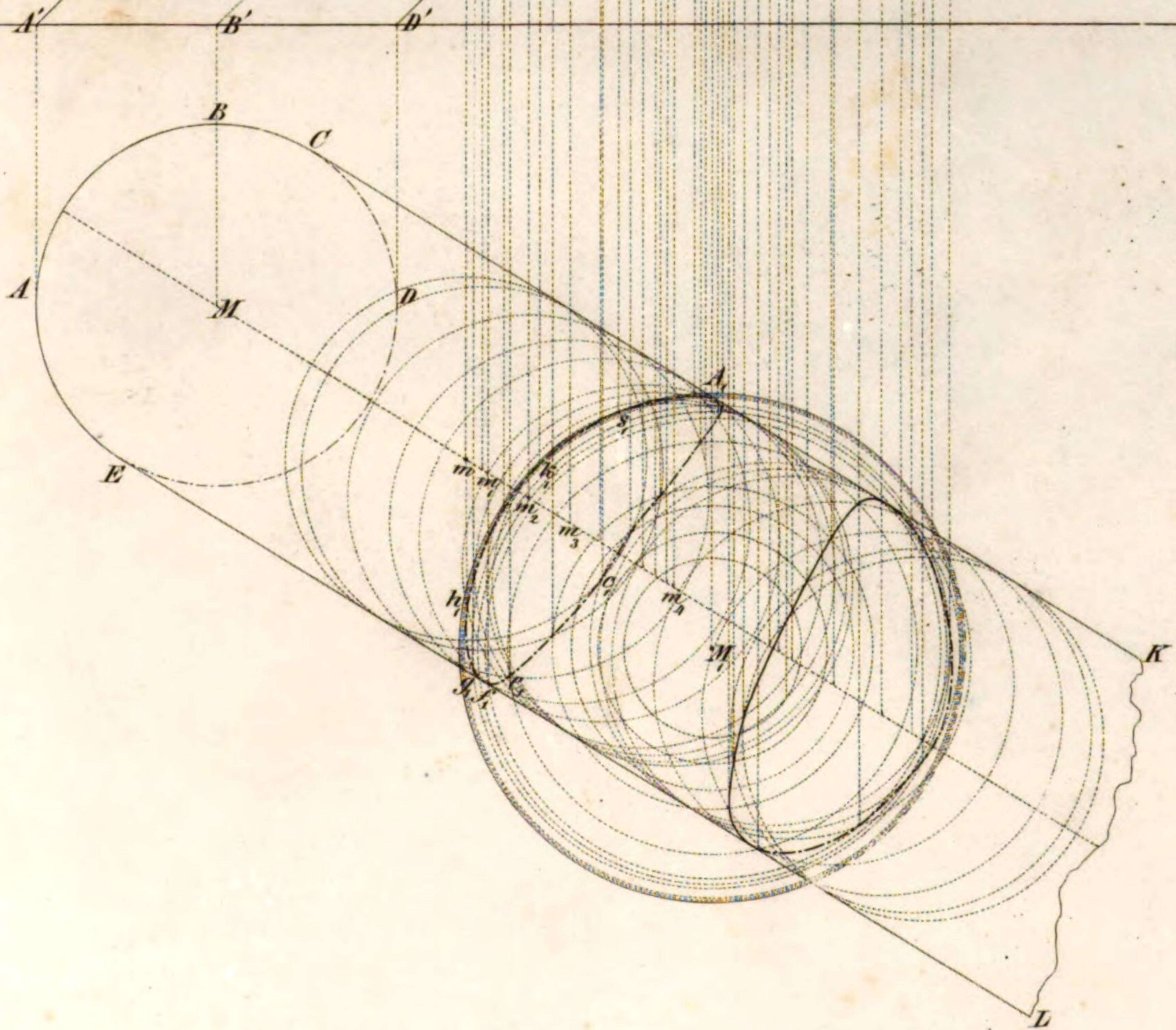
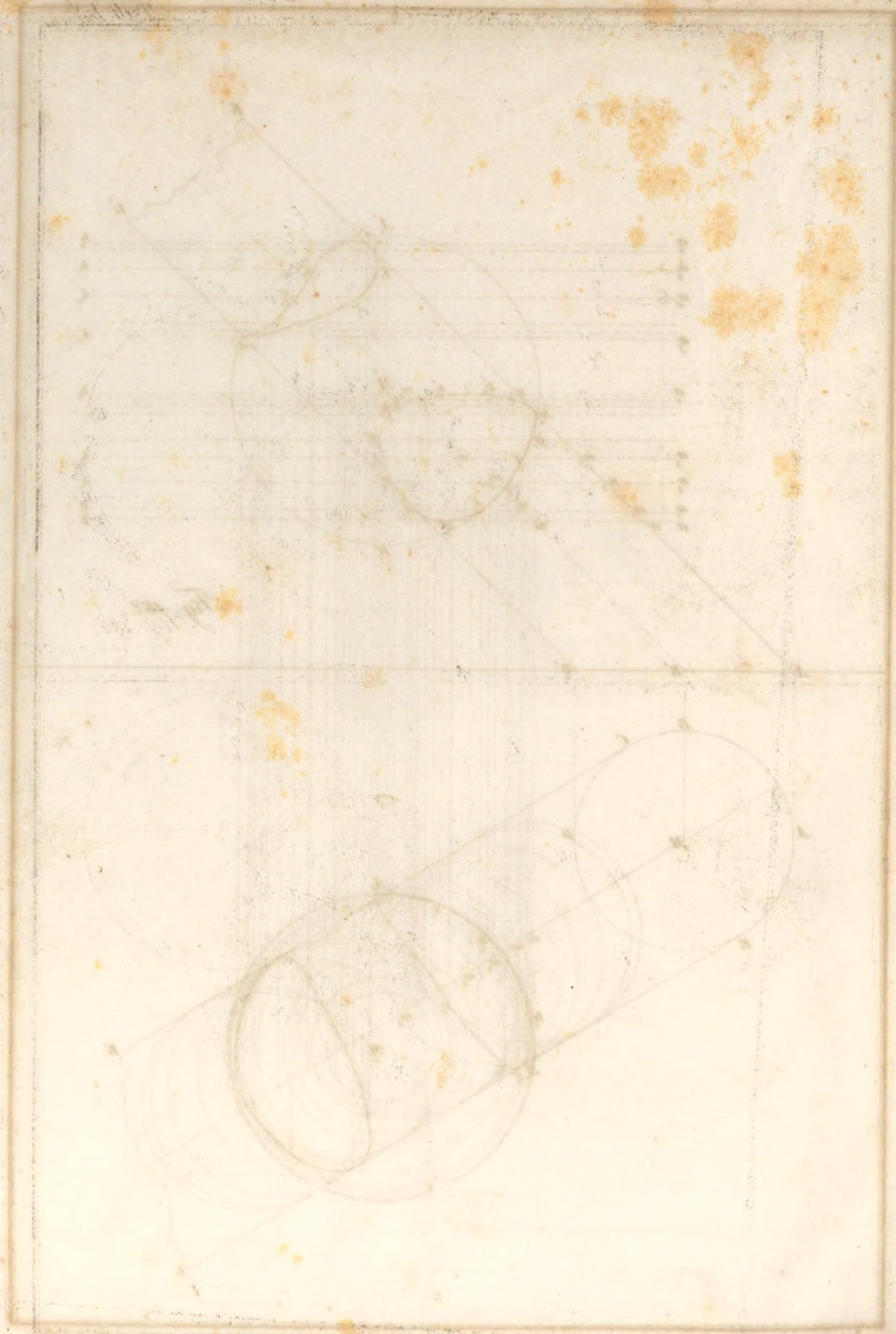
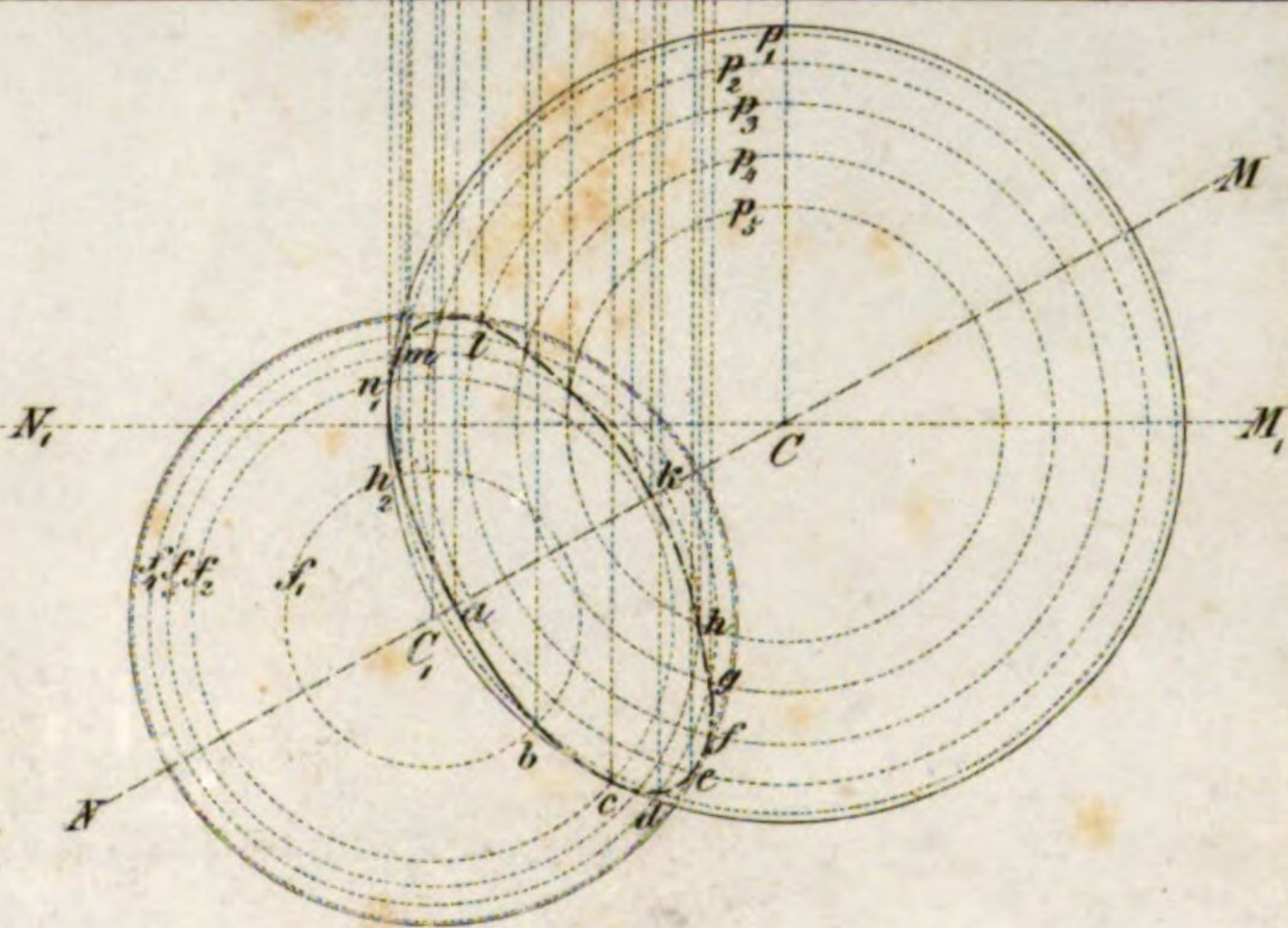
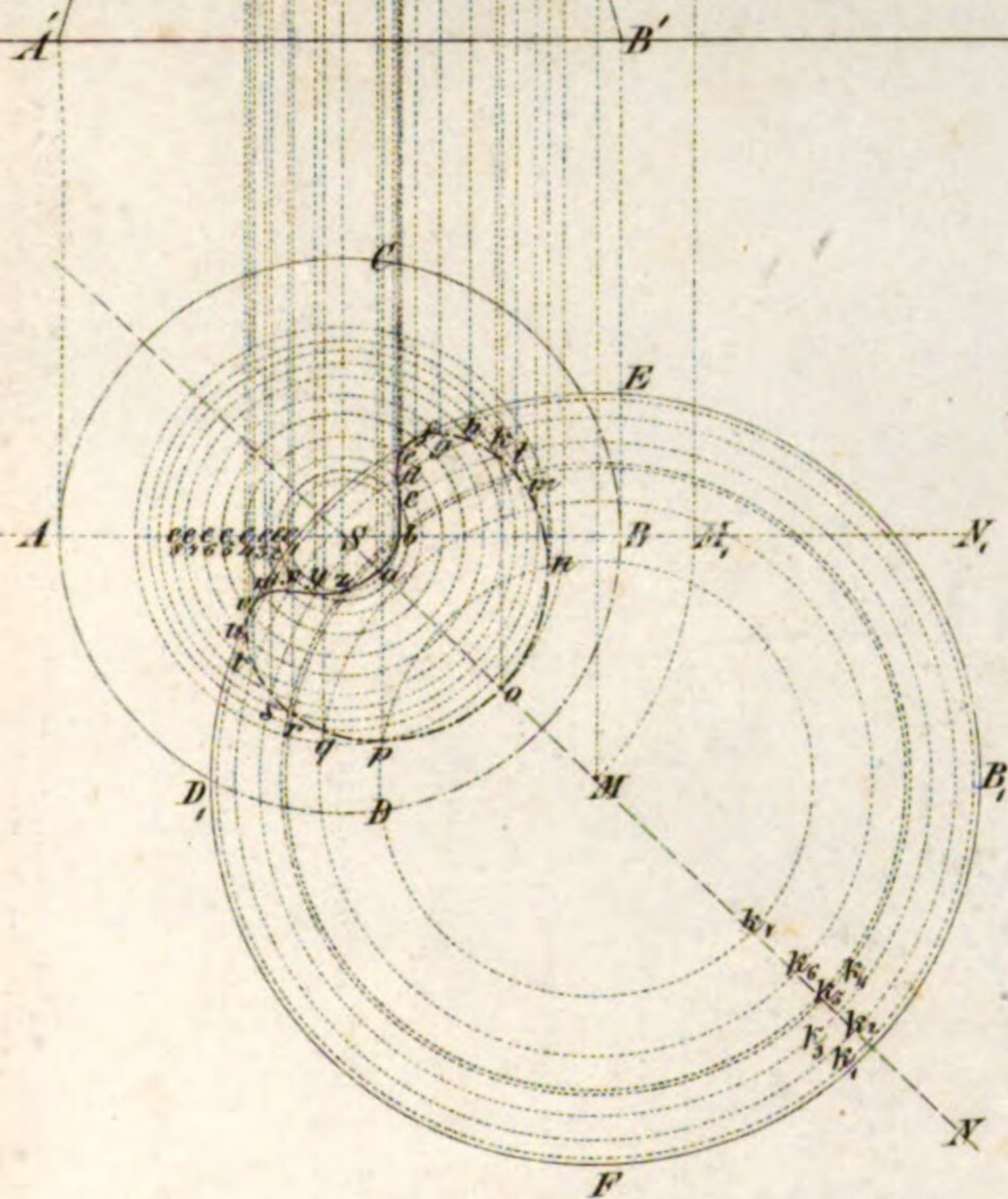
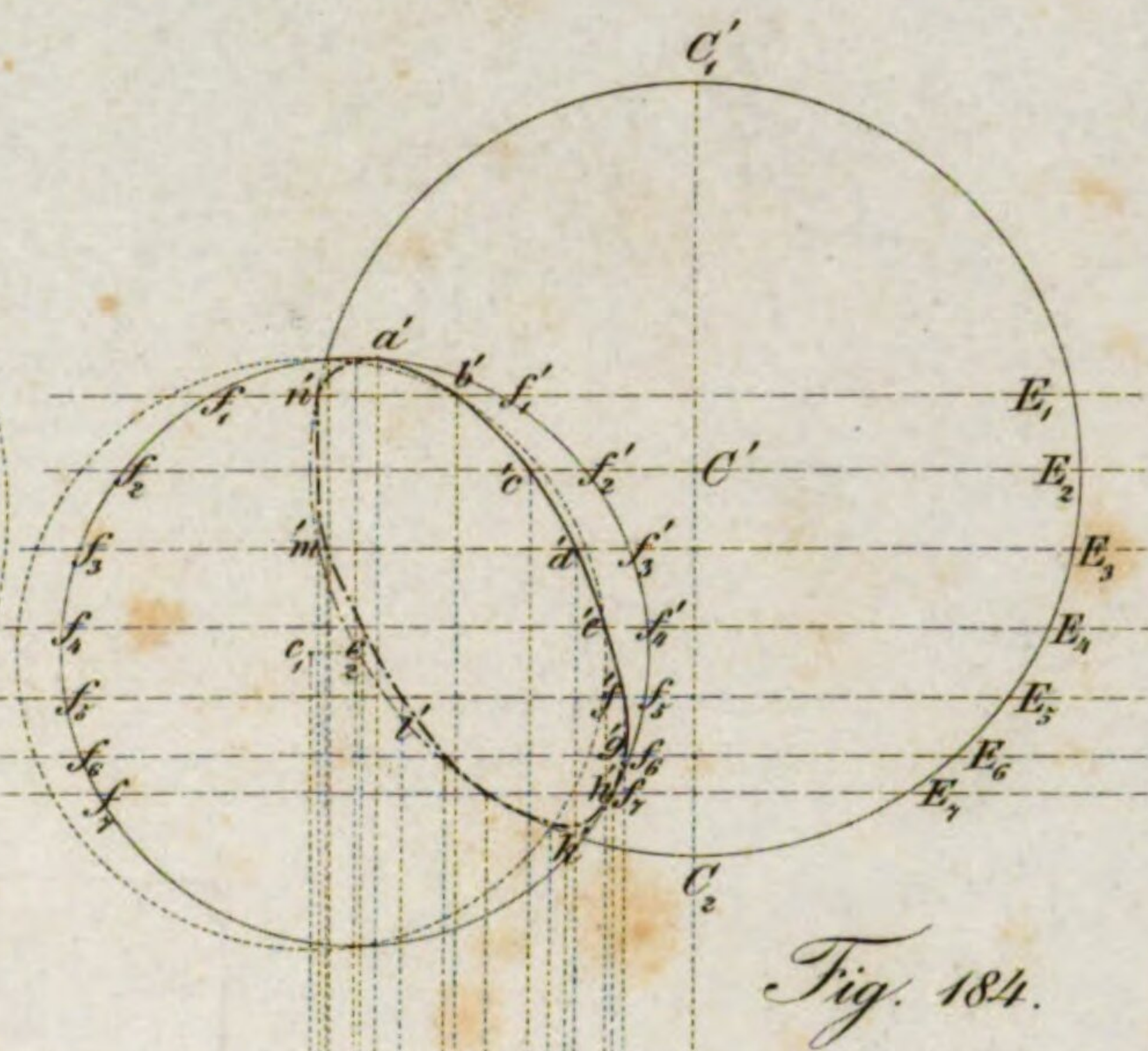
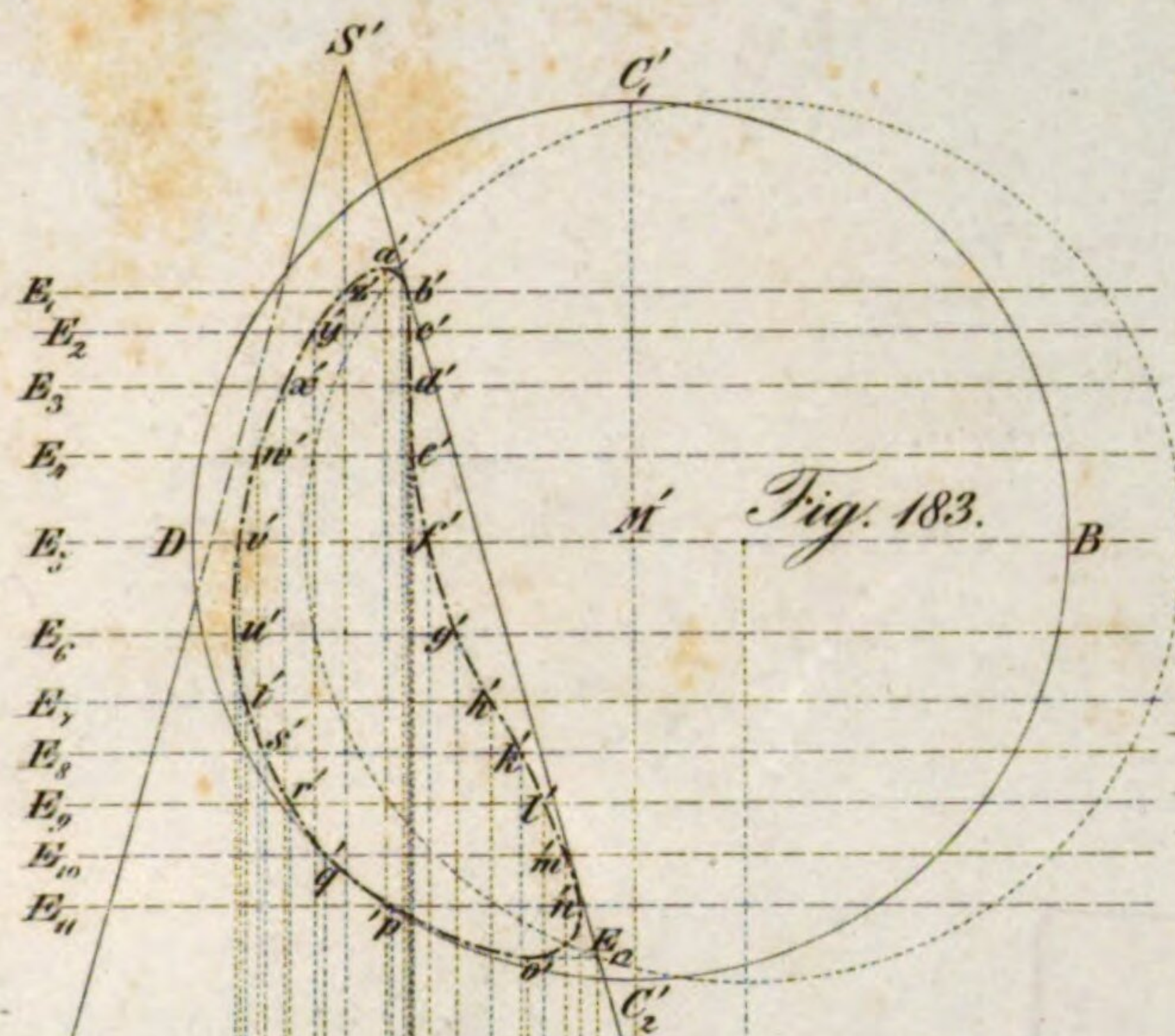


Fig. 182.







Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN



Bayerische
Stadtbibliothek
MÜNCHEN



Bayerische
Stadtbibliothek
MÜNCHEN

Kuhn, C.

Descriptive Geometrie mit Einschluss der Principien der Isometrischen
Projectionslehre für Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 2

Augsburg [1845]

4 Math.p. 181 m-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053584-8